

序 言

这是一本关于计算流体力学与计算传热学的入门教材。作者在编写时遵循了如下基本设想：通过本书的学习应使没有接触过这一领域的学生对流动与传热问题的数值计算方法有一基本的概念，同时也要能动手计算一些具有一定实际意义的习题。为此，作了如下的选择：1.在数值方法方面，着重介绍为初学者所易接受并且发展较成熟的有限差分法，对其它方法(有限元法等)则仅作概要介绍；2.在物理问题方面，只介绍导热、不可压缩流体的流动与换热问题，以削枝强干，突出重点；3.关于不可压缩流体流场的计算方法，着重介绍容易实施的涡量一流函数法，对原始变量法则仅作原则性的说明；4.在习题编排方面，除了设置足够数量的要求读者自己编写程序的习题外，也包括了要求读者利用本书所附的两个具有一定通用性的程序来计算的习题。编写这两个程序时，参考了目前国内外比较通行的程序。

考虑到本课程在我国高等工科学校中开设不久，各校情况有所差别，学时数也不尽相同，本书编写时采用了由浅入深并可以相对独立地分块的方法。本书的九章内容大致可以作以下几种处理：

第一种方式 讲授第一章~第四章，即导热与管道内充分发展层流换热，介绍一维导热通用程序，约需20学时；

第二种方式 讲授第一章~第五章，除第一种方式的内容外增加抛物型问题的相似解，介绍外掠楔形物体的相似解通用程序，约需26学时；

第三种方式 讲授第一章~第六章、第八章，除第二种方式的内容外，增加求解有回流的涡量一流函数法，介绍二维通用程序，约需35学时；

第四种方式 全部讲授，约需45学时。

在本书的编写过程中得到了不少同志的帮助。本书由湖南大学环境工程系陈在康教授主审，他从内容到文字都提出了许多修改意见，使书稿的质量有了明显的改进；西安交通大学空调教研室主任王宜义教授仔细地审阅了书稿的编写大纲并提出了不少建设性的意见；作者的同事与学生康海军、辛荣昌及李沛文或者校阅了部分原稿，或者协助作者调试程序、提供部分例题的数学答案。在此作者向他们一并表示谢意。作者还要感谢建工出版社副总编吴文侯编审，他作了极为仔细认真的工作，为本书质量的提高及按时出版付出了辛勤的劳动。

由于计算流体力学与计算传热学赖以发展的基础——电子计算机的发展十分迅速，使得本课程的内容也在不断地发展与更新。二十年前国外一篇学位论文的计算内容，今天也许已作为本科生教学中的一个例题。因而在本课程的教学过程中要处理好基本内容相对稳定与适当反映新的成就这两者间的关系。而教材一经写成出版，基本内容也就暂时“固化”了，新的内容的介绍主要依靠授课的教师来完成。加之作者的学识与经验的不足，在已“固化”的内容中，也会有不少欠妥或值得改进之处。恳切希望使用本书的同志提出宝贵的建议与批评。

陶文铨 1991年2月于西安

目 录

序言

绪论	1
第一章 数学与物理基础	3
1-1 物理问题数值求解的基本步骤	3
1-2 流动与传热控制方程的类型	5
1-3 建立离散方程的方法	8
1-4 差分方程的数学特性分析	11
1-5 差分方程物理特性的分析	14
习题	15
第二章 一维导热问题	18
2-1 一维稳态导热	18
2-2 边界条件与源项的处理	20
2-3 一维非稳态导热	23
2-4 代数方程求解方法	25
2-5 一维导热问题数值计算举例	28
2-6 边界条件随时间变化的非稳态导热	31
2-7 一维非稳态导热通用程序介绍	34
习题	46
第三章 多维导热问题	49
3-1 多维非稳态导热全隐格式的通用离散方程	49
3-2 处理边界条件的附加源项法	51
3-3 多维问题代数方程的求解方法	53
3-4 不规则区域的处理方法	56
3-5 多维导热计算例题	60
习题	63
第四章 势流及管道内充分发展的流动	66
4-1 势流的数值计算	66
4-2 二维通道内横掠圆柱体的势流	68
4-3 受限射流的势流模型	70
4-4 长方形截面通道内的充分发展层流流动	71
习题	74
第五章 边界层类型的流动与换热	75
5-1 边界层类型问题概述	75
5-2 外掠平板边界层流动与换热的相似解方程	76
5-3 相似解方程的数值解法	78

5-4	充分发展对流换热概述	84
5-5	圆管内层流充分发展对流换热	86
5-6	长方形截面通道内的充分发展对流换热	89
5-7	顺流式套管换热器中对流换热的数值分析	92
5-8	一般边界层类型问题的数值计算	99
	习题	101
第六章	有回流的流动与换热	103
6-1	对流-扩散方程的离散格式	103
6-2	涡量-流函数法的控制方程	109
6-3	通用控制方程的离散	112
6-4	涡量-流函数法边界条件的离散	114
6-5	涡量-流函数法代数方程的求解	117
6-6	原始变量法简介	122
	习题	125
第七章	紊流的数值计算	127
7-1	紊流计算概述	127
7-2	紊流对流换热的控制方程	129
7-3	零方程模型与一方程模型	131
7-4	$K-\epsilon$ 二方程模型	134
7-5	壁面函数法及紊流模型近代发展简介	136
7-6	紊流数值计算举例	139
	习题	147
第八章	涡量-流函数法通用程序介绍	149
8-1	离散方程及本程序所采用的一些算法	149
8-2	程序的结构与各块的主要功能	150
8-3	网格系统及程序编写中的一些技巧	152
8-4	主要变量清单及源程序	154
8-5	程序使用方法及应用举例	169
	习题	180
第九章	求解流动和传热问题的其它数值方法	183
9-1	有限元法的基本思想与区域离散化	183
9-2	有限元法中代数方程的建立	187
9-3	二维稳态导热问题的有限元法	194
9-4	二维边值问题有限元法求解举例	200
9-5	边界元法的基本思想及离散化	202
9-6	边界元法代数方程的形成	206
9-7	有限分析法介绍	210
	习题	213
	参考文献	216
附录一	Gauss二次型数值积分系数表	217
附录二	Gauss对数积分系数表	218
附录三	主题索引	219

绪 论

计算流体力学与计算传热学是研究使用数值计算方法、借助于电子计算机求解流动与传热问题的一门科学,它们分别是流体力学与传热学的一个分支学科。由于传热问题数值求解中的核心部分——对流换热的计算与流体的流动有不可分割的联系,同时某些流动问题的数值求解方法又与导热问题相类似,因而作为一本入门教材,本书中把两个学科的有关内容联合起来进行分析讨论。

众所周知,描写流体流动与对流换热的微分方程组是复杂的非线性偏微分方程。只有对一些简单的情形才能获得这些偏微分方程的精确解。从纯数学的角度,这一偏微分方程组解的存在性与唯一性还没有在普遍的意义得到证明。对于多数工程上的流动与传热、传质问题,必须采用实验测定或数值求解的方法。

用电子计算机对流动与传热问题进行数值计算就象在实验室中对该现象进行实验测定一样,可以称之为“数值实验”。随着高速、大容量的电子计算机的发展,这种“数值实验”的方法很快地发展成为解决实际问题的一种重要工具。与实验研究及理论分析方法相比,“数值实验”的方法有着其独特的优点与适用范围。例如数值计算可以完全控制流体的物理性质,为了研究某一物性(例如流体的粘性)的变化对流动的影响,可以保持其它条件不变而仅改变这一物性进行计算;数值计算可以实现纯二维的流动与换热,等等。这一些都是实验研究与理论分析所无法实现的或难以实现的。

虽然在某些研究领域,目前数值计算几乎已取代了实验研究(例如在天体力学中计算机完成着所有的轨道计算而不需要实验的帮助),在流体力学与传热学的领域中,实验研究、理论分析与数值计算这三种研究手段则是相辅相成、互为补充的。分析解可以为检验数值计算结果的准确度提供比较依据。在计算流体力学与计算传热学的发展过程中,每当提出一种新的计算格式时,常常使用这种格式计算一个有分析解的问题,通过与分析解的比较而对该格式的优劣作出评价。此外,简单情形下分析解的结果可以为发展新的数值计算方法提供基础。实验研究无疑地仍是研究流动与传热问题的最基本的方法。数值计算中所采用的数学模型只有通过现象的必要观察与测定才能正确地建立,出现在描写流动与传热现象的微分方程中的物理参数只有通过实验测定才能获得。对任何一个物理问题进行数值计算所得结果的准确度,首先取决于对所研究问题建立的数学模型及所取用的物理参数是否准确。计算机并不能发现规律、创造信息,它只能把人们所送入的信息按照计算者所选定的规律进行处理、加工而已。但一旦建立了与实际物理问题相符合的物理模型,数值计算又可以发挥很大的作用,除了前面所提到的进行某些理想工况的研究以外,它可以拓宽实验研究的范围,减少实验工作量。对那些耗资巨大或条件恶劣的实验来说,“数值实验”更是一种有吸引力的辅助或替代手段。总之,科学技术发展到今天,把实验测定、理论分析与数值计算这三种研究手段有机而协调地结合起来,是研究流动与传热问题的理想而有效的方法。

作为一本入门教材，本书将着重介绍原理简便、易于实施、应用广泛的有限差分法（包括有限容积法）。对于所涉及到的流体力学、传热学、计算方法与算法语言方面的知识，本书大多直接引用其结果，个别部分将结合教材内容作概要的介绍。对于工科学生来说，在学习计算传热学与计算流体力学时，结果只了解其原理、方法而不作上机计算的练习，就好象学游泳只读书本而不下水一样。本书每章习题中尽可能收入一些用计算机求解的问题（带*号的习题），目的就在于促使读者注意这方面的实践。另一方面，在课程学习期间，要求学生能编写出结构较合理、具有一定通用性的程序也是不切合实际的。本书中编入了两个具有一定通用性的程序，就是为读者实施数值计算方法、提高编程能力作参考的。读者在学习各种数值处理方法时，除了要弄清数学的内容外，还要着重从物理概念方面加以钻研，以充分利用自己对物理过程的认识来加深对数值处理的理解。

在全书的九章中前八章均介绍有限差分法的内容。按由浅入深的原则，先讨论扩散方程的数值求解，然后介绍粘性流体流场的计算方法，着重是涡量-流函数法。最后一章中简要地介绍了有限元法、边界元法及有限分析法的基本思想与实施步骤（重点又在有限元法），旨在扩大读者的眼界，以便对流体力学、传热学的数值计算方法有一个较全面的了解。最后，本书在附录中给出了一个以汉语拼音字母顺序排列的主题索引，以便为读者迅速查阅到所需名词的含义及相应的英语词汇提供方便。

第一章 数学与物理基础

本章是全书的数学与物理基础部分，着重讨论四个问题。首先介绍对物理问题进行数值计算的基本思想与步骤，使读者对数值解法有一个总体的了解。接着讨论描写流动与传热现象的控制方程的类型及其对数值计算的影响。在此基础上，介绍建立有限差分离散方程的方法，重点是控制容积积分法。最后分析离散方程的数学特性（相容性、收敛性与稳定性）及主要的物理特性（守恒性与对流项的迁移性）。

1-1 物理问题数值求解的基本步骤

绪论中业已指出，描写流动与换热问题的偏微分方程组只有对一些简单的情形才有精确解。对于大多数工程实际问题，只能采用实验研究或近似解法。

数值解法是一种有效的近似解法。这种方法所得出的是求解区域中某些代表性地点上未知量的近似值，而不是象分析解那样的未知量的连续函数。“数值解法”一词即由此而得。流动与换热问题的数值求解过程大致包括六个步骤。现以空调房间中的气流流场计算问题为例说明如下。

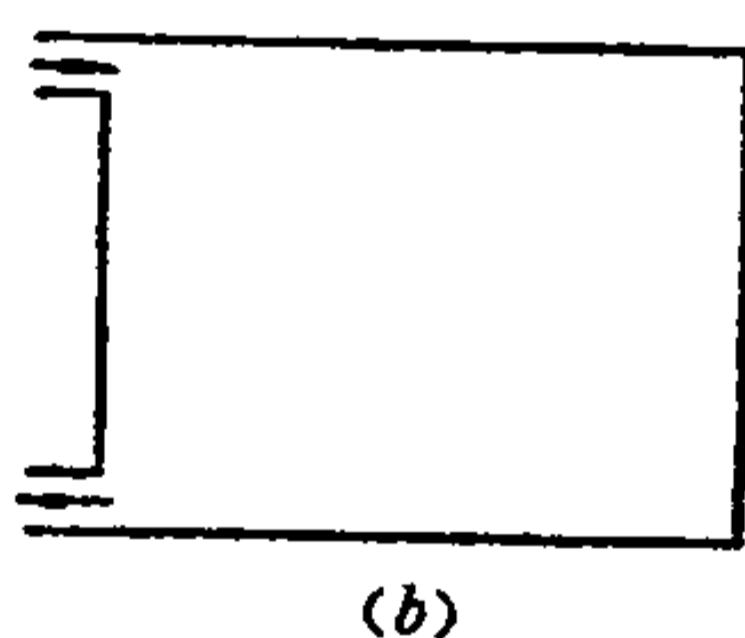
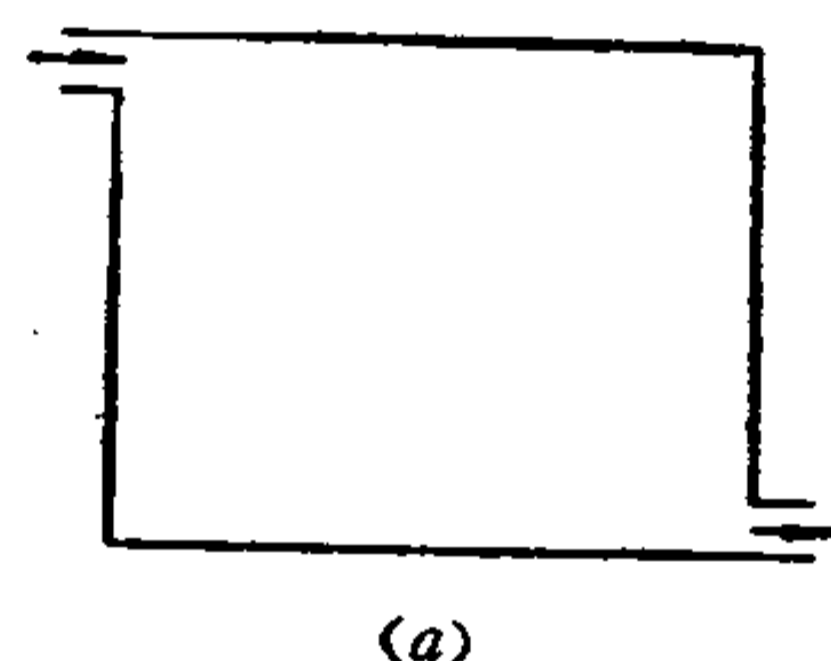


图 1-1 两种气流组织方式

1. 对实际问题作必要的简化、建立起相应的物理模型。对于图1-1所示两种气流的组织方式，欲用数值方法来查明其中的流动情况时，可作以下简化处理：

- < 1 > 流动与换热已处于稳定状态；
- < 2 > 气体的物性为常数；
- < 3 > 在垂直于纸面方向上速度与温度的变化可略而不计（即简化成二维问题）；
- < 4 > 四面墙壁各自具有均匀的温度；

< 5 > 进风口的流速较低，流动是层流。

通过这些假设，就把这一实际问题简化成为一个二维、稳态、常物性、无内热源的层流流动与换热问题，这就是所研究问题的物理模型。

2. 对所研究的物理模型建立起相应的数学描述，即给出流动与换热的控制方程式及其边界条件。有关控制方程问题将在下节中讨论。

3. 在所计算的区域中选定需要计算速度与温度的地点（称为节点），这一步骤称为区域离散化。关于区域离散化方法本节下面还要讨论。对图1-1a所示情形，可以采用的一种节点布置方式示于图1-2中。

4. 按一定的原则，建立每个节点上未知量与其邻点上未知量间的代数关系式（称为离散方程）。例如由气流的能量方程式可得出规定每一节点的温度与其邻点温度间的关系

式。这一过程称为控制方程的离散化。

5. 求解所形成的代数方程组。对于四壁温度为已知的情形，图1-2所示的网格系统共有 $(L_1 - 2) \times (M_1 - 2)$ 个关于温度的代数方程需要联立求解。

6. 对所获得的数值结果进行分析、比较与讨论。

上述步骤示于图1-3中。物理问题数值求解的基本思想与步骤可用文字简述如下：把在时间与空间区域中连续变化的物理量的场用有限个离散点（称为节点）上的近似值的集合来代替；按一定原则建立起关于这些值的代数方程；求解所建立的代数方程组以获得物理问题的近似解。

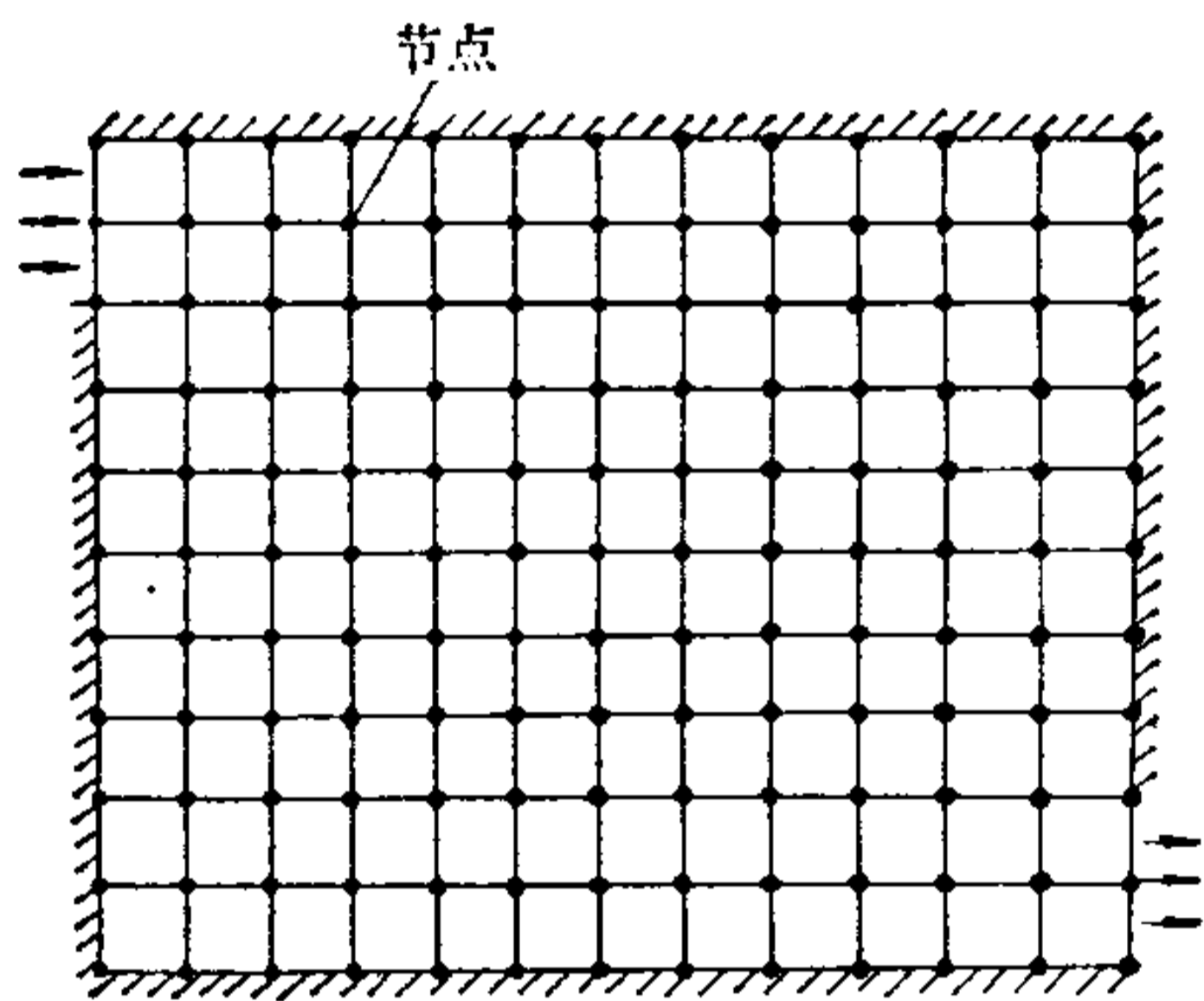


图 1-2 图1-1情形的区域离散

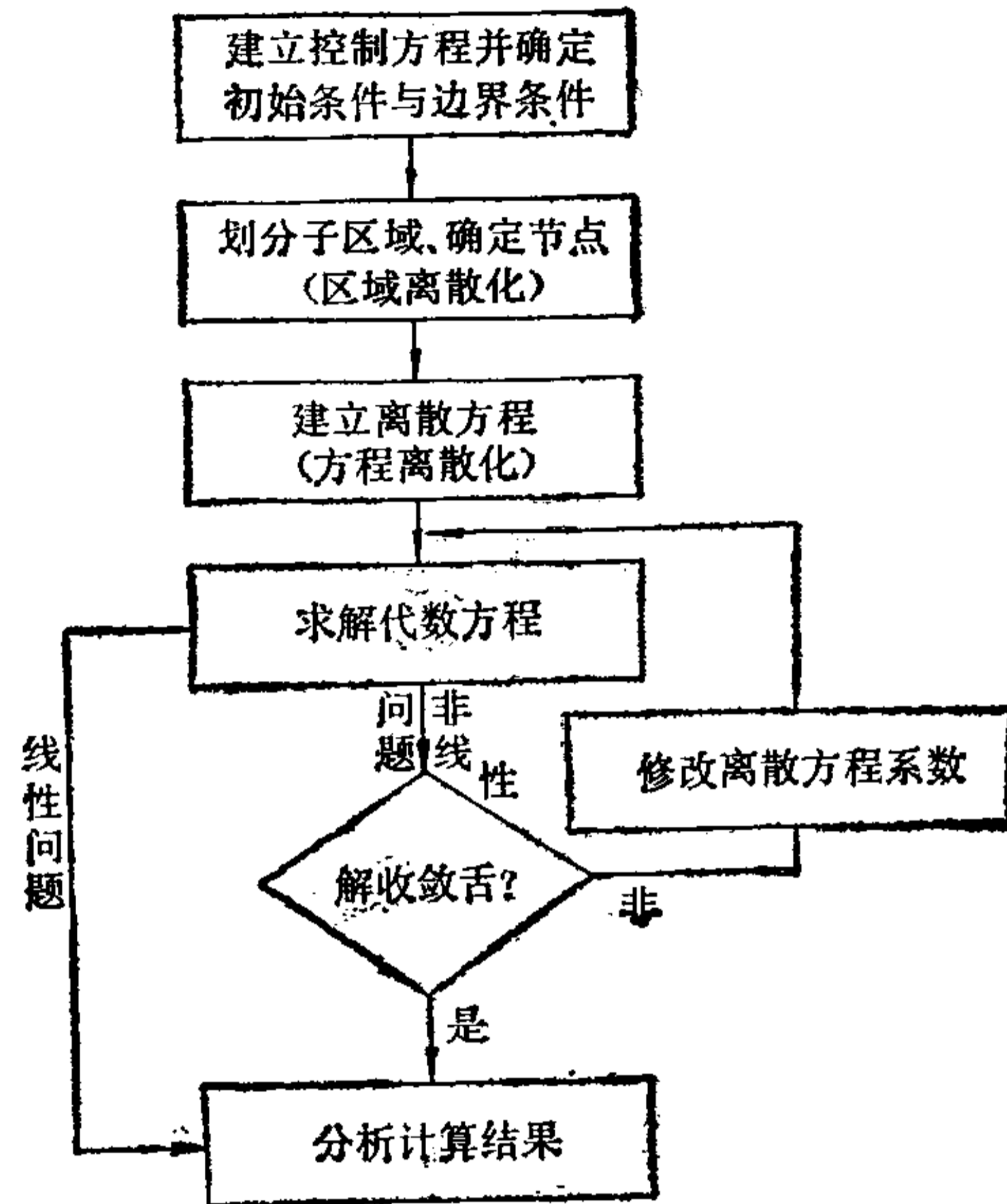


图 1-3 物理问题数值计算的步骤

在以上所述的六个步骤中，第一、第二步是流体力学及传热学的学习内容。本书中着重讨论第三、四、五这三个步骤。目前在流体力学与传热学的数值计算中广泛应用的数值方法为有限差分法与有限元法。这两种方法的主要区别也就表现在三、四、五这三个步骤上。本书中主要介绍发展比较成熟、比较容易实施的有限差分法。在这一节中先讨论有限差分法中常用的区域离散化方法。

所谓区域离散化就是指用一系列与坐标轴平行的曲线簇把计算区域划分成很多个子区域、并从每个子区域中选定节点的过程。每一个节点可以看成是一个相应的微小容积（称为控制容积）的代表。控制容积的边界称为界面。依据节点在子区域中位置的不同，可分为外节点法与内节点法两种。

1. 外节点法 节点位于子区域的顶点。如图1-4a所示，用一系列与计算区域的边界相平行的直线簇把计算区域分成了许多个子区域，直线簇的交点，即子区域的顶点就选作为节点。为了确定每一个节点所代表的控制容积，可在相邻两节点的中间位置上作界面线（图中用虚线表示），由这些界面线围成各节点的控制容积。这种方法先确定节点位置、再确定界面位置，又称方法A⁽¹⁾。

2. 内节点法 节点位于子区域的中心。在这种方法中，每个子区域就是一个控制容积，划分子区域的曲线簇就是界面线（图1-4(b)中用虚线表示），每个控制容积的中心选作为节点。因而这种方法先定界面位置再定节点位置，又称为方法B。

对这两种区域离散化方法要指出两点区别:

1. 方法A中边界节点代表了半个控制容积(见图1-5a), 而方法B中应看成是厚度为零的控制容积的代表(图1-5b)中打阴影线的部分是内节点P的控制容积);

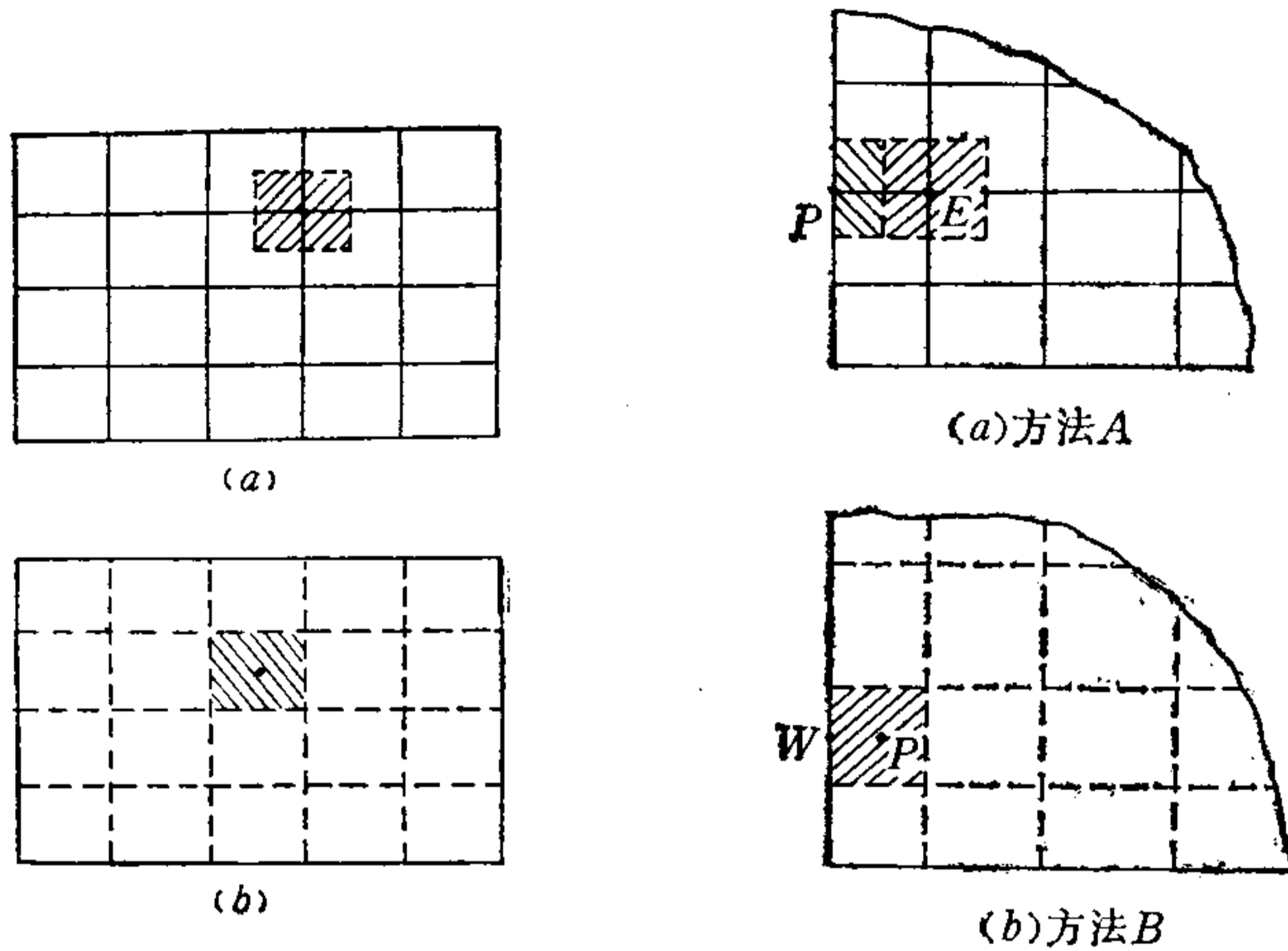


图 1-4 两种区域离散化方法

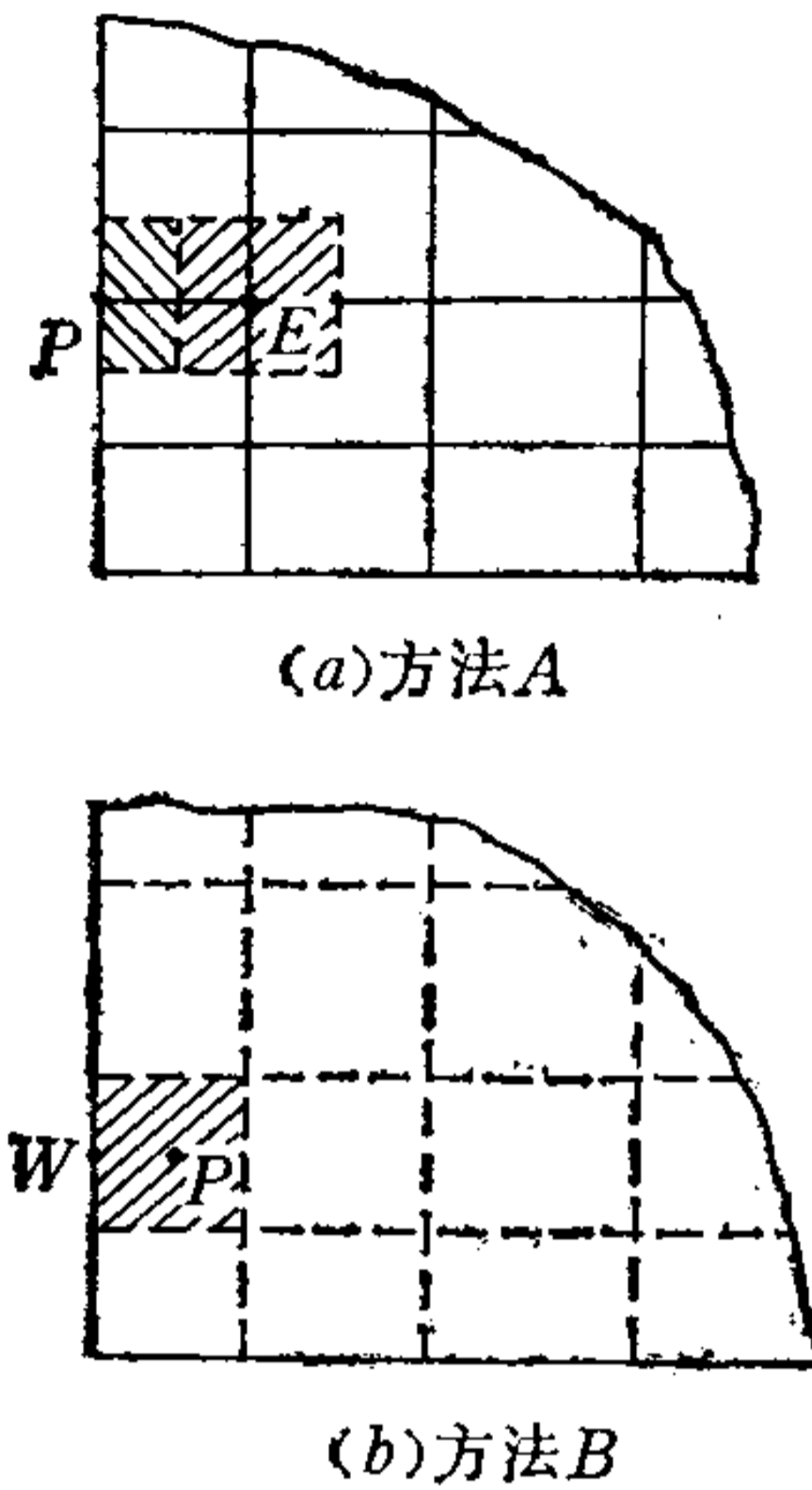


图 1-5 两种区域离散方法的边界节点

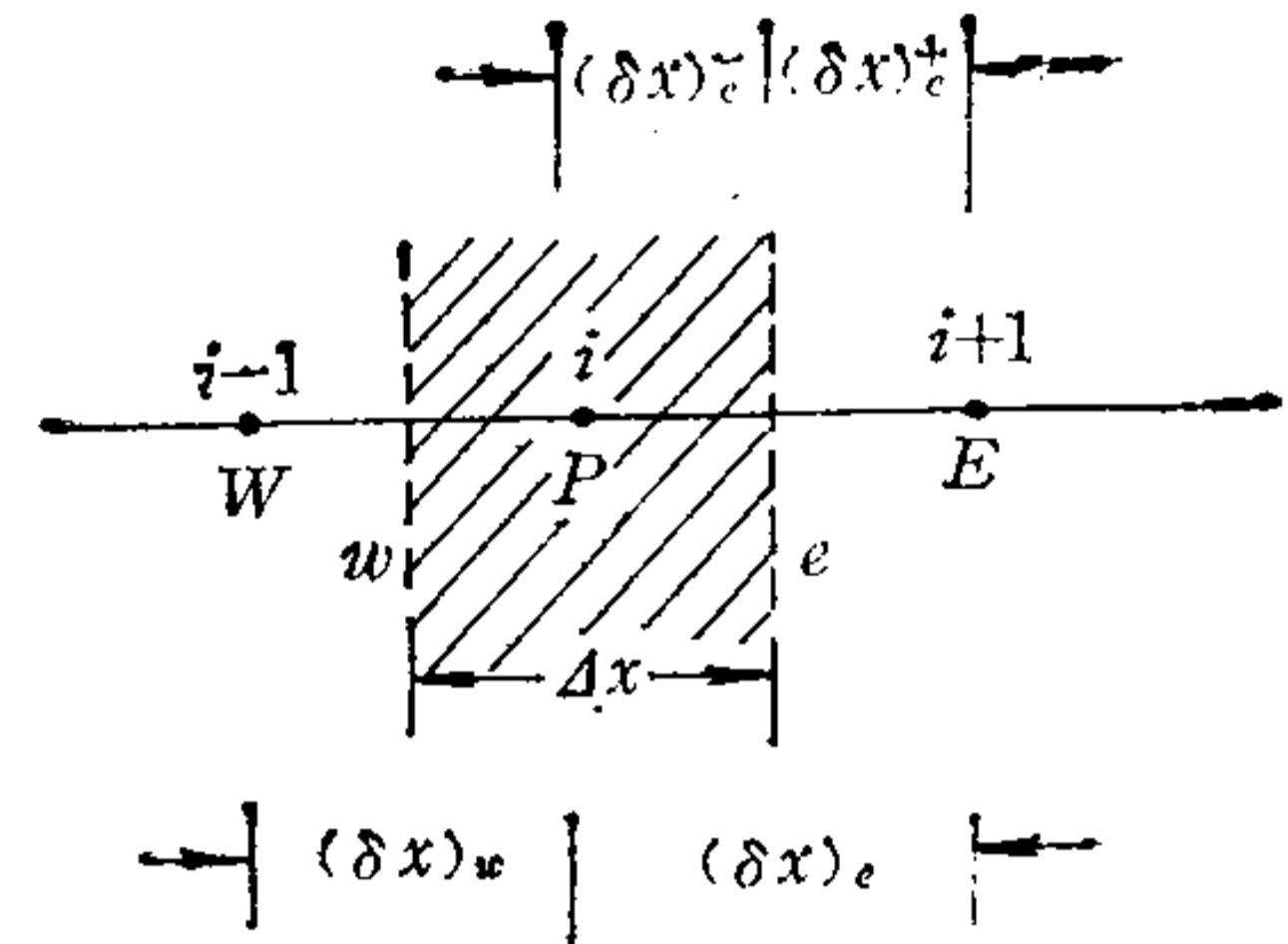


图 1-6 网格系统标记方法

2. 当网格划分不均匀时, 方法A中界面永远位于相邻两节点之间, 而方法B中节点总是在控制容积的中心。如果把节点看作是控制容积的代表, 则方法B比较合理。

当求解区域中物体的物性参数发生阶跃式变化时, 采用方法B可以较容易地把发生阶跃变化的面作为控制容积的界面, 便于进行数值计算, 而采用方法A时要实现这一点则要复杂得多。本书中以后所讨论的内容除非特别说明, 对两种区域离散化方法均适用。

最后, 为以后讨论的方便, 对网格系统的标记方法作如下约定: 控制容积的界面线用虚线, 而网格线(即沿坐标轴方向联结相邻节点的曲线簇)则用实线; x 、 y 方向的节点标号分别用 i 、 j 表示, 同时还采用 P 表示所讨论的节点, 用 N 、 E 、 W 、 S 表示其相邻的四个节点; 节点 (i, j) 的控制容积的四个界面的位置分别用 $i + \frac{1}{2}$, $i - \frac{1}{2}$, $j + \frac{1}{2}$ 及 $j - \frac{1}{2}$ 表示, 也可用小写字母 e , w , n 及 s 来表示; 相邻两节点及相邻两界面间的距离分别用 δx 、 δy 及 Δx 、 Δy 来表示。按这种标记方式所画成的一维区域示于图1-6中。

1-2 流动与传热控制方程的类型

本节中讨论控制方程的类型及其对数值解的影响。

我们知道, 全部流体力学的问题都是由连续性方程、Navier-Stokes(纳维埃-斯托克斯)方程所规定着的。对于对流换热问题, 还应补充以能量方程。本书的研究范围主要限于二维、不可压缩流体的常物性的流动。此时, 对流换热的控制方程为:

$$\text{连续性方程} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1-1)$$

$$\text{Navier-Stokes方程} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1-2a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1-2b)$$

$$\text{能量方程} \quad \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + S \quad (1-3)$$

其中: u, v 为 x, y 方向的速度分量, p 为压力, ρ, ν, a 分别为流体的密度、运动粘性系数及热扩散率, T 与 t 分别为温度及时间, S 为能量方程的源项。

利用连续性方程, 可把式(1-2)、(1-3)中的对流项加以改写, 得:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1-4a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1-4b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + S \quad (1-5)$$

对于稳态问题式(1-4a)、(1-4b)、(1-5)化为:

$$\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1-6a)$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1-6b)$$

$$\frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + S \quad (1-6c)$$

由流体力学及传热学我们知道, 上述方程都是对微分容积应用守恒定律而得出的, 因而无限小的容积中物理量守恒的数学描写。在数值计算中, 我们采用的最小空间单位——控制容积仍是有限大小的几何空间。因而我们自然要问, 对于有限大小的任一容积, 这些方程是否还能满足守恒性。凡对任意大小的有限容积能使守恒性得到满足的控制方程称为守恒型的方程, 否则就是非守恒型的方程。可以证明, 在直角坐标系统中, 当对流项写成散度形式时, 该方程就是守恒型的。据此, 式(1-6a)、(1-6b)、(1-6c)是守恒型的, 而式(1-2a)、(1-2b)、(1-3)则为非守恒型的。现以式(1-5)为例证明之。为此, 将对流项写成散度的矢量表达式, 因为:

$$\frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} = \text{div}(\vec{u}T) = \nabla \cdot (\vec{u}T)$$

式中 \vec{u} 为速度矢量。于是式(1-5)可改成为:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\rho c_p \nabla \cdot (\vec{u}T) + k \nabla \cdot \nabla T + \rho c_p S$$

这里 c_p 与 k 分别为流体的等压比热及导热系数。将上式对任一封闭区域 R 作积分, 并应用 Gauss (高斯) 降维定律, 可得:

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} \int_R T dR = -\rho c_p \int_{\partial R} (\vec{u}T) \cdot \vec{n} ds + k \int_{\partial R} (\nabla T) \cdot \vec{n} ds + \rho c_p \int_R S dR$$

① ② ③ ④

上式中 \vec{n} 是边界 ∂R 的外法线, ds 是边界上的微分弧长。其中第 1 项是单位时间内物体内

能的增量,第2项是流入、流出计算区域的流体所净带入的能量,第3项是边界上因导热而进入计算区域的热量,第4项则为内热源的生成热。因而上式就是区域 R 中能量守恒的表达式。如果对流项不写成散度形式,则得不出上述结果。

讨论控制方程守恒性的目的在于希望据该方程而导出的离散方程也具有守恒性。凡是从守恒型的控制方程导出的离散方程可以保证具有守恒性,而非守恒型的控制方程导出的差分方程则得不到这种保证。

从数学的角度,可以把偏微分方程区分为抛物型、椭圆型与双曲型三种。对不可压缩流体不会出现双曲型方程。式(1-2)~(1-5)均属于抛物型,其特点是方程中含有因变量对时间的一阶导数,它们描写了物理上的非稳态问题。对这一类物理问题,经验告诉我们,只有上一时刻的情况或条件会影响到下一时刻的结果而不会反过来。在数值求解时,不必将时间坐标上求解范围内各个计算时刻上的离散方程联立起来求解,而是从已知的(或已求解出的)某一时层上的值出发,根据边界条件,将解一步一步地向前推进。抛物型方程的这一特点可以大大节省所需的计算机内存与计算时间。

式(1-6a)、(1-6b)、(1-6c)属于椭圆型方程,它们描写了稳态的物理问题。对这类问题,求解区域内各点之值是互相影响的。在物理现象上,这类方程描写了有回流的流动(如图1-1a所示情形中的流动)。此时求解区域内各节点的离散方程必须联立求解,而不能先把其中一个小区域中的值解出来再去求其它部分之值。例如对图1-2所规定的情形,所形成的 $(L1-2) \times (M1-2)$ 个温度方程必须联立求解。

采用单向坐标与双向坐标的概念可以形象地描写抛物型与椭圆型方程在物理作用上的区别。如果在一个坐标轴上,影响或扰动仅能向一个方向传递,称此坐标为单向坐标。这里,“向一个方向传递”指的是:对该坐标轴上任一点而言,该点上的因变量之值仅受到该点一侧条件的影响,而该点之值也仅对另一侧上各点之值发生影响。时间就是这样一个单向坐标。所以“抛物型”这一名称表示了一种单向作用的概念。在双向坐标上,影响或扰动可以朝两个方向传递,即该坐标上任一点因变量之值既会受到来自两侧的制约,又对其两侧上的点有影响。因而椭圆型这一术语包含了“双向作用”的意义。空间坐标一般为双向坐标,但在一定条件下,空间坐标也会变成单向坐标,请读者思考之。

在流体力学与传热中相应于抛物型与椭圆型方程所描写的问题还有其专门的名称。如果所研究的问题中有一个空间坐标是单向坐标,称为边界层型的问题;如果所有的空间坐标都是双向的,则称为有回流的问题。抛物型与椭圆型是从数学的角度来命名,单向坐标与双向坐标是从扰动或影响的传递方向来分类,而边界层型与回流型则是在物理现象上的称谓。

由以上叙述可见,不同类型的方程所描写的问题数值求解的方法是不一样的。在进行流动与传热问题的计算之前,首先应查明所研究问题控制方程的类型。

在着手讨论建立离散方程的方法之前,还要引入所谓的一维模型方程。分析式(1-2)~(1-6)可以看出,每个方程都不外乎由下列四项组成:非稳态项、对流项、扩散项与源项(Navier-Stokes方程中的压力梯度暂且作为源项看待)。于是在研究建立离散方程的方法时,为避免复杂化,可不必着眼于完全的方程,而是把同一类型的项都取出一个来研究,这就导致一维非稳态的对流-扩散模型方程:

$$\text{非守恒型} \quad \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + S \quad (1-7a)$$

$$\text{守恒型} \quad \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + S \quad (1-7b)$$

其中 ϕ 为广义变量, 可以代表速度、温度、浓度等; Γ 为相应于 ϕ 的广义扩散系数; S 为广义的源项, 它代表了一切不能归入到其它项中的量, 未必是物理上的真正源项。模型方程既代表了抛物型问题(t 为单向坐标), 又具有椭圆型方程的一些特点(x 为双向坐标)。关于控制方程各种离散方法的介绍将针对式(1-7)进行。为简便起见, 在下节的讨论中假定 ρ 、 u 及 Γ 均为已知的常数。

1-3 建立离散方程的方法

建立有限差分离散方程的常用方法有四种, 其中应用较广的有两种, 即Taylor(泰勒)展开法与控制容积积分法。本节中只介绍这两种方法, 其它方法可参阅文献[2, 3]。

一、Taylor展开法

所谓Taylor展开法是指把控制方程中的各阶导数用相应的差分表达式来代替而形成离散方程的方法。由于各阶导数的差分表达式可以由Taylor级数展开而导出, 故而得名。

现以一阶导数的向前差分为例来说明其导出过程。把函数 $\phi(x, t)$ 在时-空网格中某点 (i, n) 之值记为 $\phi(i, n)$, 其中 n 为时间坐标上的节点编号。假设空间网格步长(即相邻两网格线间的距离)是均匀的, 记为 Δx , 则将 $\phi(i+1, n)$ 对点 (i, n) 作Taylor展开可得:

$$\phi(i+1, n) = \phi(i, n) + \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{i, n} \Delta x + \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_{i, n} \frac{\Delta x^2}{2} + \dots$$

由此得:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{i, n} = \frac{\phi(i+1, n) - \phi(i, n)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_{i, n} + \dots$$

或记为

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{i, n} = \frac{\phi(i+1, n) - \phi(i, n)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (1-8)$$

这里符号 $O(\Delta x)$ 代表了二阶导数及更高阶导数项之和, 称为截断误差。它表示随 Δx 的趋近于零, 用 $[\phi(i+1, n) - \phi(i, n)]/\Delta x$ 来代替 $(\partial\phi/\partial x)_{i, n}$ 的截断误差小于等于 $K|\Delta x|$, 这里 K 为与 x 无关的正实数。要注意, 这里 $\phi(i+1, n)$ 、 $\phi(i, n)$ 是函数 $\phi(x, t)$ 在节点 $(i+1, n)$ 、 (i, n) 处的精确值。在进行数值计算时, 只能用其近似值来代替, 记为 ϕ_{i+1}^n 及 ϕ_i^n 。这样, 便得到导数 $(\partial\phi/\partial x)_{i, n}$ 的向前差分的表达方式:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{i, n} \simeq \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{\Delta x}, \quad O(\Delta x) \quad (1-9)$$

类似地, 可以导出一阶导数的向后差分、中心差分及高阶导数的差分表达式, 列于表1-1中。截差为 $O(\Delta x)$ 的表达式称为一阶截差公式, 截差为 $O(\Delta x^2)$ 的公式称为二阶截差公式。当 Δx 足够小时, 二阶截差的公式比一阶截差公式更准确。

一、二阶导数的差分表达式

表 1-1

导数	差分表达式	截差
$\frac{\partial \phi}{\partial x} / i, n$	$\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{\Delta x}$ (向前差分)	$O(\Delta x)$
	$\frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{\Delta x}$ (向后差分)	$O(\Delta x)$
	$\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\Delta x}$ (中心差分)	$O(\Delta x^2)$
	$\frac{-3\phi_i^n + 4\phi_{i+1}^n - \phi_{i+2}^n}{2\Delta x}$	$O(\Delta x^2)$
	$\frac{3\phi_i^n - 4\phi_{i-1}^n + \phi_{i-2}^n}{2\Delta x}$	$O(\Delta x^2)$
$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} / i, n$	$\frac{\phi_i^n - 2\phi_{i+1}^n + \phi_{i+2}^n}{\Delta x^2}$	$O(\Delta x)$
	$\frac{\phi_i^n - 2\phi_{i-1}^n + \phi_{i-2}^n}{\Delta x^2}$	$O(\Delta x)$
	$\frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2}$	$O(\Delta x^2)$
	$\frac{-\phi_{i-2}^n + 4\phi_{i-1}^n - 5\phi_i^n + 2\phi_{i+1}^n}{\Delta x^2}$	$O(\Delta x^2)$

对于非稳态项 $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ ，也有向前差分、向后差分及中心差分等一些表达式。但在非稳态导热的计算中，一般采用向前差分，即取：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} / i, n \approx \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} \quad (1-10)$$

在式(1-9)、(1-10)中采用了“近似等于”的符号“ \approx ”，意思是该符号后的项是符号前的导数的一种差分近似表达式。以后为行文之便，凡导数用差分表达式来代替的场合，仍然采用等号。但读者应当明白，当导数用其相应的差分式来代替时，原来严格表示某一物理规律的公式已经变成为一种近似的表达式了。

【例 1-1】利用 Taylor 展开法将一维、稳态、无源项的模型方程离散化，设 ρ 、 u 及 Γ 均为常数。

【解】为了对求解区域中每个节点建立起整个控制方程的差分表达式，须将方程中每一个导数项对同一点作 Taylor 展开，然后将导得的差分表达式代入控制方程，这样，每个导数项用差分式代替后引起的截差便可相加，得出整个方程的截差。将一维模型方程的精确解在节点 $(i+1, n)$ 、 $(i-1, n)$ 及 $(i, n+1)$ 上之值对节点 (i, n) 作 Taylor 展开，经过运算和归并，可以得

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\phi(i, n+1) - \phi(i, n)}{\Delta t} + \rho u \frac{\phi(i+1, n) - \phi(i-1, n)}{2\Delta x} \\ & = \Gamma \frac{\phi(i+1, n) - 2\phi(i, n) + \phi(i-1, n)}{\Delta x^2} + O(\Delta t, \Delta x^2) \end{aligned} \quad (1-11)$$

这里 $O(\Delta t, \Delta x^2)$ 是上述方程的截断误差，系由非稳态项、对流项及扩散项的截断误差归并而成。再以近似解之值 ϕ_i^n 来代替精确解 $\phi(i, n)$ ，得离散方程

$$\rho \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + \rho u \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\Delta x} = \Gamma \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2}, O(\Delta t, \Delta x^2) \quad (1-12)$$

可以看出式(1-12)相当于将式(1-7a)中的各导数项用其相应的差分表示式来替换所得的结果。

二、控制容积积分法

控制容积积分法(又称有限容积法)在流动与传热问题的数值计算中应用很广,其基本步骤如下:

1. 将守恒型的控制方程在任一控制容积及时间间隔内对空间与时间坐标作积分;
2. 选定所求解的变量及其一阶导数对时间及空间坐标的分布曲线(型线);
3. 对多维问题,假定沿控制容积的界面所求解的变量及其一阶导数均为常数;
4. 对控制方程的各项作积分,并将结果整理成节点上未知量的代数方程。

在举例说明控制容积积分法的应用之前,先介绍两种常用的型线,即分段线性分布与阶梯式分布。在图1-7中分别画出了函数 ϕ 随空间与时间坐标而变化的这两种方式。对于 $\phi \sim t$ 的阶梯式分布,又有显式与隐式两种情形。如果在整个时间步长内均取初始时刻之值而仅在该步长的结束时刻取得终了之值就是显式,反之则为隐式。而所谓的Crank-Nicholson(克兰克-尼克松)格式(简记为C-N格式)则取初始与终了时刻的平均值作为该步长内的值。下面以一维模型方程为例说明控制容积法的实施过程。

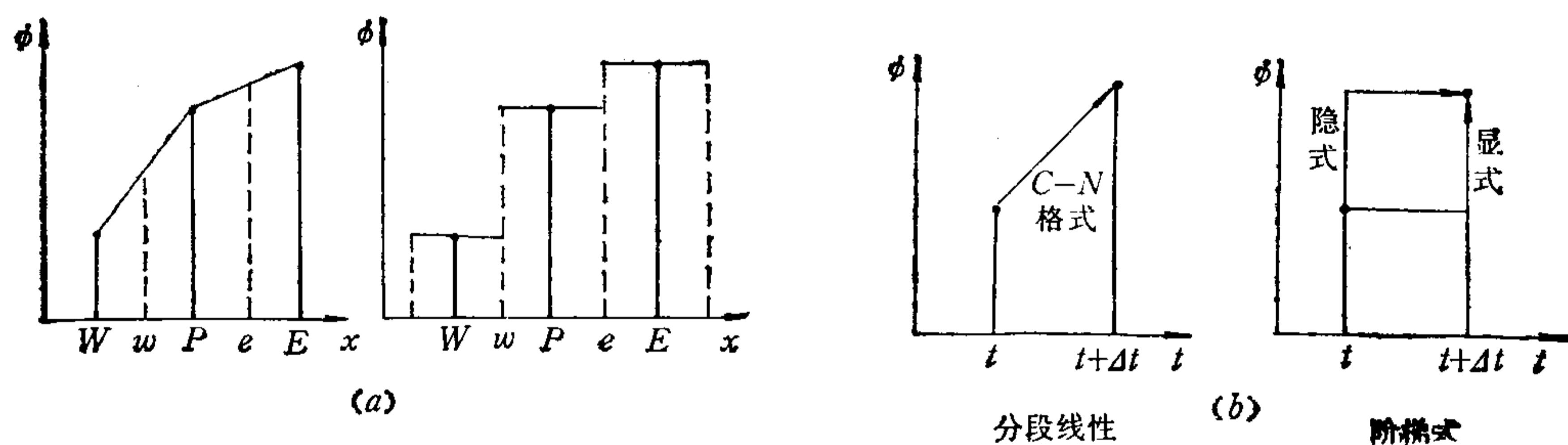


图 1-7 两种型线

【例 1-2】 用控制容积积分法导出式(1-7b)的离散方程(为与上例对比,设源项 S 为零)。

【解】 将式(1-7b)对图1-6所示控制容积 P 在时间间隔 Δt 内作积分,得:

$$\begin{aligned} & \rho \int_w^e (\phi^{t+\Delta t} - \phi^t) dx + \rho \int_t^{t+\Delta t} [(u\phi)_e - (u\phi)_w] dt \\ & = \Gamma \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] dt \end{aligned} \quad (a)$$

现在对上式各项中的 ϕ 及 $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ 的型线作出选择。注意,正是在这一步中引入了近似处理。

1. 非稳态项 设 ϕ 对 x 呈阶梯形变化,同一控制容积中各处的 ϕ 均取节点上之值,则有:

$$\int_{x_e}^{x_w} (\phi^{i+\Delta t} - \phi^i) dx = (\phi_P^{i+\Delta t} - \phi_P^i) \Delta x \quad (b)$$

2. 对流项 取 ϕ 对 t 的变化为阶梯显式, 则有:

$$\int_{t^i}^{t^{i+\Delta t}} [(u\phi)_e - (u\phi)_w] dt = [(u\phi)_e^i - (u\phi)_w^i] \Delta t \quad (c)$$

3. 扩散项 设 $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ 随时间作显式阶梯形变化, 有:

$$\int_{t^i}^{t^{i+\Delta t}} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] dt = \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e^i - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w^i \right] \Delta t \quad (d)$$

为了把对流项、扩散项的积分结果最终转化成为节点上未知值间的代数关系式, 还须进一步对该两项中的 ϕ 随空间 x 的变化型线作出选择。这里取为分段线性。于是对均分网格就有:

$$(u\phi)_e = [(u\phi)_P + (u\phi)_E]/2, \quad (u\phi)_w = [(u\phi)_W + (u\phi)_P]/2 \quad (e)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{(\delta x)_e}, \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{(\delta x)_w} \quad (f)$$

将式(b)~(f)代入(a)并整理之得:

$$\rho \frac{\phi_P^{i+\Delta t} - \phi_P^i}{\Delta t} + \rho \frac{(u\phi)_E^i - (u\phi)_W^i}{2\Delta x} = \Gamma \frac{\phi_E^i - 2\phi_P^i + \phi_W^i}{\Delta x^2} \quad (1-13)$$

可以看出, 对于本例, 用控制容积积分法导出的离散方程与由Taylor展开导出的结果是一致的, 但这不能作为普遍的结论。

最后要指出两点: 1. 在控制容积积分法中, 选取型线时主要考虑的是使所形成的离散方程具有较好的数值特性及运算的方便, 而不必追求一致性。即对同一变量在不同的项中可以有不同的型线假设。2. Taylor展开法与控制容积积分法相比, 前者偏重于从数学角度进行推导, 所形成的离散方程便于进行数学分析(例如分析其截断误差), 弱点是物理概念不明确, 对变步长情形离散方程较复杂; 而控制容积积分法则物理概念清晰, 可以保证所得到的离散方程具有守恒性, 但不便对所形成的代数方程进行数学特性的分析。在流动与传热的工程数值计算中, 控制容积积分法应用较广。

1-4 差分方程的数学特性分析

无论Taylor展开法还是控制容积积分法, 都在推导离散方程时作了近似处理, 必然会引入误差。从数学角度而言, 这些误差包括差分方程的截断误差, 差分方程解的离散误差及计算过程中引入的舍入误差。与此相应有所谓相容性、收敛性及稳定性等问题。从物理现象的描述来看, 希望所得到的数值解具备该物理现象的一些基本属性, 例如守恒性及纯对流问题中扰动仅沿流动方向传递的特性。本节中先讨论数学特性, 物理特性留待下节中介绍。

当时间与空间步长均趋于零时, 如果差分方程逼近于相应的微分方程, 即差分方程的截断误差趋近于零, 则称此差分方程与微分方程相容。显然, 当差分方程的截差呈 $O(\Delta x^m)$,

Δt^m)的形式时 ($m, n \geq 0$), 该差分方程具有相容性。但当截差表达式中含有 ($\Delta t/\Delta x$) 项时, 相容性仅在一定条件下才具备。

在网络的任一节点上微分方程的解与差分方程的精确解 (即在代数方程的求解过程中不引入任何舍入误差的解) 的差值称为差分方程解的离散误差。离散误差的大小同差分方程的截差有关。在一定的截差下, 网格加密误差也随着缩小。当时间与空间步长均趋于零时, 如果各节点上的离散误差也都趋于零, 则称该差分方程的解是收敛的, 或者说该差分方程具有收敛性。

实际上计算机的字长总是有限的, 因而在离散方程的求解过程中不可避免地要四舍五入。在任一节点上差分方程的精确解与实际得到的解的差称为该点的舍入误差。舍入误差的大小取决于计算机的字长及所采用的算法。

把差分方程的精确解记为 ϕ_i^* , 实际得到的解记为 $\tilde{\phi}_i^*$, 则任一点 (i, n) 上, 微分方程精确解与差分方程实际得到的解之间的差别为:

$$\phi(i, n) - \tilde{\phi}_i^* = \underbrace{\phi(i, n) - \phi_i^*}_{\text{离散误差}} + \underbrace{\phi_i^* - \tilde{\phi}_i^*}_{\text{舍入误差}} \quad (1-14)$$

此式表示有限差分法所得到的数值解与精确解之间的误差由离散误差与舍入误差所组成。计算实践表明, 误差的主要部分是离散误差。

一般地说, 在相同的网格划分下, 截断误差阶数越高的格式, 数值解的准确度也高, 一阶截差的格式称为具有一阶精度, 余类推; 对同一格式, 解的准确度随网格的加密而提高。对于工程流体力学与传热学问题的计算, 采用二阶精度的格式是比较合适的。至于采用何种疏密度的网格, 既取决于对解的准确性的要求, 也受到经济性的制约, 例1-3中还要讨论到。

现在讨论初值问题差分方程的稳定性。我们知道, 对于初值问题, 差分方程的求解是从给定的初值出发、一步一步地向前推进的。在给出初值时或在以后各个时层的计算中都可能引入误差。对于一个差分方程 (或一种差分格式), 如果在任何一个时刻计算中所引入的误差都不会在以后时层的计算中不断地被放大, 则此差分方程就是稳定的。稳定性是差分方程自身的一种特性。即对于一个稳定的格式, 无论任何扰动或误差在以后的计算过程中都不会被放大。在传热学课程中已经给出过非稳态导热差分格式不稳定的例子^[4,5]。这里简单介绍如何用 von Neumann (冯·诺曼) 方法来判断格式的稳定性。

von Neumann 方法的基本思想如下。假设所计算的问题边界值是准确无误的, 但在某一时层的计算中引入了误差。误差就是一种扰动。如果这一扰动的振幅随时间的推移而不断增长, 这一格式就是不稳定的; 反之, 若振幅保持不变或衰减, 格式就是稳定的。利用 Fourier (傅立叶) 展开的思想, 我们只要从误差矢量的分量中取出一个来研究即可。利用复数形式的表示式这一分量可以写成为 $\psi(t) e^{Ii\theta}$, 其中 $\psi(t)$ 即为振幅, $I = \sqrt{-1}$ 。可以证明^[3], 在所研究的情形下, 误差传递的规律与原差分方程所表示的规律完全一样。亦即只要把 $\psi(t) e^{Ii\theta}$ 代入到差分方程并找出相邻两时刻振幅之比 $\psi(t + \Delta t)/\psi(t)$, 令此量的绝对值小于等于 1, 即可得出该格式稳定的条件。

下面举例说明网格疏密度对数值解的影响及 von Neumann 分析法的实施过程。

【例 1-3】 设有常微分方程 $\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d\phi}{dx} - 2\phi = 0$, 边界条件为 $\phi(0) = 0, \phi(4) =$

1. 试用区域离散方法A, 分别将求解区域四等分、八等分、十六等分、三十二等分及六十四等分, 计算在 $x = 1, 2, 3$ 三点上的 ϕ 值并与精确解比较之。

【解】 设网格步长为 h , 则将表1-1中一、二阶导数中心差分的格式代入, 整理之可得:

$$-(2-h)\phi_{i-1} + 4(1+h^2)\phi_i - (2+h)\phi_{i+1} = 0$$

$$i = 2, M2, M2 = 4, 8, 16, 32 \text{ 及 } 64$$

对每个选定的等分区间数, 上式给出了关于内节点上 ϕ_i 值的一个方程组。这一差分方程组有一个特点, 即每一个方程中仅有三个未知量的系数不为零, 其它未知量的系数都是零。对这一类方程有一种很有效的求解方法, 将在以后介绍。这里可以采用 Gauss-Seidel (高斯-赛德尔) 迭代法求解。求解结果示于表1-2中。由表可见随着网格的加密, 数值解逐渐逼近于精确解。当求解区域六十四等分时, 在四位有效数字内, 数值解在该三点上之值已与精确解完全一致。在进行物理问题的数值求解时, 一般应通过逐渐加密网格, 观察同一地点上被求解量的数值 (或整个区域内的某种平均特性) 是否随网格的加密而发生明显的变化, 以判断网格的疏密度是否合适。所谓与网格无关的解就是指随着网格的加密, 同一地点上之值 (或整个区域的某种平均特性) 不再发生变化 (或变化至允许的范围内的解。只有与网格无关的解才能作为所计算问题的数值解。对于二维的流动与换热问题, 这样的网格一般都在 20×20 以上。

例1-3 的计算结果

表 1-2

节 点 数	$\phi_{x=1}$	$\phi_{x=2}$	$\phi_{x=3}$
5	0.0582	0.1552	0.3944
9	0.0502	0.1404	0.3752
17	0.0480	0.1364	0.3697
33	0.0475	0.1353	0.3683
65	0.0473	0.1350	0.3679
精 确 解	0.0473	0.1350	0.3679

【例 1-4】 试用 von Neumann 方法分析一维非稳态导热显式格式的稳定性条件。

【解】 将 $\psi(t)e^{i\theta}$ 代入到

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = a \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

得:
$$\frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} e^{i\theta} = a \frac{\psi(t)}{\Delta x^2} [e^{i(\theta+1)\theta} - 2e^{i\theta} + e^{i(\theta-1)\theta}]$$

经整理得

$$\frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} = 1 - 2\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right)(1 - \cos\theta) = 1 - 4\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right)\sin^2\frac{\theta}{2}$$

稳定性条件为

$$-1 \leq 1 - 4\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right)\sin^2\frac{\theta}{2} \leq 1$$

此式右端自然成立, 要使左端在任意大小的 θ 下均成立, 应使

$$4 \left(\frac{a \Delta t}{\Delta x^2} \right) \leq 2$$

即

$$\frac{a \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

这就是一维非稳态导热方程的显式格式的稳定性条件。

最后要指出，差分方程解的收敛性的证明比较困难。但对线性初值问题的相容格式，格式的稳定性是其收敛性的充要条件。

1-5 差分方程物理特性的分析

对于流动与传热问题的差分方程的数值解，最重要的物理特性有三个，即守恒性、迁移特性及人工粘性（假扩散）。其中人工粘性涉及到较多的理论问题，可参阅文献[1, 2, 3]。这里仅对守恒性与迁移性开展讨论。所有这些特性实际上都取决于对流项的离散格式。为简便起见，本节的讨论中将不涉及扩散项及源项。在此条件下，一维模型方程简化成为：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(\phi u)}{\partial x} = 0 \quad (1-15)$$

下面先讨论守恒性。对于计算区域内任意大小的有限空间，将差分方程作求和运算，如果所得到的结果满足该空间内物理量守恒的关系，则称该差分方程（或差分格式）是守恒的。下面以式（1-15）的下列格式来分析其守恒性：

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = - \frac{\phi_{i+1} u_{i+1} - \phi_{i-1} u_{i-1}}{2 \Delta x} \quad (1-16)$$

为书写方便，对流项中的时间角标已删去。另外，速度 u 也当作变量来看待，因而也带有下标。将上式两端对图1-8所示的网格从 $i = I_1$ 到 $i = I_2$ 求和，得：

$$\sum_{i=I_1}^{I_2} (\phi_i^{n+1} - \phi_i^n) \Delta x = - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=I_1}^{I_2} [(\phi u)_{i-1} - (\phi u)_{i+1}] \right\} \Delta t \quad (1-17)$$

分析上式右端的求和项，发现除首末两项外，中间各项均可互相抵消，其相消情形如图1-9所示。于是最后得：

$$\sum_{i=I_1}^{I_2} (\phi_i^{n+1} - \phi_i^n) \Delta x = - \frac{1}{2} [(\phi u)_{I_1-1} + (\phi u)_{I_1}] - \frac{1}{2} [(\phi u)_{I_2} + (\phi u)_{I_2+1}]$$

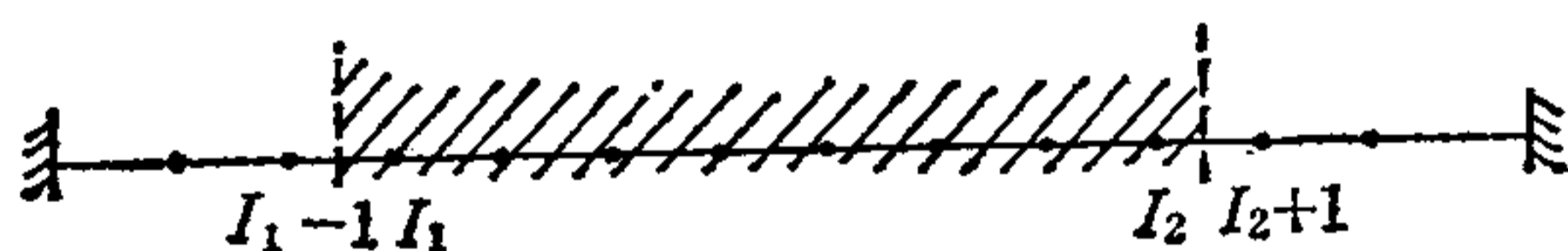


图 1-8 分析守恒性的网格系统

注意，在式（1-16）中，关于空间变量的一阶导数的离散采用线性插值方式，因而上式右端的两项代表了流入与流出求和空间界面上的量；而上式左端则为同一时间间隔内 ϕ 的增量。因而求和的结果满足守恒的要求，即差分方程（1-16）具有守恒性。

在流动与传热问题的数值计算中，一般希望所采用的差分格式具有守恒性。采用控制容积积分法来导出差分方程时，为确保所导出的差分方程具有守恒性，应满足下列两个条件：