

走近奥数

——夯实你的数学基础

六 年 级

丁建强 赵云峰 主编

上海教育出版社

编委会主任	黄元森				
编委会副主任	丁建强	赵云峰	顾徐达	黄善明	
编委	丁建强	黄元森	陆星毅	汤利萍	张万冲
	张海红	周明龙	周建平	赵云峰	姜平
	姜新娟	顾云辉	顾徐达	杨惠娟	施明
	唐春艳	黄斌	黄善明	樊晓倩	
主编	丁建强	赵云峰			
六年级分册主编	陆星毅	张海红			
六年级分册副主编	杨惠娟	黄斌			

编 者 的 话

随着新一轮基础教育改革的全面启动,从事和爱好数学教育的人们已越来越清楚地认识到:的推理能力、抽象能力、想象力和创造力等方面有着独特作用的”数学教育,如果仅仅满足“全面”,而不顾及“个体”,那是远远不够的。数学教育不仅要“让人人都能获得必需的数学”,而且还要“让不同的人在数学上得到不同的发展”。现实告诉我们,在教学的过程中确实存在一批对数学有着浓厚的兴趣且富有数学潜质的数学苗子,如何对这部分学生进行因材施教,促进他们全面、持续、和谐的发展,是我们数学教育工作者一直思考的问题。无数的事实证明,优秀的数学课外书籍对于数学苗子的成长有着催化作用。我们编写《走近奥数——夯实你的数学基础》这套书,目的就是为爱好数学的小数学迷们提供一些课外学习的材料,让他们通过这套书的学习,开拓知识视野,获得更好的发展。

这套书,依据课本,又高于课本,它的上限为奥数,下限为教材中的拓宽题,它面向 40%学有余力的学生。内容上与教材同步,跟课堂基础知识有密切联系,所撰写的例题、习题,尽量与提倡探究的课改精神相符。知识体系完整,覆盖面广,难易适当,不超前,在提高知识点的同时,注重学生思维的启迪,数学方法的掌握,技能技巧的形成,是一套很实用的课外教辅读物。

本套书的体例大致分为“创设情境”、“教你一招”、“提炼方法”、“大展身手”、“挑战自我”五大部分。让学生在充满新颖有趣的数学问题中走进数学王国,在老师循循善诱的指导下学会思维,在自我思考中领悟解题思路,在趣味性、思考性、开放性、实践性都很强的习题解答中大展身手,在不断进取中挑战自我。因而,这也是一套可读性很强的儿童课外阅读教材。

另外,这套书在编写过程中,模拟课堂教学程序设计编写形式,使每 1 个课题的内容控制在 35 分钟左右,因而可供小学数学教师开展课外活动时参阅、选用。同时,这套书也可作为家庭教育备用书,它对家长培养孩子学习兴趣和提高思维能力等方面,都有很好的借鉴作用。

这套书的编写人员都是在教学第一线的特级教师、中学高级教师或小学高级教师,并长期从事小学数学竞赛辅导,他们中有的是国家、省级奥林匹克数学竞赛辅导一级教练员。在多年的实践中,积淀了丰富的辅导经验,所辅导的学生上百次获得全国、省竞赛一等奖,为社会培养、输送了一大批数学优秀人才。我们衷心地希望读者会喜欢这套书。如果在学完以后,能够获得一些启迪,我们将感到无比欣慰。

本套书共有四册(小学三~六年级各一册),每一册又分上、下两个学期,每个学期各安排 32 个课题,每 4 个课题有一套综合练习,每学期配有期中、期末测试各一套。书的最后还附有参考答案,难度大一点的习题还有提示及分析过程,供读者参考。

因时间仓促,书中难免出现疏漏和错误,希望读者多批评指正。

1/1/2016

目 录

第 一 学 期

1. 分数的位置	1	17. 配制混凝土的学问	25
2. 从简单的想起	2	18. 意外的情形	27
3. 两只袋鼠	4	19. 白蚂蚁队休息了几天	28
4. 数学迷的门牌号码	5	20. 皮皮鲁和鲁西西	29
综合练习一	6	综合练习五	30
5. 标准体重	7	21. 大桥上的火车	31
6. 算得快的秘诀	8	22. 东、西门间的距离	32
7. 狼和羊	9	23. 青蛙和蛤蟆赛跑	34
8. 举重冠军	11	24. 何时首次相遇	35
综合练习二	12	综合练习六	36
9. 分数“叠罗汉”	12	25. 11 名猴哨兵	37
10. 古埃及分数	14	26. 新周扒皮	38
11. 天花板与地板	15	27. 砝码	39
12. 巧用分数单位	16	28. 军舰上的信号旗	41
综合练习三	17	综合练习七	42
13. 一一对应	18	29. 到底是谁的错?	43
14. 妙用单位“1”	19	30. 哈利·波特的算术	44
15. 图形帮助思考	21	31. 巧算银“湖”的面积	45
16. 抓住不变量	22	32. 美丽的拼图	46
综合练习四	24	综合练习八	48
期中测试	24	期末测试	49

第 二 学 期

33. 农民的“小九九”	50	39. 旋转的长方形	58
34. 液体的浓度	51	40. 旋转的三角形	59
35. 存钱	52	综合练习十	60
36. 商人的机智	53	41. 谁喝的饮料多	61
综合练习九	54	42. 胖猪做帽子	62
37. 摸彩	55	43. 谁大谁小	64
38. 倒来倒去	56	44. 乌鸦喝水	65

综合练习十一	66	56. 班干部选举	84
45. 旗杆有多高	66	综合练习十四	85
46. 谁得冠军	68	57. 乒乓球比赛的人数	86
47. 蜗牛的心愿	69	58. 考虑极端情形	87
48. 鼓号队的人数	70	59. “慈善家”的谎言	88
综合练习十二	71	60. 谁得到的奖学金多	89
期中测试	72	综合练习十五	90
49. 足球队有多少人	73	61. 传花游戏	91
50. 贝贝买球	74	62. 数学调查	92
51. 装糖果	76	63. 外婆分蛋糕	93
52. 春游人数	77	64. 招聘	95
综合练习十三	78	综合练习十六	96
53. 丁谓施工	79	期末测试	97
54. 货运中的难题	81	参考答案	99
55. 重重叠叠	82		

1. 分数的位置

[你会算吗]

分数小姐妹们准备搞一次生日 Party, 瞧, 她们正排着队点名呢! $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}; \dots$, 想一想第 400 个位置上站的是谁呢?

很显然, 这道题是利用找规律的方法来解决的, 那么你想不想试一试呢?

[教你一招]

例: 一串分数: $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}; \dots$ 中, $\frac{7}{10}$ 是第几个分数?

分析: 对这个数列, 我们可以这样分析思考:

分母是 1 的分数有 1 个: $\frac{1}{1}$;

分母是 2 的分数有 3 个: $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{2}$;

分母是 3 的分数有 5 个: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$;

分母是 4 的分数有 7 个: $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}$ 。

从而我们发现: 分母是 5、6、7、8、9 的分数分别有 9 个, 11 个, 13 个, 15 个, 17 个。所以分母是 1~9 的分数一共有 $1+3+5+7+9+11+13+15+17=81$ (个)。分母是 10 的分数有 19 个。

解: 根据上面的分析, 可知, $\frac{7}{10}$ 应该是分母是 10 的分数中的第 7 个和第 13 个。 $81+7=88$, $81+13=94$, 所以 $\frac{7}{10}$ 是这个数列中的第 88 个和第 94 个分数。

现在你知道上面的情境问题中第 400 个位置上站的是谁了吗? 告诉你, 她是 $\frac{1}{20}$ 。

[用心领悟]

像上面这类题, 数列(数表)的本身或计算都存在一定的规律。只要我们仔细观察、思考, 并勇敢地尝试, 就能发现其中的规律, 并利用规律求出题目的答案了。但是, 也要提醒大家, 找到规律是得意的, 但不可忘形, 还要注意细微之处, 否则前功尽弃。在上例中, 如果你忽视了同分母的几个分数排列的对称性, 就很可能把 94 这个答案遗漏了。

[大展身手]

1. 已知一串有规律的数: $1, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{13}{21}, \frac{34}{55}, \dots$, 那么在这串分数中, 从左往右数, 第 7 个数是_____。

2. 找规律填数:

$$\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 2\frac{7}{8}, 3\frac{15}{16}, 4\frac{31}{32}, (\quad), (\quad), \dots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, (\quad), (\quad), \dots$$

3. 找规律填数

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{8}, 1\frac{11}{16}, (\quad), (\quad)。$$

$$30, 20, 13\frac{1}{3}, 8\frac{8}{9}, (\quad), (\quad)。$$

4. 如果 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{11}{30}$, 那么 $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} = (\quad)$, $\frac{1}{20} + \frac{1}{23} = (\quad)$, 你能说说理由吗?

挑战自我

观察下面数表(横排为行):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1}; \\ & \frac{2}{1}; \frac{1}{2}; \\ & \frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}; \\ & \frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \\ & \frac{5}{1}; \frac{4}{2}; \frac{3}{3}; \frac{2}{4}; \frac{1}{5}; \\ & \dots \end{aligned}$$

根据前 5 行数表达的规律, $\frac{55}{49}$ 这个数位于由上而下的第()行, 在这一行中, 它位于由左向右的第()个。

2. 从简单的想起

你会算吗

又到了数学活动课的时间了, 小叮铛和小灵通三步并作两步, 高高兴兴地到楼上的活动室去。小灵通忽然停了下来, 对小叮铛说: “从楼下的教室到楼上的活动室一共有 12 级台阶, 如果我们每一步只登上一级或两级台阶, 那么从教室到活动室一共有几种不同的走法?” 小叮铛一笑: “那还不简单, 试一下不就得了, 反正楼梯的级数又不是很多。” 同学们, 你们觉得小叮铛的方法可行吗? 你有什么好的建议送给他们呢?



教你一招

例 1: 把分数 $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ 分别化成循环小数, 你发现什么规律? 能用文字表述出来吗?

根据你的发现, 破译密码: $\frac{Y}{X} = 0.\dot{A}BCDE\dot{F}$, 其中 $A = 4$ 。

分析: 经过计算和观察, 不难发现规律。需要确定的是, 当 $A = 4$ 时, X 和 Y 的值。

解：将分母是7的真分数化成循环小数，循环节是1、4、2、8、5、7这样六个数字不同组合的循环出现。

因为 $\frac{3}{7} = 0.428571\dot{}$ ，所以 $X=7, Y=3, B=2, C=8, D=5, E=7, F=1$ 。

例2：甲、乙两瓶中各有500克水。第一次将甲瓶里的水的 $\frac{1}{2}$ 倒入乙瓶，第二次的把乙瓶里的 $\frac{1}{3}$ 倒入甲瓶，第三次把甲瓶里的水的 $\frac{1}{4}$ 倒入乙瓶……照这样来回倒了99次后，甲瓶里有多少克水？

分析：倒奇数 n 次后，是甲瓶里倒出 $\frac{1}{n}$ 。

解： $500 \times \left(1 - \frac{1}{99}\right) = 494\frac{94}{99}$ (克)

答：甲瓶里有 $494\frac{44}{99}$ 克水。

怎么样，能解决开头的问题了吗？从教室到活动室的12级台阶一共有233种走法。显然，小叮铛的方法太费时费力了。

✿[归纳总结]

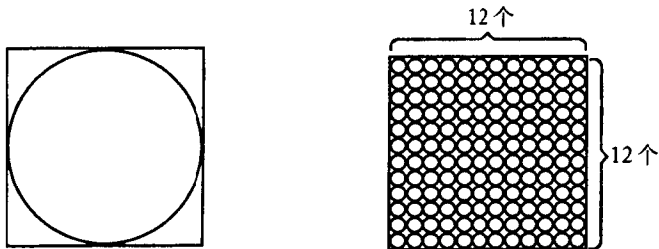
像上面这样，当遇到较复杂的问题，一时不知从何下手时，我们不妨先从简单的特例做起，仔细观察，总结规律，再用发现的规律去解决问题，你会体验到“柳暗花明又一村”的喜悦。不信就试试！

☞[大展身手]

1. 一个小朋友的手里拿了81粒花种在草地上散步。他走了1米，散下1粒种子；又走了4米，散下3粒种子；再走7米，散下5粒种子；……照此规律，当他把所有的种子都散完的时候，他走了多少路？

2. 军事夏令营提前开营了。老师用电话向营员们发出通知。假定每通知一个营员要1分钟。第1分钟由老师通知营员A，第二分钟由营员A通知营员B，同时老师又通知营员C。依次类推，如果没有重复，4分钟共通知多少名营员？

3. 如图所示，在两块铁皮内挖去一些圆，剩下的边角料的面积哪一个多些？



4. 要在一个圆圈上标出一些数：第一次先把圆2等分，在两个分点旁分别标上 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{5}$ ；第二次把两段半圆弧分别2等分，在分点旁标上相邻两分点旁所标的两数的和（如 $\frac{9}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ ）；第三次把4段圆弧分别2等分，并在4个分点旁标上相邻两分点旁所标的两数的和。如此推下去，当第4次标完数后，圆圈上所有已标的数的总和是多少？

✿[挑战自我]

1. 将一个圆形纸片用直线分成大小不限的若干小纸片。如果要分成不少于50个小纸片，至少要画多少条直线？

2. 二年级的50个小朋友做游戏。由4个小朋友作为顶点站成一个长方形，其他小朋友站在这个长方形内，其中任意3个小朋友都没有站在一条直线上。以这50个小朋友为顶点的三角形有几个？

3. 两只袋鼠

[你会算吗]

袋鼠妈妈和袋鼠宝宝做游戏:规定每跳一步,可从一个方格跳到相邻的方格。现在袋鼠妈妈从标有数字“0”的方格按顺时针方向跳了 2001 步,落在一个方格里。袋鼠宝宝也从标有数字“0”的方格里起跳,但它是沿着逆时针方向跳了 2002 步,落在另一个方格里。这两个方格里数字的乘积是()。

0	1	2	3
12			4
11			5
10	9	8	6

[教你一招]

例: 分数 $\frac{9}{13}$ 化成小数后, 小数点后面第 1993 位上的数字是几?

分析: $\frac{9}{13} = 0.\dot{6}9230\dot{7}$, 且 $1993 = 6 \times 332 + 1$ 。

解: $\frac{9}{13}$ 化成小数时, 小数点后面第 1993 位上的数字是 6

上面的情境题会做吗? 告诉你, 所求的乘积是 $9 \times 2 = 18$ 。

[画龙点睛]

上面的问题属于周期问题, 在前面的三、四年级都已学过。所谓周期, 就是事物在运动变化的过程中, 某些特征循环出现, 其连续两次间所经过的时间叫周期。表现在数学中, 就是数字(循环小数中最常见)、算式等有规律地重复出现(在上例中 12 步是一个周期)。解题时, 善于发现周期现象, 并利用周期规律是关键。

[大展身手]

1. 将 $\frac{3}{101}$ 化为小数, 小数点后面第 2002 位上的数是_____。

2. 把 1~8 这 8 个号码按顺时针方向摆成一个圆圈, 现在有一个小球, 第一天从 1 号顺时针前进 33 个位置, 第二天再逆时针前进 45 个位置, 第三天又顺时针前进 33 个位置, 第四天再逆时针前进 45 个位置, 第五天又顺时针前进 33 个位置, ……至少经过_____天后, 小球又回到原来的 1 号位置。

3. 真分数 $\frac{a}{7}$ 化为小数后, 如果从小数点后第一位数字开始连续若干个数字的和是 1992, 那么 $a =$ _____。

4. 各位数字都是 1 的一个十三位数, 被 7 除, 余数是_____。

5. 一种电子游戏: 甲、乙、丙、丁四个停车场里分别停放着 10、7、5、4 辆汽车。游戏要求, 每次都从停放汽车最多的车场中往另外三个车场各开去一辆汽车, 这样进行了 2002 次, 甲场中停放汽车_____辆。

[挑战自我]

1. 对循环小数 $0.\dot{1}234567891011\cdots 99100$ 取近似值, 要求保留 200 位小数。那么这小数的末位数字是_____。

2. 将循环小数 $0.\dot{0}2\dot{7}$ 与 $0.\dot{1}7967\dot{2}$ 相乘, 取近似值要求保留一百位小数。那么, 该近似值的最后一位小数是_____。

4. 数学迷的门牌号码

[你会算吗]

丁书哲是一个不折不扣的数学迷,在一次课余闲聊的时候,用自己的名字编了一道算式,这个算式的最后得数的倒数就是他家的门牌号码。这道题是:已知 $1999 + \text{丁} = 2000 + \text{书} = 2001 + \text{哲}$,并且 $\text{丁} \times \text{书} \times \text{哲} = 504$,那么 $\frac{\text{丁}}{\text{书哲}} + \frac{\text{书}}{\text{丁哲}} + \frac{\text{哲}}{\text{丁书}} - \frac{1}{\text{丁}} - \frac{1}{\text{书}} - \frac{1}{\text{哲}} = (\quad)$ 。“当然相同的汉字代表相同的数字,不同的汉字代表不同的数字。”小丁补充说。如果丁书哲邀请你去他家做客,你能找到他的家吗?

[教你一招]

例1: 已知 $19 + \text{新} = 21 + \text{年} = 23 + \text{好}$, 并且 $\text{新} \times \text{年} \times \text{好} = 480$, 那么 $\frac{1}{\text{新}} + \frac{1}{\text{年}} + \frac{1}{\text{好}} - \frac{1}{\text{好} \times \text{年}} = (\quad)$ 。(相同的汉字代表相同的数字,不同的汉字代表不同的数字)

分析: 首先要知道新、年、好三个汉字分别代表什么数字。根据 $19 + \text{新} = 21 + \text{年} = 23 + \text{好}$, 可以知道新、年、好所代表的是三个连续奇数或偶数, 并且新是最大的一个。又根据 $\text{新} \times \text{年} \times \text{好} = 480$, 知道新 = 10, 年 = 8, 好 = 6。

$$\text{解: 原式} = \frac{1}{10} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{48} = \frac{89}{240}$$

例2: 下式中的“香港”、“中国”均代表一个两位自然数, 那么香港 = _____, 中国 = _____, $(\text{香港})^2 + 1997 = (\text{中国})^2 + 1949$

分析: 由上式可知 $(\text{中国})^2 - (\text{香港})^2 = 48$ 即 $(\text{中国} + \text{香港}) \times (\text{中国} - \text{香港}) = 48$

所以 $\begin{cases} \text{中国} + \text{香港} = 24, 12, 8 \\ \text{中国} - \text{香港} = 2, 4, 6 \end{cases}$, 其中只有 24 与 2 这组符合, “中国” = 13, 香港 = 11。

解: 香港 = 11, 中国 = 13

现在你能找到小丁的家吗? 小丁家的门牌号是 168。

[帮你整理]

以上的问题归属于算式谜, 即给你一个用文字或字母组成的算式, 请你“翻译”成数字算式。这类题涉及到约数和倍数, 奇数和偶数, 质数和合数, 分解质因数等概念, 因此较为灵活。在解题的时候, 要综合调动所有的知识、方法, 仔细观察, 正确分析, 找准突破口, 善于联想, 大胆地探究, 相信大家一定能找到解决问题的办法。

[大展身手]

1. 用 1、4、5 三个数字组成两个带分数, 使下面的等式成立。(每个带分数都由 1、4、5 三个数字组成)

$$\square \frac{\square}{\square} \times \frac{3}{7} = \square \frac{\square}{\square}$$

2. 在下面三个算式中, 三个方框内都填同一个数, 如果在这个算式中, 恰好有两个算式是正确的, 那么方框中所填的数是_____。

$$\square - 0.07 = \frac{19}{50} \quad \square \times 0.75 = \frac{9}{28} \quad 0.375 \div \square = \frac{5}{6}$$

3. 三个质数的倒数的和是 $\frac{311}{1001}$, 那么这三个质数的和是_____。

(1) 311 (2) 31 (3) 29 (4) 35

4. 计算 $1\frac{1}{17} + 3\frac{2}{17} + 5\frac{3}{17} + \cdots + 29\frac{15}{17} + 31\frac{16}{17} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 在下式的圆圈和方框中,分别填入适当的自然数,使等式成立。方框中应填_____。

$$\frac{1}{\bigcirc} + \frac{29}{\square} = \frac{11}{12}$$

❧[挑战自我]

1. 下面算式中,9个汉字分别代表1~9这9个数字(不同的文字代表不同的数字),已知竞=8,赛=6,请把这个等式恢复出来。

$$\begin{array}{r} \text{数学} \\ \text{华罗庚} \end{array} + \begin{array}{r} \text{竞赛} \\ \text{金杯} \end{array} = 7$$

2. 已知 a, b, c 都不等于0,而且 $a > b > c$,当 $a = \underline{\hspace{1cm}}, b = \underline{\hspace{1cm}}, c = \underline{\hspace{1cm}}$ 时,等式 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{13}{24} = 1\frac{1}{2}$ 成立。

综合练习一

1. 在括号里填上适当的数。

(1) $\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, (\quad), \frac{1}{20}, (\quad), (\quad)$ 。

2. 自然数列排成如下的数阵:

```
1  2  6  7  15  16...
3  5  8  14  17...
4  9  13  18...
10 12 19...
11 20...
21...
...
```

68 在第()行第()列。

3. 在一张纸上画了9条直线,这些直线中任意两条都相交,任意三条都不交于同一点。那么这9条直线把这张纸分成了_____部分。

4. $1^2 = 1, 2^2 = 1 + 3, 3^2 = 1 + 3 + 5$,那么 $4^2 = (\quad), 10^2 = (\quad)$ 。

5. 一台文艺演出中,节目A、B、C、D受到有某些因素的制约,A不能排在第4个,B不能排在第3个,C不能排在第2个,D不能排在第1个,那么这4个节目共有()种不同的排法。

6. 有50分的邮票3张,80分的邮票4张,用他们可贴出_____种不同的邮资。

7. 在 $\frac{4}{5} > \frac{7}{\square} > \frac{1}{2}$ 中的□内,可以填写的整数有_____。

(1) 10、11、12、13;

(2) 9、10、11、12、13;

(3) 8、9、10、11、12、13; (4) 无数个。

8. 分数 $5/7$ 化成小数后,小数点后第1999位数字是_____。

9. 有甲乙两个水杯,甲杯有水1千克,乙杯是空的。第一次将甲杯里的水的 $1/2$ 倒入乙杯里,

第二次又将乙杯里的水的 $\frac{1}{3}$ 倒入甲杯里,第三次又将甲杯里的水的 $\frac{1}{4}$ 倒入乙杯里,第四次又将乙杯里的水的 $\frac{1}{5}$ 倒入甲杯里,照这样来回倒下去,一直倒了 2001 次后,甲杯里的水还剩_____千克。

10. 卡普雷卡尔运算:任取一个四位数(四位数字相同的除外),将组成这个四位数的数码重新排列,由大到小排列得到一个最大数,由小到大排列得到一个最小数。求出最大数与最小数的差。

对一个四位数反复进行卡普雷卡尔运算,会得到什么结果呢?例如取四位数 6158 进行卡普雷卡尔运算。

$$8651 - 1568 = 7083$$

$$8730 - 378 = 8352$$

$$8532 - 2358 = 6174$$

$$7641 - 1467 = 6174$$

请你动笔试一试。显然,你发现了运算的最后结果都是 6174,并且最多经过 7 步运算。这个 6174 就被命名为卡普雷卡尔黑洞。你想不想以你的名字命名一个数字黑洞呢?规定一个运算法则,开始吧!

5. 标准体重

[你会算吗]

我们都知道“肥胖”已成了世界上的一大流行病。为此,人们开始关注标准体重。我国军事科学院提出这样一条计算公式:标准体重(千克) = [身高(厘米) - 150] $\times \frac{6}{10}$ + 48 ~ 50(公式最后加上常数,南方人为 48,北方人为 50)。

杭州市的小明同学身高 160 厘米,体重 60 千克,请你根据这个公式,判断一下小明的体重正常吗?

[教你一招]

例 1: 计算: $2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{3} + \frac{8}{21} \div 2\frac{2}{7} - 1.5$

分析: 分、小数四则混合运算的关键是要注意运算顺序。

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{3} + \frac{8}{21} \times \frac{7}{16} - 1.5 \\ &= 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1.5 \\ &= 5\frac{2}{3} - 1.5 \\ &= 4\frac{1}{6}\end{aligned}$$

例 2: 计算: $\left(2.5 \times \frac{4}{5}\right) \div \left(\frac{1}{4} \times 0.8\right) - 0.75 \div \frac{3}{40}$

分析: 分数、小数乘除运算中,将小数化成分数计算较为简便。

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= \frac{5}{2} \times \frac{4}{5} \times 4 \times \frac{5}{4} - \frac{3}{4} \times \frac{40}{3} \\ &= 10 - 10 \\ &= 0\end{aligned}$$

通过计算,相信你们已经知道小明同学的体重比标准体重多了 6 千克,看来小明有必要关注一

下自己的运动与饮食了。

✿[一点就通]

分、小数四则混合运算是一个比较简单的话题,掌握正确的运算顺序,认真仔细地计算是得出正确答案的前提。如果你能注重事后验算,那就又增加了一个保险系数。提醒你一个小小的策略:审题时要正确判断是把分数化成小数计算简便呢,还是把小数化成分数计算简便。

✎[大展身手]

1. 计算: $\frac{7}{18} \times 4.5 + 3\frac{3}{4} \div 16.2$

2. 计算: $2.35 \times 4\frac{1}{3} + \left(2\frac{3}{5} - 0.25\right) \div 1\frac{1}{2}$

3. 计算: $\left[14.8 + \left(3\frac{2}{7} - 1.5\right) \times 1\frac{13}{25}\right] \div 4\frac{1}{5}$

4. 计算: $3.875 \times \frac{1}{5} + 38\frac{3}{4} \times 0.09 - 0.155 \div 0.4$

5. 国际上流行一种用“体重指数”来衡量一个人的体重是否正常,公式是:体重指数 = 体重(千克) $\div$ 身高(米²)。世界卫生组织提出体重指数的正常值,男子约为 22.0,女子约为 20.8,上下允许相差 $\frac{1}{10}$,请你根据这两个知识,判断你的体重是否正常?可别忘了合理安排自己的运动和饮食哟!

✎[挑战自我]

1. 计算: $\frac{3}{8} \times 12.\dot{6} \div \frac{15}{32} + 1\frac{1}{2}$

2. 计算: $\left(4.92 + 6\frac{2}{7} + 1.08 + 4\frac{5}{7}\right) \times \left(3\frac{1}{8} - 1.125 + 1\right)$

6. 算得快的秘诀

✎[你会算吗]

这次的“每周一题”轮到玲玲主持了,这位数学课代表会搞些什么花样呢,同学们可都等着呢。

“你们看!”玲玲把早已准备好的小黑板高高举起:计算: $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2000} + \frac{1}{2001}\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2000} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{2002}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2000} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{2002}\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2000} + \frac{1}{2001}\right)$ 。

“哇,你也太狠了些吧!”下面的同学不禁善意地叫了起来。“小意思,小意思,让我来教你们一招!”

✎[教你一招]

例 1: 计算: $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{200} + \frac{1}{201}\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{200} + \frac{1}{201} + \frac{1}{202}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{200} + \frac{1}{201} + \frac{1}{202}\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{200} + \frac{1}{201}\right)$

分析: 注意观察每个括号中都有 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{200} + \frac{1}{201}$, 于是设 $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{200} + \frac{1}{201}$, 用代数法来做,可以化繁为简。

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= (1+A) \times \left(A + \frac{1}{202}\right) - \left(1+A + \frac{1}{202}\right) \times A \\
 &= A + \frac{1}{202} + A^2 + \frac{1}{202}A - A - A^2 - \frac{1}{202}A \\
 &= \frac{1}{202}
 \end{aligned}$$

例 2: 计算: $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{6}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{10}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{9}\right)$

分析: 通过观察, 发现 $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$, $\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{5}{4} \times \frac{4}{5} = 1 \cdots$
 $\left(1 + \frac{1}{8}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{9}{8} \times \frac{8}{9} = 1$

解: 原式 $= 1 + \frac{1}{10} = 1.1$

试试小玲的题, 答案是 $\frac{1}{2002}$, 你做到了吗?

帮你归纳

上例中玲玲使用的是代数法, 即用字母代替一部分有规律的算式, 使计算简便。另外在分、小数四则混合运算中, 我们还可以利用运算定律(交换律、结合律、分配律)凑整, 使计算简便。在实际计算的时候, 要灵活使用, 以达到出神入化的效果。

大展身手

1. 计算: $\left(\frac{4}{7} \times \frac{1}{9} \times \frac{4}{11}\right) \div \left(\frac{2}{11} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{9}\right)$

2. 计算: $\left(11 - \frac{11}{36}\right) + \left(9 - \frac{11}{36} \times 5\right) + \left(1 - \frac{11}{36} \times 3\right) + \left(5 - \frac{11}{36} \times 9\right) + \left(7 - \frac{11}{36} \times 11\right) + \left(3 - \frac{11}{36} \times 7\right)$

3. 计算: $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$

4. 计算: $\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) \times \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) \times \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right)$

5. 计算: $\frac{636363 \times 636363}{848484 \times 848484}$

挑战自我

1. 计算: $\frac{1 \times 3 \times 24 + 2 \times 6 \times 48 + 3 \times 9 \times 72}{1 \times 2 \times 4 + 2 \times 4 \times 8 + 3 \times 6 \times 12}$

2. 计算: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$

7. 狼 和 羊

你会算吗

羊和狼在一起时, 狼要吃掉羊, 所以我们规定一种运算, 用 $\triangle$ 表示: 羊 $\triangle$ 羊 = 羊, 羊 $\triangle$ 狼 = 狼, 狼 $\triangle$ 羊 = 狼, 狼 $\triangle$ 狼 = 狼。以上运算的意思是: 羊与羊在一起还是羊, 狼与狼在一起还是狼, 但是狼与羊在一起便只剩下狼了。

善良的小朋友总是希望羊战胜狼, 所以我们规定另一种运算, 用符号 $\star$ 表示: 羊 $\star$ 羊 = 羊, 羊 $\star$ 狼 = 羊, 狼 $\star$ 羊 = 羊, 狼 $\star$ 狼 = 狼。这个运算的意思是羊与羊在一起还是羊, 狼与狼在一起还是狼, 但狼与羊在一起时, 它被羊赶走而只剩下羊了。

对羊或狼,可以用上面规定的运算作混合运算,混合运算的法规是从左到右,括号内先算,运算的结果或是羊,或是狼。求下式的结果:羊 $\triangle$ (狼 $\star$ 羊) $\star$ 羊 $\triangle$ (狼 $\triangle$ 狼)

[教你一招]

例1: 小明来到红毛族探险,看到下面几个红毛族的算式:

$$8 \times 8 = 8, 9 \times 9 \times 9 = 5, 9 \times 3 = 3, (93 + 8) \times 7 = 837.$$

老师告诉他,红毛族算术中所用的符号“+、-、 $\times$ 、 $\div$ 、()、=”与我们算术中的意义相同,进位也是十进制,只是每个数字虽然与我们写法相同,但代表的数却不同。那么按红毛族的算术规则, $89 \times 57 = (\quad)$ 。

分析: 由红毛族算式“ $9 \times 9 \times 9 = 5$ ”可知“9”是2,“5”是8。由“ $9 \times 3 = 3$ ”知“3”是0,继而可推得“8”是1,“7”是5。

解: 根据以上分析可知“ 89×57 ”是 $12 \times 85 = 1020$, 即“8393”。

例2: 对于任意整数 x 与 y 定义新运算“ $\triangle$ ”: $x \triangle y = \frac{6 \cdot x \cdot y}{mx + 2y}$ (其中 m 是一个确定的整数), 如果 $1 \triangle 2 = 2$, 则 $2 \triangle 9 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

分析: 已知 $1 \triangle 2 = 2$ 。根据定义得: $1 \triangle 2 = \frac{6 \times 1 \times 2}{m \times 1 + 2 \times 2} = 2$ 。解出 $m = 1$ 所以 $2 \triangle 9 = \frac{6 \times 2 \times 9}{1 \times 2 + 2 \times 9} = 4 \frac{10}{11}$

$$\text{解: } 2 \triangle 9 = 4 \frac{10}{11}$$

关于狼与羊的问题,你有答案了吗? 原式 = 羊 $\triangle$ 羊 $\star$ 羊 $\triangle$ 狼, 不管前面的结果如何,最后一步羊 $\triangle$ 狼或狼 $\triangle$ 狼总等于狼,所以原式 = 狼。

[前思后想]

我们知道,现在的四则混合运算法则是前人所定的,也就是说所有的法则只是一种约定。为了算术文化的统一,一般来说,我们都遵守这样的法则,但是偶尔,我们也可以自己制定新的法则来计算,当然这纯粹是一种智力游戏,训练你的应变能力。需要你潜心进入新的法则中去,细心地观察总结新的法则,才可以解决问题。

[大展身手]

1. $A * B$ 表示 A 的3倍减去 B 的 $\frac{1}{2}$ 。例如 $4 * 5 = 4 \times 3 - 5 \times \frac{1}{2} = 9 \frac{1}{2}$ 。

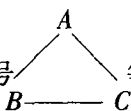
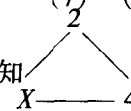
根据以上规定, $10 * 9 = (\quad)$ 。

2. 如果 $\frac{1}{2} * 3 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$, $\frac{1}{7} * 4 = \frac{1}{7} \times \frac{2}{8} \times \frac{3}{9} \times \frac{4}{10}$, 那么 $\frac{1}{2} * 4 + \frac{1}{3} * 3 = (\quad)$ 。

3. 规定:

$(3) = 2 \times 3 \times 4$, $(4) = 3 \times 4 \times 5$, $(5) = 4 \times 5 \times 6$, $\dots$, $(10) = 9 \times 10 \times 11$, $\dots$, 如果 $\frac{1}{(7)} - \frac{1}{(8)} = \frac{1}{(8)} \times$

★, 那么★表示的数是()。

4. 对整数 A 、 B 、 C 规定: 符号  等于 $A \times B + B \times C - C \div A$ 。已知  = 28, 那么 $X = (\quad)$ 。

5. 对于任意自然数 x, y , 定义运算 $\star$ 如下:

若 x, y 同奇同偶, 则 $x \star y = (x + y) \div 2$;

若 x, y 奇偶性不同, 则 $x \star y = (x + y + 1) \div 2$ 。

$1 \star 3 \star 5 \star 7 \star 9 = (\quad)$ 。

❧[挑战自我]

1. 对于任意的两个自然数 a 和 b , 规定一种新运算“ $*$ ”:

$a * b = a(a+1)(a+2)\cdots(a+b-1)$, 如果 $(x * 3) * 2 = 3660$, 那么 $x = (\quad)$ 。

2. 设 a, b 为任意两个自然数, 定义新运算 $a * b = a + b - \frac{a \times b}{1999}$, 那么,

$\underbrace{2000 * 2000 * \cdots * 2000}_{2000 \text{ 个 } 2000} * (2 \times 1999) * \underbrace{(2000 \times 1999) * \cdots * (2000 \times 1999)}_{1999 \text{ 个 } (2000 \times 1999)}$ 的值是 $(\quad)$ 。

8. 举重冠军

❧[你会算吗]

一天, 森林里举行举重比赛, 两只小象分别举起重量为 $\frac{19}{20}$ 、 $\frac{17}{18}$ 吨的木材, 裁判牛爷爷可要好好想一想, 该把冠军的奖牌该发给谁呢?

同学们, 如果你是裁判, 该怎样确定名次呢?

❧[教你一招]

例: 将分数 $\frac{73}{84}$ 、 $\frac{46}{57}$ 、 $\frac{89}{100}$ 、 $\frac{25}{36}$ 、 $\frac{51}{62}$ 按从小到大的顺序

排列起来。

分析: 把这些分数的分母通分后相比有些困难, 不如先比它们的倒数。

解: 设 $A = \frac{73}{84}$, $B = \frac{46}{57}$, $C = \frac{89}{100}$, $D = \frac{25}{36}$, $E = \frac{51}{62}$ 。

则 $\frac{1}{A} = \frac{84}{73} = 1\frac{11}{73}$, $\frac{1}{B} = \frac{57}{46} = 1\frac{11}{46}$, $\frac{1}{C} = \frac{100}{89} = 1\frac{11}{89}$, $\frac{1}{D} = \frac{36}{25} = 1\frac{11}{25}$, $\frac{1}{E} = \frac{62}{51} = 1\frac{11}{51}$

这五个分数中整数部分都是 1, 分数部分的分子相同, 则分母大的分数值较小, 所以 $\frac{1}{C} < \frac{1}{A} < \frac{1}{E} < \frac{1}{B} < \frac{1}{D}$, 从而 $C > A > E > B > D$, 因此, 3 号得第一名, 1 号得第二名, 5 号得第三名, 2 号得第四名, 4 号得第五名。

❧[归纳整理]

分数大小比较, 除了常用的通分母以外, 还有这样一些方法:

(1) 通分子, 即把分子化成相同再比较。如 $\frac{3}{59}$ 与 $\frac{4}{61}$, 分母的最小公倍数是四位数, 而分子的最小公倍数是 12, $\frac{3}{59} = \frac{3 \times 4}{61 \times 4} = \frac{12}{236}$, $\frac{4}{61} = \frac{4 \times 3}{59 \times 3} = \frac{12}{183}$ 。因为 $\frac{12}{236} < \frac{12}{183}$, 所以 $\frac{3}{59} < \frac{4}{61}$ 。

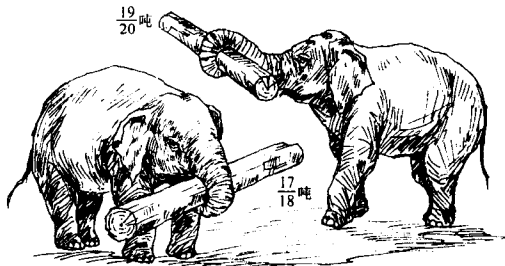
(2) 借助常数比较。如 $\frac{19}{20}$ 与 $\frac{38}{39}$ 。 $\frac{19}{20} = 1 - \frac{1}{20}$, $\frac{38}{39} = 1 - \frac{1}{39}$, 因为 $\frac{1}{20} > \frac{1}{39}$, 所以 $\frac{19}{20} < \frac{38}{39}$ 。

(3) 对于一些结构相似的分数大小, 可以先约分, 再比较。如 $\frac{8989}{9898}$ 与 $\frac{898989}{989898}$, 约分后两个分数都等于 $\frac{89}{98}$, 所以两个分数是相等的。

(4) 根据倒数比大小。

(5) 把分数化成小数。

现在你一定能用多种方法判定谁是冠军了吧!



[大展身手]

1. 比较 $\frac{556}{558}$ 与 $\frac{665}{667}$ 的大小。
2. 试比较 $\frac{111}{1111}$ 与 $\frac{1111}{11111}$ 哪个分数大?
3. 这里有五个分数: $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{5}{8}$ 、 $\frac{15}{23}$ 、 $\frac{10}{17}$ 、 $\frac{12}{19}$, 如果按从小到大的顺序排列, 排在中间的是哪个数?
4. 把 $\frac{579}{580}$ 、 $\frac{42}{43}$ 、 $\frac{1427}{1428}$ 三个分数按照从小到大的顺序排列起来。
5. 分数 $\frac{121121}{242242}$ 与 $\frac{343343}{686686}$ 相比, 哪个较大些?

[挑战自我]

1. 把 $\frac{42}{43}$ 、 $\frac{85}{87}$ 、 $\frac{125}{128}$ 这三个分数按照从小到大的顺序排列。
2. $A = \frac{221}{223}$, $B = \frac{331}{334}$, 那么 A 和 B 中较大的数是()。

综合练习二

1. 将下列分数按照从小到大的顺序排列, 并简述你的方法。
 $\frac{10}{21}$ 、 $\frac{30}{61}$ 、 $\frac{20}{41}$ 、 $\frac{50}{101}$ 、 $\frac{40}{81}$
2. $\frac{86}{87}$ () $\frac{97}{98}$ (在括号里填上大于、小于或等于号)
3. 计算: $0.625 \times \left(1\frac{2}{3} + 3\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} \div 1\frac{3}{5} - \frac{5}{8}$
4. 计算: $2.4 \div 1\frac{24}{31} \times 4.125 - \left(18\frac{5}{37} - 13.42\right)$
5. 计算: $\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63}\right) \times 2\frac{1}{7}$
6. 计算: $146 \times \frac{144}{145} + 144 \times 1\frac{1}{145}$
7. 计算: $\left(2 + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) \times \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) - \left(2 + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) \times \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right)$
8. Q 、 P 表示两个数, $P * Q$ 表示 $\frac{P+Q}{3}$, 求 $3 * (6 * 8)$ 。
9. 如果 $\langle \frac{4}{5} \rangle = 4$; $\langle \frac{2}{6} \rangle = \langle \frac{1}{3} \rangle = 1$; $\langle 1\frac{1}{2} - \frac{5}{7} \rangle = \langle \frac{11}{14} \rangle = 11$; 那么 $\langle \frac{1}{3} \times \frac{24}{\square} \rangle = 8$, $\square$ 中最小填多少?
10. 已知树叶面积的计算公式 $S = \frac{l \times m}{1.2}$, 其中 l 是叶子的最大长度, m 是叶子的最大宽度, 你能不能利用这道计算公式, 想办法算出你家附近的一棵树的树叶面积?

9. 分数“叠罗汉”

[你会算吗]

历法对闰年有两条规定: 公历年份能被 4 整除的年是闰年; 逢公历年份的整百年, 能被 400 整除才是闰年。但是数学家们对设闰的办法却另有高见, 他们认为 4 年加一闰是初步最佳方案; 29