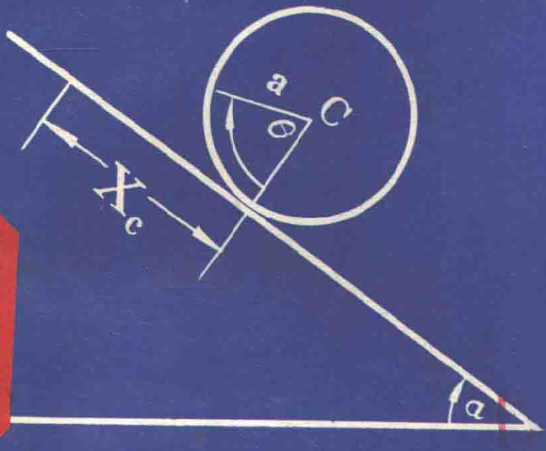
分析力学

刘永 编



FENXI
LIXUE

黑龙江科学技术出版社

分　析　力　学

FENXI　LIXUE

刘　永　编

黑龙江科学技术出版社

一九八四年·哈尔滨

封面设计：柳正英

分 析 力 学

刘 永 编

黑龙江科学技术出版社出版

（哈尔滨市南岗区分部街28号）

长春新华印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行

开本787×1092毫米 1/32·印张 9.625·字数190千

1984年4月第一版·1984年4月第一次印刷

印数：1—5,400

书号：13217·093　　定价：1.20元

前　言

1788年拉格朗日发表了分析力学一文，从虚位移原理出发，用纯粹的数学方法处理力学问题，从而使力学的发展出现了一个新的转折。后来哈密顿又丰富了拉格朗日原理，不仅以广义坐标，而且以广义动量作为共轭变量来描述质点或质点系的运动，把牛顿定律表述成更普遍的变分原理的形式。由于它与坐标的具体选择无关，因而能更好地反映不同坐标系中运动的共同特征和运动的普遍性。必须强调它不限于力学运动形态的范围，即力学规律只作为它的一种特殊情况，也可以用统一形式反映不同运动形态的规律。所以，分析力学是近代力学发展的基础。

分析力学的研究方法和特征，是以自然界带有普遍意义的概念——能量为出发点，以普遍原理（微分或积分形式）为基础，用严格的数学分析方法导出运动微分方程，以及研究微分方程的积分。上述方法，不仅适用于研究纯力学现象问题，而且对于研究工程技术问题，也可提供有效的通用工具。

本书内容既注意严格推理的分析方法，又注意联系实际，力求阐明力学的物理意义。同时，为了加深读者力学方面的知识，又介绍了非完整约束系统的方程，以及狭义相对论中的拉格朗日和哈密顿方法等内容。关于微振动方面，从一

维、二维入手，介绍有关微振动的物理概念，而后推广到多维微振动。还介绍了所涉及的本征值、本征矢量等重要物理概念和处理方法。

本书是总结多年教学实践和参考国内外有关资料编写而成的。由于水平所限，书中不足之处，敬希读者赐教。

目　录

第一章　约束　广义坐标

§1·1　约束的概念及分类

当一个物体受到另一物体的阻碍而使它的运动受到一定限制时，即这个物体受到了约束。约束就是限制物体不能任意运动的条件。自由质点可以在空间任意运动，究竟如何运动，则由作用于质点上的力及初始条件所决定。而非自由质点则受到某些外加条件的限制，无论作用在质点上的力和初始条件如何，运动总是沿着确定的轨道或限于某一区域中的轨道发生。如火车被限制在铁轨上运动，单摆被限制作圆周运动。从运动学观点来看，约束对于系统的作用就在于它们对于系统各质点的位置给以一定的限制，使得系统各质点的坐标之间必须满足一定的几何关系。有的约束不仅限制质点的位置，而且限制其运动。

（一）几何约束与运动约束

几何约束（完整约束）：限制质点系位置的约束。例如单摆被限制在 xoy 平面上运动，若摆长视为不可变形，长度为 l。则其约束方程为

$$x^2+y^2=l^2$$

又例如一质点被限制在一固定的球面上运动，其约束方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

R 为质点与球心的距离。

又例如两质点由刚性杆相连，则此两质点所组成的系统在直角坐标系中的约束方程为

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=l^2$$

(x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2) 为两质点的坐标. l 为两点的距离。

对于 n 个质点组成的系统来说，其几何约束的一般形式为

$$f(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \cdots\cdots x_n, y_n, z_n; t)=0$$

或 $f(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \cdots\cdots x_n, y_n, z_n)=0$

从以上例子可以看到，约束一方面指物体运动时所受到的限制。另一方面，约束也包含物体刚性意义在内。组成刚体各质点之间正由于具有几何约束，才使得保持了刚性。

运动约束（非完整约束）：约束不仅限制质点系的位置，而且限制其速度。

运动约束又称为微分约束。约束方程除含有坐标外，还含有坐标的微分。微分约束有的经过积分后可变为几何约束。若不能积分，称为非完整约束。

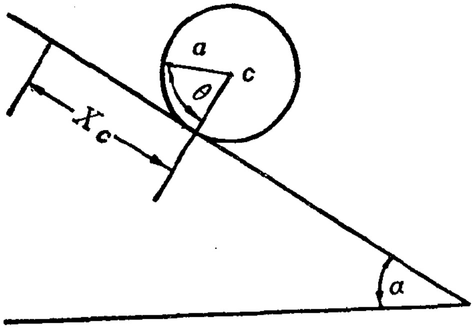
例如均质圆柱体的半径为 a，沿倾角为 α 的斜面滚下，若无任何滑动，则圆柱体的质心的速度必须满足

$$\dot{x}_c=a\dot{\theta}$$

$\dot{\theta}$ 为绕质心轴转动的角速度. 此方程可以积分为

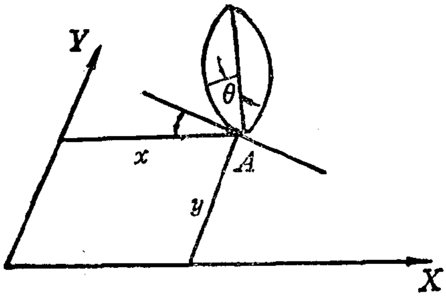
$$x_c-a\theta=c$$

c 为常数. 这是不包含微分或速度投影的方程，所以是几何约束或完整约束（图1—1)。



（图1—1）

例如一半径为 a 的薄圆盘在水平面上作纯滚动，圆盘与平面接触点 A 的坐标为 x，y，圆盘边缘 A 点的切线同 x 轴夹角为 φ，圆盘平面与水平面接触点的速度必等于零。



（图1—2）

$$\dot{x}\sin\varphi+\dot{y}\cos\varphi=0$$

$$\dot{x}\cos\varphi+\dot{y}\sin\varphi=a\dot{\theta}$$

以上方程不可能积分而得到坐标 x，y，θ，φ 之间的关系。因此，是非完整约束。

（二）稳定约束与非稳定约束

在动力学中，有的约束与时间有关，有的约束与时间无关。因此，又把约束区分为稳定约束与非稳定约束。

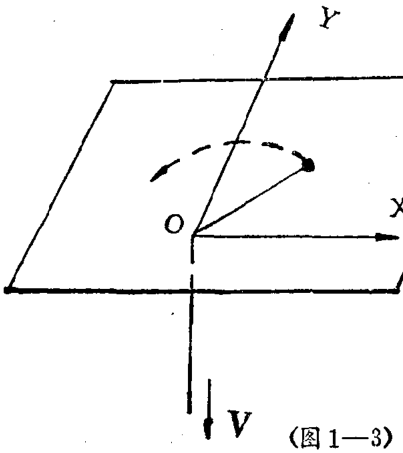
稳定约束：约束方程式不显含时间 t . 即约束不随时间而改变。也就是说，限制质点运动的条件是不随时间而改变。稳定约束方程式虽然不显含时间 t ，但当质点运动时，它的位置坐标是时间的函数，故约束方程式中隐含时间 t .

非稳定约束：约束方程式中显含时间 t ，即约束条件随时间而改变。

例如小球在光滑平面上运动，用一根不可伸长的绳子穿过一小孔 O，一端与小球连接，一端以速度 v_0 下拉。则其约束方程式为

$$x^2+y^2=(l-v_0t)^2$$

l 为绳长。此约束为非稳定约束，如图1—3所示。

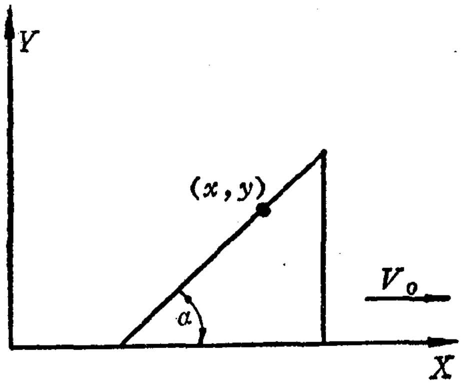


（图 1—3）

又例如质点被限制在斜面上运动，而斜面又以等变速 a 在平面上作平动，若开始时斜面底边顶点在坐标原点，初速度为零，则质点运动时，它的坐标满足

$$y-\left(x-\frac{1}{2}at^2\right)tg\alpha=0$$

此约束为非稳定约束，如图1—4所示。



（图1—4）

因此，对于稳定约束的一般方程式为

$$f(x_1,y_1,z_1;x_2,y_2,z_2;\cdots\cdots x_n,y_n,z_n)=0$$

而对于非稳定约束的一般方程为

$$f(x_1,y_1,z_1;x_2,y_2,z_2;\cdots\cdots x_n,y_n,z_n,t)=0$$

（三）可离（可解）约束与不可离（不可解约束）

质点始终不能脱离的那种约束，如质点用刚性杆与固定点相连，其所受的约束为不可离约束。相反，质点虽受约束，但在某一方向可以离开，称为不可离约束。如质点在球面上运动，是可离约束。

不可离约束的一般方程式为

$$f(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \cdots\cdots x_n, y_n, z_n) = 0$$

或

$$f(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \cdots\cdots x_n, y_n, z_n, t) = 0$$

而可离约束的一般方程式为

$$f(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \cdots\cdots x_n, y_n, z_n) \lesseqgtr 0$$

或 $$f(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \cdots\cdots x_n, y_n, z_n; t) \lesseqgtr 0$$

§1·2 广义坐标

一个自由质点在欧氏空间中运动，它可以在空间的三个独立的方向任意运动，可以用三个独立参变量确定其位置，如直角坐标 x、y、z；柱坐标 r、φ、z；球坐标 r、φ、θ。也就是说，自由质点有三个自由度。对于非自由质点，受到约束，其自由度就减少。例如质点沿一空间曲线运动，质点的坐标 x、y、z 必须满足约束方程式，因此三个坐标中只有两个是独立的。确定质点位置的独立参变量的个数称为质点的自由度数。质点的自由度数等于 3 减去约束方程的个数。对于质点系，可以由一个质点推算得出。如 n 个质点，有$3n$个直角坐标，若质点系有 k 个约束，则有$s=3n-k$ 个自由度。

决定约束质点或质点系在空间位置的独立参变量可以由直角坐标中挑选，也可以由平面极坐标，或柱坐标，以及球坐标等坐标中挑选。但通常选比较方便的独立参变量。例如质点被限制在平面上作圆周运动，选平面极坐标 (r, φ)，由于 r 一定，故其独立参变量为 φ。又如质点被限制在圆锥内表面内运动，则选圆柱坐标 $(r$、φ、$z)$，但质点的运动受到限

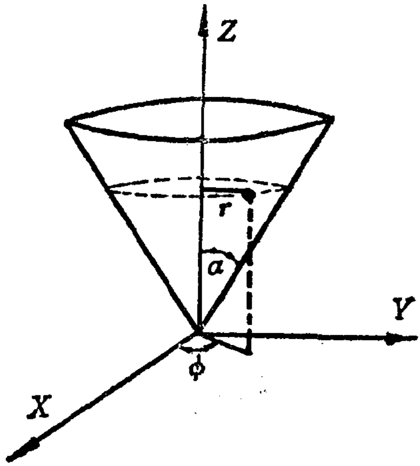
制，其约束方程为 $z=r\mathrm{ctg}\alpha$，其自由度为两个，故选独立参变量 (r,φ)（图1—5）确定质点的位置。

一般把确定质点或质点系位置的独立参变量称为广义坐标。常用 $q_1, q_2, \cdots\cdots q_s$ 表示。直角坐标与广义坐标有一定的关系，如以上例子质点的直角坐标与广义坐标的关系为

$$x=r\cos\varphi$$

$$y=r\sin\varphi$$

$$z=r\mathrm{ctg}\alpha$$



（图1—5）

对于质点系，每一质点的直角坐标与广义坐标的函数关系一般表达式为

$$x_i=x_i(q_1, q_2, \cdots\cdots q_s; t)$$

$$y_i=y_i(q_1, q_2, \cdots\cdots q_s; t)$$

$$z_i=z_i(q_1, q_2, \cdots\cdots q_s; t)$$

$i=1,2\cdots\cdots n$.

或由质点的位置矢径表示

$$\vec{r}_i=\vec{r}_i\ (q_1, q_2, \cdots\cdots q_s; t)$$

广义坐标可以是长度，也可以是角度或其他物理量．在完整约束条件下，自由度数与广义坐标的数目相等．

第二章　虚位移原理

虚位移原理的最初形式是由斯蒂文和伽利略等在研究了杠杆、斜面、滑轮等机械运动的规律得出的. 于十八世纪初，伯努利提到了虚位移原理的普遍意义，但没有证明. 后来，拉格朗日加以证明.

虚位移原理是把动力学的概念和方法用于解决力学系统的静力平衡问题. 其特点，是在建立力学系统平衡条件时，只考虑主动力，不考虑约束力. 因此，它对解决静力平衡问题有其方便之处. 即消除了系统的约束力，得出了质点系统平衡时主动力之间的关系. 这是虚位移原理的优点.

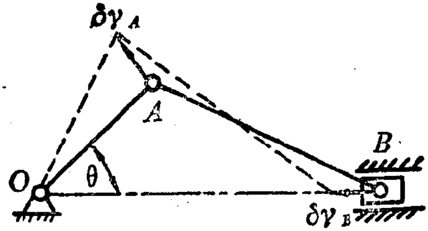
§2·1　虚位移的概念

虚位移是质点或质点系处于静止时，人为给予的假想的位移. 也是在约束容许条件下，质点系中任何质点在平衡位置附近可能发生的微小的位移. 因为任何机械运动在某一位置处于平衡，在另一位置不一定就平衡. 因此，这种位移不能任意给定. 不能随所欲取.

什么叫虚位移，确切地说：

"在约束容许条件下，系统在平衡位置附近可能发生的极其微小的与时间无关的位移".

例如曲柄连杆机构，当曲柄位置确定以后，即φ角确定时，整个系统位置就完全确定．而在约束容许条件下，O点不能有虚位移，A点的虚位移，只能以OA为半径，以O为圆心的圆周上，B点的虚位移只能沿滑块滑道的直线方向上．整个杆系每个质点都有一个微小的位移，这些微小的位移组成杆系的虚位移．如图2—1所示．



（图2—1）

实位移与虚位移的不同：

①实位移是在一定的力学条件下，在一定的时间间隔中完成，而且朝一定的方向产生的位移．而虚位移是假想的，它只满足于约束所给予的条件而与主动力无关，与时间无关．

②实位移是实际存在的位移，因此是唯一的．而虚位移是可能发生的位移，所以不止一个．

③在稳定约束条件下，实位移是虚位移中的一个，但在非稳定约束条件下，实位移与虚位移并不重合．

§2·2 虚位移原理

虚位移原理表述了在具有理想约束质点系平衡问题的普