SHUXUEFENXIJICHU

数学分析基础

王泽汉 编著

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$$\text{fin}\, x_n = 0$$

$$\alpha = \inf E$$

$$\beta = \sup E$$

$$f(dx) = \operatorname{arctg}\frac{1}{dx}$$

黑龙江科学技术出版社

数 学 分 析 基 础

SHUXUE FENXI JICHU

王 泽 汉　编著

黑龙江科学技术出版社

一九八五 · 哈尔滨

责任编辑：翟明秋
封面设计：徐桂荣

数学分析基础
王泽汉 编著

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区建设街35号）
依安印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米1/32·印张4.5 ·字数90千
1985年2月第一版·1985年2月第一次印刷
印数：1—9,820

书号：13217·136　　定价：0.79元

前　　言

这本小册子根据近代非标准分析的一些观点，对传统的数学分析的一些基本概念进行了改革。主要有以下四点：

（i）采用无限小及无限大的直观意义，即正无限小 0^*（>0）小于所有的正数但大于0；正无限大 $+\infty$ 大于所有的正数。

（ii）用终值概念把 $\lim x_n = 0$ 区分为：

$\operatorname{fin} x_n = 0^*$（有无穷多项 x_n 异于0），

及　$\operatorname{fin} x_n = 0$（只有有穷多项 x_n 异于0），

并仍用"ε—N语言"来刻划前者。

（iii）用本身收敛有理数列确定实数，这不仅可取代康脱的有理数分划理论，而且能同时定出非标准数。

（iv）对终值作连续性假设，从而证明了 0^* 及 ∞ 的运算规则和非标准数的一些运算规则，使得对于如 $f(x+dx)$（$dx=0^*$）的式子可能按这些规则进行运算。

这本书限于给数学分析打基础，所以只论述极限、实数、连续等基本概念。读者如有兴趣进一步探讨可参阅以这些新观点为基础的拙著《微积分》(分上、中、下三册，已由哈工大教材科铅印内部发行)。

本书的写作曾得到吴从炘教授和龙文庭副教授的支持，在此表示感谢。

王 泽 汉

于哈尔滨工业大学

目　录

第一部分

用基本有理数列确定实数．实数列的终值．实数系完备性的各种表现

§1．1 有理数列极限评述

正负整数、正负分数、正负有限小数及 0 统称为有理数，至于循环小数传统上认为可化为分数，而我们将采取更确切的说法，下文申论．在数学上，一个变数历经可数无穷多个有理数是最有用的和最常见的变化方式，我们称这变数所经历的这列有理数为有理数列．所谓有理数列就是按一定规律写出且可无限地向后延伸的一列有理数：

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots, \tag{1}$$

其中x_1是第 1 项，x_2是第 2 项，x_3是第 3 项，…，x_n是第 n 项，也叫一般项．我们常用$\{x_n\}$表这数列（1）．我们先看几个有理数列的例子：

例 1　$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$，第n项为 $x_n=\frac{1}{2^{n-1}}$．

例 2　$-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{5},\ \cdots$，第n 项为 $x_n=-\frac{1}{n}$．

例 3　1，0，$\frac{1}{2}$，0，$\frac{1}{3}$，0，$\frac{1}{4}$，0，$\frac{1}{5}$，…，第n项为$x_n=\frac{(-1)^{n-1}+1}{n+1}$.

例 4　$\frac{2}{2}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{6}{4}$，$\frac{8}{5}$，$\frac{10}{6}$，…，第n项为$x_n=\frac{2n}{n+1}$.

例 5　0.3，0.33，0.333，0.3333，…，第n项为$x_n=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\cdots+\frac{3}{10^n}$.

例 6　1，-1，1，-1，1，-1，…，第n项为$x_n=(-1)^{n-1}$.

例 7　2，-4，6，-8，…，第n项为$x_n=(-1)^{n-1}2n$.

例 8　2，0，4，0，6，0，8，…，第n项为

$$x_n=\frac{1}{2}[(-1)^{n-1}+1](n+1).$$

上面的8个例子，都是有理数所成数列，各项的数都很简单，但能说明各种不同的变化情况.

从上面所举8个有理数列的变化情况可以看出：有确定有限趋向的数列和静止数列在变化中有很大区别，前者是越来越接近于某数但永远达不到某数，至于静止数列则是永远停留在某数.但在传统的极限论中，忽视了两种变化的不同，对两种情形不加区分统称为有极限的数列，并把所趋向的数或静止的数统称为数列的极限，并用“ε—N 语言”来刻划这种变化.

我们就一般有理数列（1）给出极限定义如下：

定义Ⅰ 设 a 为某有理数．如果对于任意给的有理数 $\varepsilon>0$，存在自然数 $N=N(\varepsilon)$ 使当自然数 $n>N$（即 $n=N+1,N+2,N+3,\cdots$）时，恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称 x_n 以 a 为极限，或说 x_n 趋向 a，记如

$$\lim x_n=a, \text{ 或 } x_n\to a,$$

亦可更详细地记如

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a, \text{ 或 在 } n\to\infty \text{ 时 } x_n\to a.$$

注意这定义包括 $\lim a=a$（即 $a\to a$），因为显然有 $|a-a|<\varepsilon$.

读者可根据这定义验证上述各例中有趋向的有理数列的极限：

$$\lim \frac{1}{2^{n-1}}=0, \qquad \lim\left(-\frac{1}{n}\right)=0,$$

$$\lim(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=0, \qquad \lim\frac{(-1)^{n-1}+1}{n+1}=0,$$

$$\lim\frac{2n}{n+1}=2,$$

$$\lim\left(\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\cdots+\frac{3}{10^n}\right)=\frac{1}{3}.$$

至于我们把极限定义局限于有理数列的有理极限并取 $\varepsilon>0$ 为有理数，是因为假定我们只认识到全体有理数，但有趋向的有理数列所趋向的数并不都是有理数，从而我们要用有趋向的有理数列来确定新数即所谓实数．如果认为已有了实数系，那末上述极限定义对实数列仍能用，x_n，a 及 $\varepsilon>0$ 均应为实数，就不必设它们为有理数了．

在传统极限论中，对于$a=0$的情形，即对于$\lim x_n=0$（或$x_n\to 0$）的情形，称x_n为无穷小量。这种称呼并不符合实际情形，因为x_n取得一列异于0的数，谈不上无穷小。

对比于无穷小量，传统极限论中还给出无穷大量的定义。

定义Ⅱ 对于任给的$E>0$，存在自然数$N=N(E)$使当$n>N$时，恒有

$$|x_n|>E,$$

则称x_n为无穷大量，记如$\lim x_n=\infty$或$x_n\to\infty$。

这定义也不够确切，因为x_n虽取得绝对值越来越大的数，但都是有限数，谈不上无限大，而且对记号∞没有明确地给予无限大的称号。

在传统极限论中还根据定义Ⅰ严格证明极限运算定理：

定理Ⅰ 如果存在$\lim x_n=a$，$\lim y_n=b$，则

$$\lim(x_n\pm y_n)=a\pm b,$$

$$\lim(x_n y_n)=ab,$$

$$\lim\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}，\text{在}b\neq 0\text{时。}$$（证明略）。

上述定义Ⅰ，Ⅱ及运算定理是传统极限论的基本内容，它是数学分析的基础。从数值来说，这些定义和定理是无可非议的。上面已经指出，无限小及无限大的定义不够明确，不符合它们的直观概念，而且在无限小的定义中，把如

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \cdots$$

趋向0但永远达不到0的数列和各项都是0的静止数列

$$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots$$

同说成极限为0，即 $\lim\frac{1}{2^{n-1}}=0$，$\lim 0=0$，并同用"ε—N语言"(即当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\frac{1}{2^{n-1}}\right|<\varepsilon$，$|0|<\varepsilon$)来刻划，则是掩盖了二者的矛盾，并且回避了"$1/2^{n-1}$永远达不到0，它究竟达到什么?"这样的问题．下节我们详细阐述这些问题，突出两种不同情况，提出终值概念，用"ε—N语言"刻划终值为无限小的有理数列，并用"E—N 语言"刻划终值为无限大的有理数列，从而对数学分析基础进行了改革。

§1．2 终值为无限小0^*的有理数列。终值为无限大∞的有理数列。0^*及∞的运算

在上节我们阐述了数列极限的 ε—N 定义，并指出这定义在数值上无可非议，但在概念上把各项越来越接近于0但永远达不到0的数列和各项都是0的数列（可能有有穷多项不是0）统称为极限是0，似乎不够完善．现在我们更仔细地分析矛盾并回答上节所提的问题．上节例1的数列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots,\ \frac{1}{2^{n-1}},\ \cdots \tag{1}$$

代表一类数列，各项都是正数，并且越来越接近于0，但永远达不到0．这个数列很早就出现了．战国时代约与孟子同时的庄周在他的著作《庄子》中记载有惠施的一段话："一尺之棰，日取其半，万世不竭．"用现代的话说："一尺长的棒

子，第一天取它的一半，第二天取余半之半，第三天取余半之半之半，…，这样下去，永远取不完.”我们应当承认惠施这些话是有道理的. 既然永远取不完，那末在无穷年代后，还应当留点很微小、很微小、小到不能再小的长度，而所留下的长度似乎又不能用数表出，这是辩证关系？传统数学上说棒长变化的极限是0，把这个辩证关系掩盖了. 但在我国历史上也能找到承认这种辩证法的思想家. 南宋洪迈在评论惠施这段话时就认为惠施这些话确有道理. 在洪迈的著作《容斋随笔》卷第九《尺棰取半》条有这样一段话：

‘庄子载惠子之语曰："一尺之棰日取其半，万世不竭."虽为寓言，然此理固具，盖但取其半，正碎为微尘，余半犹存，虽至于无穷可也. …’

可见洪迈认为将尺棰无穷碎分，经无穷代取半后，应留下微小的尘埃，而不是空无所有. 洪迈给我们的启示是把万世说成无穷年代使我们有了“无穷”(或无限）这个概念，这里是时间的无穷和取半次数的无穷.

我们再看外国的一个例子，在约2400年前，古希腊哲学家Zeno(公元前495——公元前435）有一种诡辩，叫“永远跑不完的路程，”大意是：一个人要想跑完某一路程，必先跑这路程之半，然后跑余半之半，再跑余半之半之半，等等，这人总有所余之半要跑，所以永远跑不完全程.

这实际和“尺棰取半”同一性质，重要的是永远跑不完.

上面所举棒长的变化和路程的变化都归结为如（1）的数列. 我们已经指出：如果说

$$\lim \frac{1}{2^{n+1}} = 0,$$

那就体现不出“万世不竭”和“永远跑不完”，从而掩盖了问题的辩证实质。因此，我们撇开这种极限说法，并仔细分析问题的辩证实质。我们设想这数列（1）有最终项，（即第无穷多项），并认为这最终项就是这数列各项所达到的最终结果，或称为终项，或称为终值。由于这数列的各项都大于0并且永远达不到0）所以这数列的终项或终值也应大于0．另一方面，由于这数列的项向后延伸能小于任何很小很小的正数（例如对于数10^{-1000}，这数列中就有2^{-4000}和其他很多项小于这个数）×所以（1）的终项或终值必须小于所有的正数。综观两方面，可见如（1）的有理数列的终值必是这样的数，即大于0并小于所有正数的“数”，但仔细看来，如果局限于目前数系，这样的数是不存在的，因为小于所有正数的数最大的只能是0，而不能大于0。

从数学发展历史看，这种“大于0并小于所有正数的数”是微积分创始人之一莱布尼兹最先提出来的。在研究大于0的$\triangle x$（$\triangle x \neq 0$）变化越来越接于0的时候，莱布尼兹认为$\triangle x$变化的最终结果不是0而是我们上面所说的那种“大于0但又小一切正数的数”，并称这种数为无限小（也叫无穷小，英文为 infinitesmal），还采用记号 dx 表示这种无限小，并称dx为微分，即$\triangle x$变化的最终结果为无限小dx（即微分 dx），而 dx 是大于0小于所有正数的数，在17——18世纪约100年间，这种无限小 dx 成为微积分的基础。但在以后的年代，一些后继者，不承认这种无限小。并说在地球上找不到这种数。于是极限方法成为微积分的发展

工具，由于极限方法掩盖了上述无限小的辩证实质，这种辩证的无限小就被抛弃了，而代以假的微分$dx=\triangle x$，后来又用“ε—N语言”及“ε—δ语言”把极限定义严格化，到现在理论已经很完备了。当然像“$\triangle x=1/2^n$永远达不到0”这种概念就不被人们注意了。好在这并不影响一切的数值演算，因而也不影响数学的应用，辩证的无限小就默默地消失了。

马克思对数学颇有爱好，就在数学家抛弃这种无限小概念的时候，是他用辩证的观点肯定这种无限小的存在。他认为被看作无限小的微分dx当作一个数必须是0（$dx=0$），但由于dx是从不等于0的$\triangle x$变来的，那么dx又不同于什么都没有的0。显然这说法和上面的“$dx>0$又小于所有的正数”是一致的，有的人认为马克思一方面写$dx=0$，同时又把dx不作为0看待，是搞自相矛盾。这当然是对辩证法的误解，马克思实质上也是把如（1）的终值和0，0，0，…的终值区别开。

近代数学分析权威R．柯朗（Richard Courant）对莱布尼兹的无限小十分赞赏。在他的名著《什么是数学》中有如下的一些话：

‘如果我们跟著莱布尼兹和他的众多后继者说出像下面的一些话，那末神秘和紊乱才会出现：“$\triangle x$不是趋于0，相反，$\triangle x$的‘终值’不是0，而是一个‘无限小的量’，一个被记如dx的‘微分’，并且同样$\triangle y$有一个‘最终的’无限小值dy。这两个无限小微分的实在商重新成为一个寻常的数，$f'(x)=dy/dx$。”于是莱布尼兹称导数为“微分商”

（或"微商"）。这些无限小的量被看成一种新的数，不是0，但小于实数系中的任何正数，只有那些具有真切数学意识的人才能掌握这个概念，并且微积分被认为是真正困难的，因为不是每一个人具有或能发展这种意识……。

再指出一点注意：虽然"微分"当作无限小量现在肯定地不荣誉地被抛弃了，但同一词"微分"却又从后门溜了进来——这一次指的是完全正当的和有用的概念。现在它只简单地表明差数$\triangle x$，在$\triangle x$与其他出现的量相比为小的时候。……'

从这些话可以看出：R．柯朗虽然认为莱布尼兹的无限小导致神秘和紊乱，但他也说具有真切数学意识的人是能掌握这种"大于0但又小于所有正数"的无限小概念的，并且他说抛弃这种无限小是不荣誉的。再者，虽然柯朗说现在的微分$dx=\triangle x$是正当的和有用的，但又讥讽这微分$dx=\triangle x$是从后门溜进来的。这些足以说明柯朗对莱布尼兹无限小的赞许和留恋，可惜他未能把这种无限小概念贯彻到极限方法中。现在我在这本小册子里来完成这项工作。

我们回到数列（1）．如上面所分析，这数列的终值必是大于0并小于所有正有理数的"数"，显然上节例2和例5两数列的终值也是这样的"数"．至于上节例3的终值应是小于0并大于所有负有理数的"数"，而上节例4的终值的绝对值是大于0并小于所有正有理数的"数"．我们说这些数列的终值均为无限小。我们用0^*表无限小，以别于静止的0．由上述可见无限小0^*有三种：

（i）正型无限小，记如0^*_+（>0），即0^*_+（>0）是大

于0并小于所有正有理数的“数”；

（ii）负型无限小，记如0^*（＜0），即0^*（＜0）是小于0并大于所有负有理数的“数”；

（iii）无限小0^*是这样的“数”，其绝对值$|0^*|$大于0并小于所有的正有理数。

至于像（1）那样的数列（包括上节例1，2，3，4，5）越来越接近于0的事实，可仍用“ε—N语言”来刻划，于是我们给出“数列终值为无限小0^*”的如下定义：

定义Ⅰ　设x_1，x_2，x_3，…，x_n，…　　（2）

为有理数列，并且有无穷多项不是0．对于任意给的正有理数ε（ε＞0），如果有自然数N＝N（ε）使当n＞N（即n＝N＋1，N＋2，N＋3，…）时恒有

$$0 \leqslant x_n < \varepsilon, \tag{3}$$

则称x_n的终值为正型无限小0^*（＞0），记如

$$\text{fin}\, x_n = 0^* \ (>0) \qquad (\text{fin意为最终}). \tag{4}$$

如果把（3）换成　$-\varepsilon < x_n \leqslant 0$，　　（3′）

则称x_n的终值为负型无限小0^*（＜0），记如

$$\text{fin}\, x_n = 0^* \ (<0) \tag{4′}$$

如果把（3）换成　$|x_n| < \varepsilon$，　　（3″）

则称x_n的终值为无限小0^*，记如　$\text{fin}\, x_n = 0^*$．　　（4″）

对于静止数列0，0，0，…，我们称它的终值为0，记如　$\text{fin}\, 0 = 0$．

我们用这定义Ⅰ来验证

$$\text{fin} \frac{1}{2^{n-1}} = 0^* \ (>0).$$