高汝熹 编著

高等数学
（经济和管理类专业用）

复旦大学出版社

高等数学

（经济和管理类专业用）

高汝熹 编著

复旦大学出版社

内 容 提 要

本书简要地介绍了经济和管理类专业的数学基础，其中包括函数、极限、导数、积分、偏导数、无穷级数、广义积分、微分方程和差分方程初步等内容。此外，本书还着重阐述了一些经济管理进行数量分析所需的常用概念、方法及其数学模型，如边际、弹性、库存函数、效用函数、成本函数、生产函数、消费函数、资本现值、经济均衡分析、经济最优分析和经济增长分析等。

本书可作为经济管理和其他有关专业的教学用书，也可供各种培训班、夜大学和成人高校使用。全国自学考试指导委员会已将本书指定为经济管理类专业高等数学自学考试的主要参考书。

高 等 数 学

（经济和管理类专业用）

高汝熹 编著

复旦大学出版社出版

（上海国权路579号）

新华书店上海发行所发行　　复旦大学印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张12.75 插页0 字数379,000

1988年3月第1版　　1988年3月第1次印刷

印数1－8,000

ISBN7—309—00024—2/O·04　　定价：2.55元

目　　录

序言……………………………………………………………………(1)
第一章　函数及其图形……………………………………………………(3)
§1.1　集合 …………………………………………………………(3)
一、集合的概念　二、集合的运算　三、实数与数轴
§1.2　映射……………………………………………………………(9)
一、映射　二、例
§1.3　函数 …………………………………………………………(10)
一、函数概念　二、函数图形　三、函数的特性　四、复合函数和反函数
§1.4　经济学中的常用函数 ……………………………………(20)
一、需求函数　二、总收益函数　三、供给函数　四、静态均衡价格
§1.5　杂例 …………………………………………………………(25)
一、一些特殊类型的函数　二、求函数的表示式　三、讨论函数的有关性质
习题……………………………………………………………………(29)

第二章　极限与连续……………………………………………………(34)
§2.1　数列的极限 ………………………………………………(34)
一、数列极限　二、再论数列极限　三、单调有界数列
§2.2　函数的极限 ………………………………………………(41)
一、函数极限　二、再论函数极限　三、函数在无穷远处的极限　四、单侧极限
§2.3　极限的运算法则 …………………………………………(49)
一、数列极限运算法则　二、函数极限的运算法则
§2.4　两个重要极限 ……………………………………………(55)

一、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$　　二、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$

§2.5　连续函数 …………………………………………… (63)

一、定义　　二、连续函数的有关定理　　三、闭区间上连续函数的性质

§2.6　无穷小和无穷大的阶 …………………………………… (69)

习题………………………………………………………… (72)

第三章　导数和微分………………………………………… (77)

§3.1　导数概念 …………………………………………… (77)

一、导数概念的引进　　二、导数定义　　三、利用定义求导数

§3.2　求导法则和基本求导公式 ……………………………… (85)

一、导数的四则运算　　二、复合函数求导法则　　三、对数求导法
四、反函数求导法　　五、基本求导公式　　六、隐函数求导法
七、参数方程求导法

§3.3　导数在经济分析中的应用 ……………………………… (98)

一、边际收益　　二、边际成本　　三、函数的弹性

§3.4　高价导数 ……………………………………………(113)

§3.5　微分 …………………………………………………(116)

一、微分概念　　二、举例　　三、微分与导数的关系　　四、微分形式
的不变性　　五、微分在近似计算中的应用

习题…………………………………………………………(121)

第四章　微分中值定理及其导数的应用 ……………………… (127)

§4.1　微分中值定理 ……………………………………… (127)

一、罗尔定理　　二、拉格朗日中定理　　三、柯西中值定理　　四、中
值定理的初步应用

§4.2导数的应用 ……………………………………………… (134)

一、罗必达法则　　二、函数的极值

§4.3　凸性和拐点 ………………………………………… (151)

一、凸性　　二、拐点

§4.4　函数极值在经济管理中的应用 ………………………… (156)

一、需求函数和恩格尔函数　二、最大利润问题　三、用边际收益确定产品的技术指标　四、库存问题　五、复利问题

习题……(169)

第五章　积分学……(173)

§5.1　不定积分……(173)

一、不定积分的概念　二、常用积分公式　三、不定积分的性质　四、基本积分方法　五、有理函数的积分方法　六、杂例

§5.2　定积分……(198)

一、定积分的概念　二、定积分的基本性质　三、微积分基本定理　四、定积分的换元法和分部积分法

§5.3　广义积分……(213)

一、无穷区间上的积分　二、无界函数的积分

§5.4　积分学在经济分析中的某些应用……(218)

一、由边际函数求原函数　二、资本现值

习题……(222)

第六章　无穷级数……(230)

§6.1　常数项级数……(230)

一、级数的敛散性　二、无穷级数的基本性质　三、正项级数　四、交错级数及其判别法　五、绝对收敛和条件收敛　六、经济学中的例子

§6.2　幂级数……(252)

一、幂级数的收敛半径　二、幂级数的运算

§6.3　泰勒公式与泰勒级数……(258)

一、泰勒公式　二、泰勒级数　三、幂级数在近似计算中的应用

习题……(273)

第七章　多元函数的微积分……(278)

§7.1　多元函数……(278)

一、二元函数　二、二元函数的极限　三、二重极限和二次极限　四、二元函数的连续性

§7.2 偏导数 ……………………………………………(286)
一、偏导数定义 二、高阶偏导数
§7.3 全微分 ……………………………………………(291)
§7.4 多元复合函数和隐函数的求导方法 ………………(294)
一、多元复合函数求导法则 二、隐函数求导公式
§7.5 偏导数的应用 ……………………………………(300)
一、多元函数的极值 二、条件极值 三、拉格朗日乘数法 四、最小二乘法 五、生产函数
§7.6 多元函数的积分 …………………………………(324)
一、积分的一般概念 二、积分的性质 三、二重积分的计算
习题……………………………………………………(337)

第八章 微分方程初步……………………………………(343)
§8.1 微分方程的一般概念 ……………………………(343)
§8.2 一阶微分方程 ……………………………………(345)
一、可分离变量的一阶微分方程 二、一阶线性微分方程 三、可降阶的高阶微分方程
§8.3 常系数二阶线性微分方程 ………………………(352)
一、齐次方程 二、非齐次方程
§8.4 线性差分方程 ……………………………………(358)
一、有限差分和差分方程式 二、一阶线性差分方程 三、二阶常系数线性差分方程
§8.5 微分方程、差分方程在经济分析中的某些应用 ……(364)
一、逻辑斯谛曲线 二、市场动态均衡价格 三、带时间延迟的动态均衡价格 四、哈罗德-多马经济增长模型
习题……………………………………………………(372)

习题答案………………………………………………(377)

序　言

任何现象都是质和量的对立和统一，对经济现象的分析也不例外．以往的经济学教科书往往侧重于定性的研究，而对定量分析重视不够．最近三十年来，经济学中的定量分析方法有了很大发展，大大地丰富了经济学的内容，用数学来描述基本经济理论已愈来愈普遍．事实上，在经济数量分析中，人们已开始应用包括概率论和数理统计、运筹学、微分方程和差分方程、测度论、大范围分析、控制论、拓扑学等近代数学分支在内的各种数学工具．为此，需要对经济类、财经类、管理类专业本科和专修科的学生加强数学训练，提高他们的数学素养，增强他们对经济现象进行数量分析的能力，并为他们进一步学习微观经济学、宏观经济学、数理经济学、计量经济学、系统工程、预测和决策等课程奠定必要的数学基础．

本书编写意图一是重视对学生进行必要的基础知识、基本运算和解题能力的训练，根据经济、管理、财经类的专业需要，踏踏实实地提高学生的数学素养；二是结合数学内容的展开，介绍一些经济数量分析中的常用概念、方法以及对经济模型的分析，使之既有利于巩固数学基础，又有利于提高从事经济数量分析的能力．

本书是作者在多年从事教学的基础上逐步形成的，原讲义在复旦大学管理学院和经济学院有关专业讲授，此次定稿时，又进行了较多的修改，充实了经济数量分析的内容，同时还兼顾到经济管理类自学考试大纲的要求．在编写过程中，作者得到了复旦大学统计运筹系陈开明副教授不少有益的帮助．陈开明副教授还审阅了全书．复旦大学管理学院倪秀冬老师也对本书提出过不少建议并为本书选编了习题，在此一并表示感谢．

由于作者水平所限，本书可能有不妥之处，敬请读者不吝指正。

编　者

1985年10月

于复旦大学

第一章　函数及其图形

函数是高等数学中最重要的概念之一，在数学、自然科学、经济学和管理科学的研究中，函数关系到处都会出现．在本章中，我们将首先引入集合，然后讨论两个集合中的一种对应关系——映射，再把函数概念作为映射的一种特殊情形来引入．

§1.1 集　　合

一、集合的概念

何谓集合？按集合论的奠基者康托尔所述，"集合"为我们的感觉或思维中确定的各别对象的汇总．通俗地说，所谓**集合**就是指具有某个性质 P 的对象的全体，所确定的每一个对象 x 称为该集合的**"元素"**．

集合的例子很多．例如，自然数的全体组成一个集合，记为 $N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$；实数全体组成一个集合，记为 R．

习惯上，我们经常用英文大写字母 A、B、C 等表示集合，而用小写字母表示元素，这样，集合可表示为 $S=\{x|x$ 具有性质 $P\}$，这里 S 表示集合，x 表示元素，P 表示 S 中元素 x 所具有的性质．

例如，$S=\{x|x>0\}$，它表示集合 S，其元素为大于零的数，因而 S 即为正数全体．这里的性质 P 就是 $x>0$．习惯上将正数全体构成的集合记为 R_+，而记 R_- 为负数全体．又如 $A=\{x|a<x<b\}$，这里 a 与 b 为两个数，显然应有 $a<b$．A 表示这样的集合，其任一元素为介于 a 和 b 中的数．因而集合 A 即为介于 a 和 b 中的数的全体，在数轴上这一集合表示一个开区间 (a,b)，其端点分别为 a 和 b．

如果一个对象具有性质 P，则表示这个对象是集合 S 的一个元素，

记为 $x\in S$，念作"x 属于 S"．而如果一个对象不具有性质 P，则表示这个对象不是集合 S 的元素．记为 $x\notin S$，念作"x 不属于 S"．例如 $2\in R_+$，$-5\notin R_+$，这是由于 2 具有性质 $x>0$，而 -5 不具有性质 $x>0$．同样地，若记 A 为区间 $(2,6)$，则 $3\in A$，而 $1\notin A$．

集合的元素不一定是数，例如将某大学看作一个集合。其元素可取为该学校的成员．若将某公司看作一个集合，它所属的工厂就可作为元素．

记号 $\varnothing$ 表示"空集"，它是一个不包含任何元素的集合，例如 $S=\{x|x\in R$ 并且 $x^2+3=0\}$，此时 S 是这样的集合：它的元素是实数，且满足方程 $x^2+3=0$．显然，方程 $x^2+3=0$ 在实数范围内无解，因而 S 表示一个空集．

下面再引入子集的概念．设有集合 S 和 K，如果集合 K 中的任一元素都属于 S，亦即 K 中的每一个元素同时也都是集合 S 的元素，则称 K 为 S 的**子集**，记为 $K\subset S$，并称 K **包含**在 S 内．

例如，R 为全体实数的集合，N 为全体自然数的集合，N 显然为 R 的一个子集，记为 $N\subset R$．又设 A 为全部工业品的集合，B 为全部轻工业品的集合，则 B 显然为 A 的一个子集．

二、集合的运算

并、交、补是集合的三种基本运算．

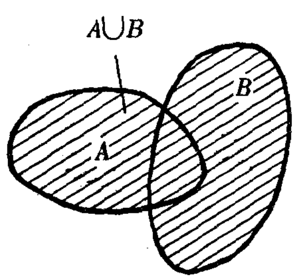

图 1.1

两个集合的**并**记为 $A\cup B$．它是由 A 与 B 中所有元素汇总构成的集合．若把 A 和 B 分别看作由封闭曲线围成的平面点集，则 $A\cup B$ 可由阴影线画出的平面点集来表示（图 1.1）．

两个集合的并也可表示为

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

例如，若记 A 为开区间 $(2,5)$，B 为开区间 $(3,6)$，记 C 为集合 A 和 B 的并，则

$$C=A\cup B=(2,5)\cup(3,6)=(2,6).$$

两个集合 A 与 B 的**交**记为 $A\cap B$，它是由既属于 A 又属于 B 的公共元素汇总构成的集合，也就是说，交集中的任一元素既属于集合 A 又属于集合 B，即

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

图 1.2 中的阴影线区域即表示 $A\cap B$.

例如，设

$$A=\{x|3\leqslant x\leqslant 5\}，B=\{x|4<x\leqslant 8\},$$

则

$$A\cap B=\{x|4<x\leqslant 5\}.$$

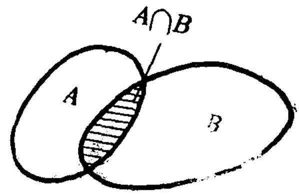

图 1.2

设 A 为某工厂大学毕业的成员构成的集合，B 为该厂工程师构成的集合，则

$A\cup B$ 表示该厂成员中大学毕业生和工程师构成的集合。

$A\cap B$ 表示该厂中既是大学毕业生又是工程师的成员构成的集合.

集合 A 关于集合 B 的**补集**是指：

1)集合 A 是集合 B 的一个子集；

2)补集中的元素属于 B 但不属于 A.

若记补集为 A_B^C，则

$$A_B^C=\{x|x\in B \text{ 且 } x\notin A\}.$$

图 1.3 中以阴影线区域表示 A_B^C.

显然，$A\cup A_B^C=B$，$A\cap A_B^C=\varnothing$

若 A 为全体正奇数集合，B 为全体正整数集合，则集合 A 关于集合 B 的补集 A_B^C 为全体正偶数集合.

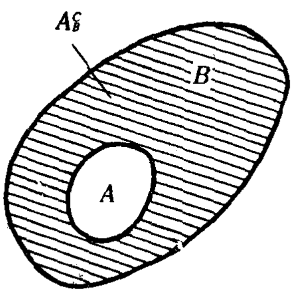

图 1.3

为方便起见，补集 A_B^C 也常简单地记为 A^C.

两个集合 A 和 B 称为**相等**，是指集合 A 和集合 B 含有相同的元素，记为 $A=B$. 也就是说，当且仅当 A 是 B 的子集且 B 也是 A 的子集时，集合 A 与集合 B 相等.

集合运算有如下性质：

(1) 交换律

$$A\cup B=B\cup A；A\cap B=B\cap A.$$

(2) **结合律**

$$A\cup(B\cup D)=(A\cup B)\cup D;\ A\cap(B\cap D)=(A\cap B)\cap D.$$

(3) **分配律**

$$A\cap(B\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap D);\ A\cup(B\cap D)=(A\cup B)\cap(A\cup D)$$

(4) **对偶律**

$$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C;\ (A\cap B)^C=A^C\cup B^C.$$

按照集合相等的定义，可以证明上述集合运算的性质．作为例子，我们证明集合运算的结合律如下：

对任一$x\in A\cap(B\cap D)$，由于$A\cap(B\cap D)$是集合A与集合$B\cap D$的交，所以必有$x\in A$和$x\in B\cap D$，进而又有$x\in A$，$x\in B$和$x\in D$，从而同时有$x\in A\cap B$和$x\in D$，因而可得$x\in(A\cap B)\cap D$．反过来，若对任一$x\in(A\cap B)\cap D$，必有$x\in A\cap B$和$x\in D$，进而又有$x\in A$，$x\in B$和$x\in D$，从而同时有$x\in A$和$x\in B\cap D$，因而可得$x\in A\cap(B\cap D)$．这样我们证明了集合$A\cap(B\cap D)$为集合$(A\cap B)\cap D$的子集，同时又证明了集合$(A\cap B)\cap D$和集合$A\cap(B\cap D)$的子集，因而$A\cap(B\cap D)=(A\cap B)\cap D$.

下面再证集合运算的对偶律：

先证对任何$x\in(A\cap B)^C$必有$x\in A^C\cup B^C$．因$x\in(A\cap B)^C$，即$x\notin A\cap B$，所以$x\notin A$与$x\notin B$至少有一个成立，注意到当$x\notin A$时有$x\in A^C$，当$x\notin B$时有$x\in B^C$，因而总有$x\in A^C\cup B^C$.

反过来，再证对任何$x\in A^C\cup B^C$必有$x\in(A\cup B)^C$．由$x\in A^C\cup B^C$，关系式$x\in A^C$与$x\in B^C$至少有一个成立．即$x\in A$与$x\in B$至少有一个不成立，所以$x\notin A\cap B$，从而$x\in(A\cap B)^C$.

综合这两个结果知$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

其余几个集合运算性质请读者自行证明.

三、实数与数轴

人们对于数的认识是逐步深刻的．首先遇到的是对产品计数，从而认识了自然数集$N=\{1,2,\cdots\}$．自然数集关于加法运算是封闭的，亦即若$a\in N$，$b\in N$，则总有$a+b\in N$；但对减法运算却不封闭，亦

即两自然数的差未必为自然数，例如当 $b<a$ 时 $b-a\notin N$。这在进行商品交换和计算时是不方便的．因而人们将自然数集扩展到整数集 $Z=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$．整数集关于加法、减法和乘法运算都是封闭的，亦即任两个整数在作加、减或乘的运算后所得的和、差或积仍为整数．但整数集关于除法却不封闭．为了引入除法，相应的数系还需再加扩展，这就是有理数集 $Q=\{x\,|\,x=p/q,\ p\in Z,\ q\in N,\ p$ 与 q 互质$\}$．这样，在有理数集范围内，我们就可以进行四则运算了．

有理数通常可用直线 L 上的点形象地表示出来．在 L 上任取一点作原点，另在 L 上取一点记作 1，此时我们采用这两点之间的距离作为度量单位，并将从 0 到 1 的方向定义为"正方向"。习惯上，我们常使直线 L 水平放置，而点 1 在点 0 的右边．这样，我们就建立了**数轴**．由初等几何知，用直尺和圆规可将单位长度任意等分。因而，任何用有理数 p/q 表示的长度都能用几何方法作出．在图 1.4 中，作出 OA 的长度等于 p/q，所作得的点 A 叫做有理点．它是有理数 p/q 的几何表示，而有理数 p/q 称为点 A 的**坐标**．

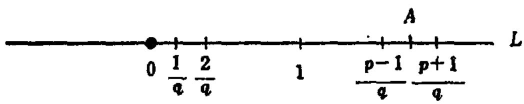

图 1.4

由上面的讨论可知，对任一有理数，我们均可在数轴上找到相应的点与它对应．但我们发现在实数轴上还有不少点，它们没有相应的有理数与之对应，这一现象在公元前五世纪就为古希腊的数学家和哲学家发现．例如，用有理数就无法表达单位正方形的对角线长度．但表示这一长度的线段 OB 可以在数轴上找到（见图 1.5）．这样，在数轴上确实存在着象点 B 那样的非有理点．

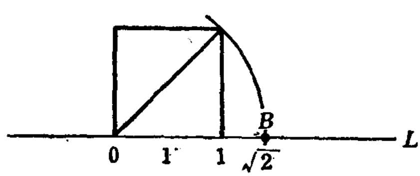

图 1.5

事实上，非有理点在数轴上不但存在，而且有无限多个．我们称数轴上的非有理点为无理点，而这些无理点在数轴上的坐标（其绝对

值等于原点到这些无理点的长度）为无理数，并将有理数和无理数统称为**实数**．这样，在数轴上的点就与实数间建立了一一对应的关系，数轴上的每一点都表示某一个实数．而每一个实数也都对应着数轴上的某一个点．因而数轴也可称为**实数轴**．

下面介绍常用的一些区间记号．

1)闭区间：$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 在数轴上表示为以 a、b为端点且包含 a 和 b 的线段（图 1.6）．

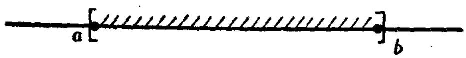

图 1.6

2)半开半闭区间：$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，在数轴上表示以 a、b为端点且仅包含左端点 a 的线段（图 1.7）．

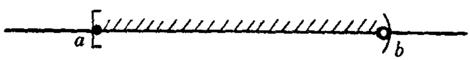

图 1.7

类似地，$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$ 在数轴上表示为以 a、b 为端点且仅包含右端点 b 的线段（图 1.8）．

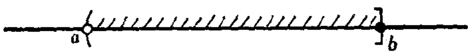

图 1.8

3)开区间：$(a,b)=\{x|a<x<b\}$ 在数轴上表示为以 a、b 为端点但不包含端点 a 和 b 的线段（图 1.9）．

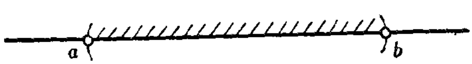

图 1.9

开区间和闭区间的差别在于是否包含端点：闭区间包含着端点，而开区间不包含端点．

除了上述有限区间外，还有五种无穷区间：

1)$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$ 表示大于 a 的实数全体，在数轴上表示为自 a 点出发而又不包含 a 点的右半直线。

2) $[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$ 表示大于等于 a 的实数全体．在数轴上表示为自 a 点出发而又包含 a 点的右半直线．

3) $(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$ 表示全体实数．

4) $(-\infty,a)=\{x|x<a\}$ 表示小于 a 的实数全体．

5) $(-\infty,a]=\{x|x\leqslant a\}$ 表示小于等于 a 的实数全体．

所谓点 a 的 δ **邻域**，是指以 a 为中心的开区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$．也就是说，设 a 和 δ 为两个实数，$\delta>0$，称满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的实数全体为点 a 的 δ 邻域．点 a 为该邻域的**中心**，δ 为该邻域的**半径**．邻域的概念在极限的研究中将经常遇到．

§1.2 映　　射

一、映射

上节我们引入了集合这个概念，下面我们引入两个集合之间的一种对应关系，这种对应关系被称为**映射**．它满足如下条件：

（1）对于第一个集合 X 的每一个元素，都能按某种规则与第二个集合 Y 的某个元素对应；

（2）对于第一个集合 X 的每一个元素，第二个集合 Y 中与它对应的元素只有一个．

我们称这样的对应关系为从 X 到 Y 的映射，并记为

$$f: X\to Y.$$

它意味着 f 将集合 X 中的每一元素 $x\in X$ 与集合 Y 中的某个元素 $y\in Y$ 对应，记为 $y=f(x)$．

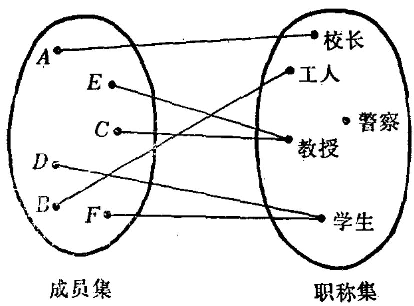

图 1.10

例如，我们可以建立学校中每一个成员与其职称集合之间的对应关系．假定学校中每一个成员能且只能有一个职称，则这种对应关系满足上述定义中的两个条件，因而构成映射（图

1.10).

对上述定义，我们还要指出如下几点：

(1) 在映射中，并不要求第二个集合 Y 中的所有元素都与第一个集合 X 中的某个元素对应．例如，学校中可以没有经理、总农艺师、警察等．

(2) 尽管第一个集合 X 中的任一元素不允许与第二个集合 Y 中的两个元素对应，但第二个集合 Y 中的一个元素完全允许是第一个集合 X 中的两个或多个元素的对应元素．如图 1.10 所示，成员 C 和 E 的职称均为教授，而 D 和 F 都是学生．

二、例

映射的例子很多，例如：

(1) 设 X 是平面上所有三角形的集合，Y 是所有圆的集合，可在它们之间建立这样一种对应关系：对任何一个三角形，都有它唯一确定的内切圆．读者可以验证，这样的对应关系满足映射定义的两个条件，故构成从 X 到 Y 的映射．

(2) 设 X 是所有同心圆的集合，Y 为实数集合，我们将每一个同心圆与其周长对应，这样的对应关系也构成从 X 到 Y 的映射．

(3) 设 X 为某小学的全体小学生，Y 为实数集合．我们将每一个小学生与其身高建立对应，则每一个小学生在同一时刻均有唯一确定的身高，故这样的对应关系也构成从 X 到 Y 的映射．

(4) 在经济学中，经常出现“效用”概念，它是人们对各种不同商品的“有用性”的一种主观判断．这也构成一种映射．

§1.3 函　　数

一、函数概念

在集合和映射概念的基础上，我们很容易给出函数的定义．

若 X 和 Y 都是实数集合，则两实数集合之间的映射 f：$X \to Y$ 称