线性代数

杨锡达
邓全福　樊思明
楚道玉　李　萍
合　编

成都科技大学出版社

线性代数

杨锡达 邓全福 樊思明 綦道王 李 萍 合

成都科技大学出版社出版发行

四川省新华书店经销

航空航天工业部611所印刷厂印刷

本开787×1092毫米 1/32 印张：9.5

1988年8月第一版 1988年8月第一次印刷

字数：205千字 印数：1—6000

ISBN 7—5616—0265—0/O 28(课)

定价 2.70元

前　言

为适应工科本科（特别是地质类各专业）教学的需要，我们在认真讨论工程数学《线性代数》的教学基本要求、总结已往教学经验的基础上编写了这本书。它包含了线性代数的基本内容。

读者初学这门课的时候往往感到内容抽象、头绪纷繁、基本概念和理论难于理解，各部分内容之间的联系不易搞清楚。这一方面是由课程本身的特点决定的，另一方面也与工科的学时较少、行课周期短有关。鉴于上述情况，我们确定，在内容处理上以矩阵代数理论为重点，充实、加强矩阵的代数运算、初等变换、化简矩阵为标准形的理论和方法。力求形成矩阵代数理论的基本完整。

矩阵方法已成为数学的各个分枝及其它应用学科的重要工具，并广泛应用于各个技术领域。因此对就读工科的读者来说，掌握矩阵方法更形重要。以矩阵代数为主线展开线性方程组理论、线性空间、线性变换及二次型的讨论，读者比较容易接受。反过来在应用中又能巩固学过的矩阵方法、加深对矩阵的理解。根据这种想法，对全书内容作了如下安排：第一章介绍行列式；第二章讨论了线性空间的一个具体模型——n维向量（n元有序数组）空间（R^n）；第三章讨论矩阵代数运算及性质，重点讨论矩阵乘法和求逆运算、分块运算、初等变换，用初等变换化简矩阵为相抵标准形，从而解决了矩阵求秩的原理和方法问题。第四章以向量和矩阵为

工具讨论线性方程组理论，并用n维向量空间的观点分析齐次线性方程组解集合的结构。第五章介绍矩阵的相似标准形，主要介绍了矩阵的特征值及特征向量的概念、求法以及用正交矩阵化简实对称矩阵为对角形的基本理论和方法。第八章讨论二次型的化简问题。引入矩阵相合标准形的概念，重点讨论了二次型的主轴问题及实二次型的分类。上述内容为一般专业的必修部分，大约需要36学时左右。第六、七两章介绍线性空间的公理化定义，扼要地讨论了线性空间及欧氏空间的基本性质及线性变换的基本理论。这两章的内容比较抽象（所用的矩阵知识前面几章已介绍过）学时较少的专业可以不讲，作为学时较高的专业的教学内容，完成这两章的教学约需10学时。

我们在编写时还力求在各章开头提出要讨论的主要问题及提出问题的背景、强调各章之间的联系，以帮助读者掌握和理解本章的基本概念、理论与方法。

全书各章都列出了较多的例题，使读者从例题示范中掌握基本的解题方法，提高理解和运用定理的能力，章末附有足够的习题，都是加深理解和巩固所学内容所必需的基本题目。

各章编写的分工是：邓全福（第一章）、樊思明（第二章）、杨锡达（第三、五两章）、楚道玉(第四、八两章)、李 萍（第六、七两章）。杨锡达任主编。

本书由王本镃同志担任主审，对本书稿提出了许多宝贵意见，付出了辛勤的劳动，我们向他表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，经验不足，加之编写时间短促，不妥之处在所难免，欢迎批评指正。

编 者　　一九八七年十月

目　　录

第一章 行列式

在初等代数里讨论过用二、三阶行列式解二、三元线性方程组的方法。在以后的理论学习和实际应用中常常遇到多个变元的线性方程组。我们将看到，n个变元n个方程的线性方程组的唯一解也可以用n阶行列式表示。本章主要介绍n阶行列式的概念、性质、计算方法以及解n元线性方程组的克莱姆法则。当然行列式作为一个重要的数学工具，除了解线性方程组外在数学的其它分支以及物理学等领域里也有广泛的应用。

§1 n阶行列式的定义

为了给出n阶行列式的定义，我们先考察二、三阶行列式的特征。

在中学里已学过解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

与

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时，方程组(1.1)有唯一的解为：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\qquad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

我们定义二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

则方程组(1.1)的解(1.2)可表示为:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

类似地，定义三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.4}$$

那么，方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

的系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

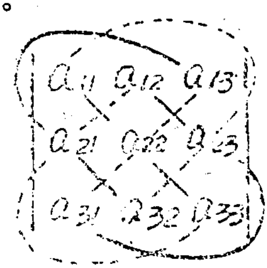
时，便有解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}。$$

三阶行列式的展开法，可用下图加强记忆。在下图中，实线上三个数的乘积构成的三项都取正号，虚线上三个数的乘积构成的三项取负号。



为了给出n阶行列式的定义，我们以三阶行列式(1.4)为例来观察二、三阶行列式的结构特点：

1、首先我们看到(1.4)式中的每一项都是三个数的乘积。这三个数取自行列式的不同的行，不同的列。于是(1.4)式的任意一项都是可以写成a_{1j_1}、$a_{2j_2}a_{3j_3}$，这里$j_1j_2j_3$是1，2，3的一个排列。

2、因为1,2,3共有3! = 6个不同排列，所以(1.4)是6个项的代数和。

3、在(1.4)式中，有的项带正号，另一些项带负号。如果我们把各项的第一个下标(行标)都按自然顺序排列（因为乘法满足交换律，所以可以这样作），那末各项所带的符号与第二个下标(列标)的排列有关。为了说明其中的关系，下面引入逆序数的概念。

定义1.1　n个数码1,2,…，n的任意一个全排列称为一个n阶排列。在一个n阶排列$j_1j_2\cdots j_n$中的任意两个数码，如果排在前面的大于排在后面的，则称它们构成一个逆序（或反序）。一个排列中全部逆序的个数称为这个排列的逆序数，记作$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$。

例如　1　2是一个2阶排列，

3　1　2是一个3阶排列。

我们知道，不同的n阶排列的总数是n!个，在所有的n阶排列中，1 2 3 …n是唯一的一个按自然顺序构成的排列，称为n阶标准排列，显然$\tau(1\ 2\ 3\ \cdots n)=0$。

下面我们介绍计算排列的逆序数的方法。

设：

$$j_1j_2\cdots j_n$$

为一个n阶排列。考虑$j_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比j_i小的数码排在j_i的后面的有τ_i个，于是

$$\tau(j_1j_2\ \cdots j_n)=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n$$

即是这个排列的逆序数。

例1.1　计算排列3 2 5 1 4的逆序数。

解　因为$\tau_1=2$，$\tau_2=1$，$\tau_3=2$，$\tau_4=0$，$\tau_5=0$。故

$$\tau(3\ 2\ 5\ 1\ 4)=2+1+2+0+0=5。$$

如果一个排列的逆序数是偶数，就称该排列为偶排列，否则称为奇排列。不难看出(1.4)式中：带正号的项的第二个下标排列的逆序数是偶数；带负号的项的第二个下标排列的逆序数是奇数。如果用J表示第二个下标排列的逆序数，则各项所带的符号为$(-1)^J$。

于是三阶行列式的定义可写为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^J a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3};$$

其中$J = \tau(j_1 j_2 j_3)$，$\sum$是对所有三阶排列$j_1 j_2 j_3$求和。

二阶行列式的定义也可以写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum (-1)^J a_{1j_1} a_{2j_2}$$

其中$J = \tau(j_1 j_2)$，$\sum$是对所有三阶排列$j_1 j_2$求和。

现在，我们把二、三阶行列式的概念推广到n阶行列式。

定义1.2　设有数域K[注]上的n^2个数$a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots n)$，把它们排列成n行n列，记成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做n阶行列式(a_{ij}是第i行、第j列上的数，称为元素)。它等于所有取自不同行不同列的n个元素的乘积：

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots\cdots a_{nj_n} \tag{1.6}$$

的代数和，其中$j_1 j_2 \cdots\cdots j_n$是1 2 …n的一个排列。当$j_1 j_2 \cdots j_n$是偶数排列时(1.6)取正号，当$j_1 j_2 \cdots j_n$是奇排列时(1.6)

【注】数域：设K是一个数集，其中包括0与1。如果K中任意两个数(这两个数可以相同)的和、差、积、商（除数不为零）仍然是K中的数，那么K就称为一个数域。

取负号。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^J a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \qquad (1.7)$$

其中$J=\tau(j_1j_2\cdots j_n)$，Σ是对所有n阶排列$j_1j_2\cdots j_n$求和。

这个定义表明，n阶行列式正是前面所说的二阶、三阶行列式的推广。特别是，当$n=1$时，一阶行列式$|a|$就是数a。

下面，根据定义计算行列式。

例1.2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由于第一列除了a_{11}外其它数都为0，因此要得到非0项，第一列必选a_{11}，这样第二列不能选a_{12}(因为第一行只能选一个数），而只能选a_{22}。同样，第三列必选a_{33}，…，第n列必选a_{nn}，因此，这个行列式只有唯一的一项

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

有可能不为0，这一项的列标的排列是1 2 …n，逆序数为0，故行列式的值为$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

在行列式中，从左上角到右下角的直线叫做主对角线。例1.2的行列式中，主对角线以下的数均为0(即当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$)，这种行列式称为上三角行列式。从上例可知，上三角行列式等于它的主对角线上全部元素的乘积。

例1.3 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解：同例1.2，除去为0的项，仅剩下唯一的一项为

$$a_{1n}\,a_{2,n-1}\,a_{3,n-2}\cdots a_{n1}$$

这一项的列标的排列为

$$n(n-1)(n-2)\cdots 3\ 2\ 1$$

它的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}$，因此

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

§2 n阶行列式的性质与计算

由行列式的定义可知，一个n阶行列式的展开式共有n!项。因此，除了极特殊的n阶行列式，或n很小的时候，一般说来直接用定义计算行列式是困难的。在这一节里，我们将要讨论行列式的性质。引用这些性质，可以简化行列式的计算。

下面将要介绍行列式的8条性质。这8条性质对于三阶行列式而言，不难用三阶行列式的展开式进行验证；对于n阶行列式，我们可以证明这8条也是成立的。为此，我们首先介绍两个定理。

定理2.1 一个排列中的任意两个数码对换，排列改变奇偶性。

证 先证相邻对换的情形。排列

$$\cdots a \quad b \cdots \tag{2.1}$$

经过a与b对换变成

$$\cdots b \quad a \cdots \tag{2.2}$$

别的数码不动。显然，在排列(2.1)与(2.2)中a或b与它们前面和后面的各数所构成的逆序数都相同，不同的是a、b的次序。如果原来a、b组成逆序，则经过对换，整个排列的逆序数减少一个；如果原来a、b不构成逆序，则经过对换，逆序数增加一个。不论增加一个或减少一个，排列的奇偶性改变了。

再证一般对换的情形。设a与b之间有s个数码，即排列为

$$\cdots a \ i_1 \ i_2 \cdots i_s \ b \cdots \tag{2.3}$$

经a与b对换，排列(2.3)变成

$$\cdots b\ i_1\ i_2\cdots i_s\ a\cdots \tag{2.4}$$

不难看出，两个不相邻数码的对换可以通过若干次相邻的对换来实现。从(2.3)出发，把b与i_s对换，再与i_{s-1}对换，…，经过s+1次相邻对换，排列(2.3)变成了

$$\cdots b\ a\ i_1\ i_2\cdots i_s\cdots \tag{2.5}$$

从(2.5)出发，把a一位一位地向右移，经过s次相邻的对换，排列(2.5)变成排列(2.4)。因此，完成a与b的对换总共经过了2s+1次相邻的对换。前面已证，一次相邻对换改变排列的奇偶性，因而，奇次相邻对换最终也改变了排列的奇偶性。

定理2.2 n阶行列式的一般项可以写成

$$(-1)^{S+T}a_{\alpha'\alpha}a_{\beta'\beta}\cdots a_{\lambda'\lambda}$$

其中S与T分别为n阶排列$\alpha'\beta'\cdots\lambda'$与$\alpha\beta\cdots\lambda$的逆序数。

证： 将该项任意二元素对换时，相应的两个下标同时对换，由定理2.1知排列$\alpha'\beta'\cdots\lambda'$与$\alpha\ \beta\cdots\lambda$的逆序数同时改变奇偶性，而它们的逆序数之和的奇偶性仍不变。如果该项调换成行标的排列顺序为自然顺序1 2 …n，而列标的排列顺序随之而变成$j_1\ j_2\cdots j_n$，令

$$\tau(j_1\ j_2\ \cdots j_n)=J$$

则有

$$(-1)^{S+T}a_{\alpha'\alpha}a_{\beta'\beta}\cdots a_{\lambda'\lambda}=(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

如果将行列式中各项的第二个下标按自然顺序排列，则相应的第一个下标排列为$i_1i_2\cdots i_n$，于是由定理2.2，行列式又可定义为