材料力学解题指导

房腾祥 编

华南工学院出版社

内 容 简 介

本书共十三章，主要包括拉伸与压缩、剪切、扭转、梁的内力、平面图形几何特性、梁的应力、梁的变形、应力状态理论与强度理论、组合变形、能量法、超静定系统、动载荷和压杆稳定。每一章均包括：解题方法提要、典型例题、题解和习题四个部分。

本书可作为高等工业学校土建类、机械类“材料力学”教学参考书，也可供自学人员及工科学生报考研究生时复习参考。

材料力学解题指导

房[illegible]祥　编

·

华南工学院出版社出版

广东省新华书店发行

华南师大印刷厂印刷

·

开本：787×1092 1/32　　印张：15.3125 字数：343千字

1986年12月第1版　　1986年12月第一次印刷

印数：0—60000

统一书号：13410·019　　定价：3.60元

前　言

材料力学是研究构件在外力作用下的强度、刚度和稳定性的科学。这门学科有大量的强度、刚度和稳定性的解题训练，这种训练又是学习工程设计的重要环节。

材料力学不仅是攻读工程设计课程不可少的阶梯，而且是学习许多工程技术课程的基础。因此，许多理工科专业都把它作为一门重要的技术基础课程；想自学成才的人，也都视它为进一步学好其他学科的必要桥梁。

学习材料力学，不仅要求对材料力学基本概念和规律有正确的理解，而且要求对材料力学理论和计算技巧灵活地运用，这两者又集中在解题上。但是，把具体工程问题抽象为力学模型，并用材料力学方法加以正确解决，许多读者感到有一定的困难，迫切希望有一本带有启发性和实用性的解题指导书。为此，编者依据自编的教学讲义《材料力学英文习题与例题》上、下册，（1983年）及国内外最新教材中的新资料，根据少而精的教学原则编写了这本书。

编者基本上遵循了教育部审定的“材料力学”教学大纲，结合自己多年的教学经验，把立足点放在培养读者分析问题和解决问题的能力上。本书力求体现科学性、实用性和启发性，做到由浅入深、循序渐进、题目新颖、思路清晰、内容全面、便于自学。

本书的编写得到何枝宏教授的帮助及主审全书，在此表示衷心感谢。

由于编者水平所限，书中错误和欠妥之处敬希读者和同行专家指正。

编　者
1986年3月

目 录

第一章　拉伸与压缩

一、解题方法提要

1．截面法　截面法是计算内力基本而重要的方法，其要点：

①在欲求内力处，用假想截面将物体截开；

②用内力代替被截开的两部分之间的相互作用，内力以正的方向示出；

③对其中任一部分用静力学平衡方程求出未知的内力（轴力）。

2．计算杆横截面上的应力应用公式：

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

3．计算杆件的变形时，依据

$$\triangle l = \Sigma \frac{N_i \; l_i}{E_i \; A_i}$$

若轴力N或面积A连续地变化时，可用积分计算杆件的伸长（或缩短）

$$\triangle l = \int_l \frac{N(x)\,dx}{EA(x)}$$

4．依据已知和未知条件不同，可用强度条件分别进行强度校核，计算截面尺寸和确定许可载荷，强度条件为：

$$\sigma = \frac{N}{A} \leqslant [\sigma]$$

5．拉伸与压缩的超静定问题解题要点一般为：

①分析约束反力，列出静力学平衡方程——静力学方面。

②解除多余的约束使结构变成静定的。根据变形协调及变形前后各杆件的几何位置，建立变形的几何关系。

③根据虎克定理。建立力与变形之间的物理关系，并将其代入变形几何关系中，即可得补充方程。

④将补充方程与静力学平衡方程联立求解，即能得到全部未知力。

二、典型例题

例题1　一横截面积为500mm^{2}的钢杆，受力如图示，试作杆的轴向力图及求杆的总伸长；钢材$E=200$GN／m^2。

（一）题意分析　本题是已知杆的长度，截面积和所受的多个轴向力，要求轴力图及杆的总伸长。

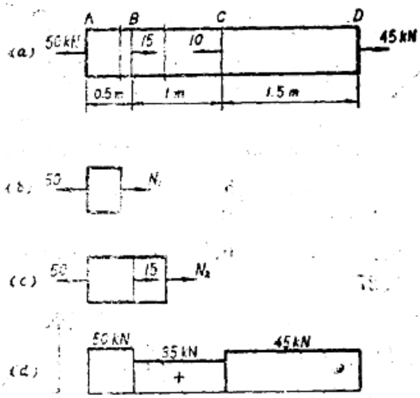
（二）解题思路

①由于有多个轴向载荷的作用，必需用截面法求出各段的轴力，才能正确地画出轴力图。

②依据各段不同轴力的虎克定理$\triangle l=\Sigma \frac{N_i\ l_i}{E_i\ A_i}$求杆件的总伸长。

（三）解题方法

①作轴力图　由于B、C、截面处有轴向外力15kN和10kN的作用，使之AB段，BC段、CD段的轴力不相同。因此，必须求出三段的轴力，然后画出轴力图。



例1－1图

为求AB段的轴力，以假想的截面1—1。在AB之间将杆件截开并分为二部分，保留其左边部分。假设截面上的轴力N_1为正，即拉力示出，如图（b）所示，再由平衡方程求出N_1。

$\Sigma X=0$，　　$N_1-50=0$，　　$N_1=50\text{kN}$

同样可以求得BC段的轴力，假设N_2为正的方向图(c)。根据平衡方程求出N_2。

$\Sigma X=0$，　　$N_2+15-50=0$，　　$N_2=35\text{kN}$

对于BC段的轴力，以假想截面在CD处截开，以右边部分为分离体同样可求得$N_3=45\text{kN}$。

注：若解题时求得最后结果N是负值时，则表明图设N为拉力与实际轴力方向相反，即轴力应为压力。

②求杆的总伸长

因各段的轴力不同，求杆的伸长时用公式

$$\Delta l=\Sigma\frac{N_i l_i}{EA}=\frac{N_1 L_1}{EA}+\frac{N_2 l_2}{EA}+\frac{N_3 l_3}{EA}$$

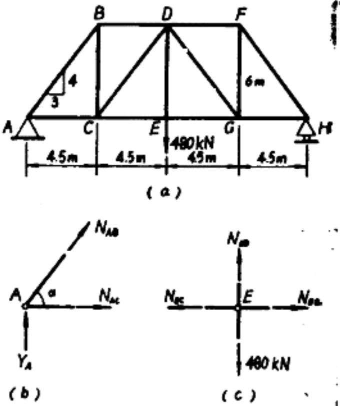
$$=\frac{50\times10^3\times0.5}{200\times10^9\times500\times10^{-6}}+\frac{35\times10^3\times1}{200\times10^9\times500\times10^{-6}}$$

$$+\frac{45\times1.5}{200\times10^9\times500\times10^{-6}}$$

$$=0.25\times10^{-3}+0.3\times10^{-3}+0.675\times10^{-3}$$

$$=1.275\text{mm}$$

例题2 桁架的受力及各部分尺寸如图（a）所示。若承受载荷$P=480$kN，材料的许用应力［σ］＝200 MPa试求DE和AB杆的面积及DE杆的伸长，杆的弹性模量，$E=200$ GPa。



例1－2图

（一）题意分析

本题是已知桁架承受的载荷及杆的许用应力，要求桁架中的DE和AC杆的面积及DE杆的伸长。

（二）解题思路

①桁架中各杆为二力杆，可以用节点法求桁架中杆的内力；以A节点及E节点平衡可求得DE和AC杆受力。

②然后依据$\sigma=\dfrac{N}{A}\leqslant$［σ］求杆的截面积。

③依据$\Delta l=\dfrac{Nl}{EA}$求DE杆的伸长。

（三）解题方法　首先求出支座A、H的约束反力Y_A及Y_H，由对称性可知$Y_A=Y_H=240\text{kN}$。

再用节点法，节点A受力如图（b）所示。

$\Sigma Y=0$，　　$N_{AB}\sin\alpha+Y_A=0$

$N_{AB}\times\dfrac{4}{5}+240=0$　　$N_{AB}=-300\text{kN}$（压力）

$\Sigma X=0$

$N_{AB}\cdot\cos\alpha+N_{AC}=0$

$N_{AC}=-N_{AB}\cos\alpha=-(-300)\cdot\dfrac{3}{5}=180\text{kN}$

同样，节点E受力图如图（c）所示。

$\Sigma Y=0$　　$N_{ED}=480\text{kN}$

DE和AC杆所需的面积为：

$$A_{DE}=\frac{N_{DE}}{[\sigma]}=\frac{480\times10^3}{200\times10^6}=2400\times10^{-6}\text{m}^2=2400\text{mm}^2$$

$$A_{AC}=\frac{N_{AC}}{[\sigma]}=\frac{180\times10^3}{200\times10^6}=9\times10^{-3}\text{m}^2=900\text{mm}^2$$

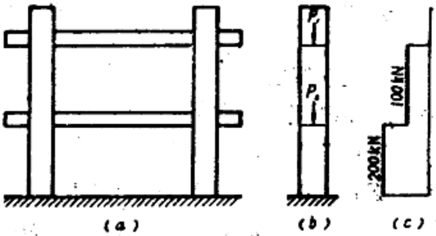
DE杆的伸长为：

$$\Delta l_{DE}=\frac{N_{DE}l_{DE}}{EA_{DE}}=\frac{480\times10^3\times6}{200\times10^9\times2400\times10^{-6}}$$

$$=6\times10^{-3}\text{m}=6\text{ mm}$$

例题3　柱支承着梁如图示。柱两侧的横梁各将其所承受的载荷的一半传递到主柱上，柱受力简图如图（b）所示。若已知柱的横截面尺寸为20×20（cm），传递到柱上的荷载$P_1=P_2=100\text{kN}$，求柱内最大应力。

（一）题意分析　本题已知二层横梁传到柱上的载荷，要求柱内最大应力。



例1－3图

（二）解题思路

①因为柱上有二个以上的轴向力，因此必须画出轴力图，确定哪一段的轴力较大；

②最大应力发生在轴力最大的截面，可依

$$\sigma_{max}=\frac{N_{max}}{A}$$求得。

（三）解题方法　首先用截面法计算柱上、下两段内的轴力，并画出轴力图，如图（c）所示。

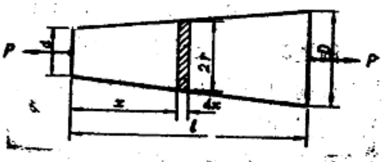
由轴力图知，$N_{max}=200$kN

则柱内最大应力发生在柱的下段。

$$\sigma_{max}=\frac{N_{max}}{A}=\frac{200\times10^3}{20\times20\times10^{-4}}=5\text{ MPa}（压应力）$$

例题4　图示一圆锥形杆，其大小两端直径为D与d，杆长为l。求杆受P力作用产生的伸长。

（一）题意分析　本题已知锥形杆受拉力作用，求杆的伸长。



例1－4图

（二）解题思路

①因为锥形杆每一横截面的直径是变化的，因此必须以微段杆dx来求伸长 $d(\triangle l)$。

②整根杆的伸长用积分求得，即 $\triangle l=\int_0^l d(\triangle l)$。

（三）解题方法　首先求出微段长dx的伸长。由相似三角形关系知

$$r=\frac{d}{2}+\frac{x}{l}\left(\frac{D-d}{2}\right)$$

$$d(\triangle l)=\frac{Pdx}{\pi\left[\frac{d}{2}+\frac{x}{l}\left(\frac{D-d}{2}\right)\right]^2 E}$$

整杆的伸长，等于杆上所有dx段伸长的总和。

$$\triangle l=\int_0^l d(\triangle l)=\int_0^l\frac{4Pdx}{\pi\left[d+\frac{x}{l}(D-d)\right]^2 E}$$

$$=\frac{4Pl}{\pi DdE}$$

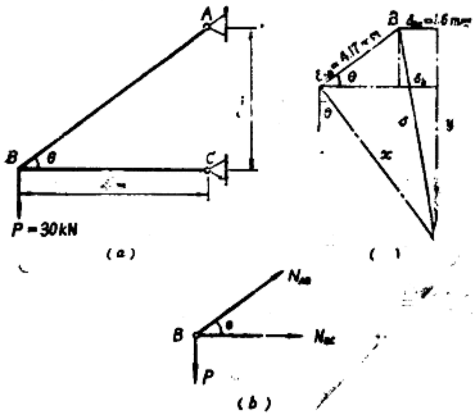
例题5　如图示，二钢杆AB和BC，承受载荷$P=30\text{kN}$，AB杆的截面积为300mm^2，BC杆为500mm^2，材料$E=200\text{GPa}$，求B点的水平和竖向位移。

（一）题意分析　本题已知结构尺寸及受载荷P的作用，要求B点的水平位移和竖向位移。

（二）解题思路

由于要求B点的水平位移及竖向位移，因此必须求得AB和BC杆的伸长（或缩短），然后依据变形后B点的位置，由几何关系求得B点的水平和竖向位移。

（三）解题方法



例1－5图

①求AB、BC杆受力

由静力学平衡方程，节点B平衡可求得，$N_{AB}=50$kN（拉力），$N_{BC}=-40$kN（压力）

②求AB、BC杆的伸长或缩短

要求B点的位置，首先要求出各杆的轴向位移。

$$\delta_{AB}=\frac{N_{AB}\,l_{CB}}{E\ A_{AB}}=\frac{50\times10^{3}\times5000}{200\times10^{9}\times300\times10^{-6}}=4.17\text{mm}$$

$$\delta_{BC}=\frac{-40\times10^{3}\times4000}{200\times10^{9}\times500\times10^{-6}}=-1.6\text{mm（缩短）}$$

B点的水平位移即为δ_{BC}。

$\delta_h=\delta_{BC}=1.6$mm

现求B点竖位置：由图（c）几何关系知，

$$\delta_h = x\sin\theta - \delta_{AB}\cos\theta$$

$$1.60 = x\left(\frac{3}{5}\right) - 4.17\left(\frac{4}{5}\right), \quad x = 8.23\text{mm}$$

故垂直位移 δ_v 为，

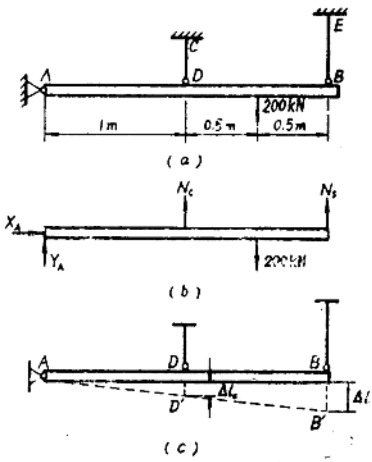
$$\delta_v = \delta_{AB}\cos\theta + x\cos\theta$$

$$= 4.17 \times \frac{3}{5} + 8.23 \times \frac{4}{5} = 9.09\text{mm}（向下）$$

例题6　水平刚性杆AB，承受载荷200kN，如图（a）所示。AB杆由EB钢杆和CD铜杆所支承，面积分别为 500mm^2 和250mm^2，求EB及CD杆中的应力。钢材料 $E = 200$GPa，铜材料$E = 120$GPa 。略去AB杆之质量。

（一）题意分析

本题为已知刚性杆受到载荷作用和支承情况，要求结构中 BE 和 CD 杆中的应力。



例1－6图

（二）解题思路

①因为要求 BE 和 CD 杆中的应力，因此必须求出 BE 和 CD杆的受力。为此须以 AB 刚杆为分离体平衡，列出静力学平衡方程。当平衡方程列出后，可知未知力的数目多于方程的数目，是超静定问题，必须考虑结构的变形。

②以刚杆AB变形前后的位置，求出BE和CD杆变形的几何关系。

③以物理关系$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$代入几何关系中，可得补充方程再与静力学平衡方程联立求解，即可求得BE和CD杆的受力，然后再求各杆中应力。

（三）解题方法

①首先由静力学平衡方程

以AB杆的平衡可得

$$\Sigma X = 0 \qquad X_A = 0 \qquad ①$$

$$\Sigma m_A(P) = 0 \quad 1000N_C + 2000N_s - 200\times10^3\times1500 = 0 \quad ②$$

$$\Sigma Y = 0 \quad Y_A + N_c + N_s - 200\times10^3 = 0 \qquad ③$$

未知力有X_A、Y_A、N_c、N_s四个，只有三个静力学平衡方程，是一次超静定。需考虑几何及物理方面建立补充方程才能求得未知力。

②变形几何关系

AB杆受200kN力作用后绕铰结点，A刚性转动到AB'位置，由图（c）知：$\Delta l_s = 2\Delta l_c$ ④

③物理关系代入几何关系中，即得补充方程：

$$\frac{N_S\times2000}{250\times200\times10^9\times10^{-6}} = \frac{2N_C\times1000}{500\times120\times10^9\times10^{-6}}$$

得 $N_S = 0.833N_C$ ⑤

④联立解补充方程与静力学平衡方程可求得未知力。将⑤化入②得：$N_C = 112.5\text{kN}$，$N_S = 94\text{kN}$

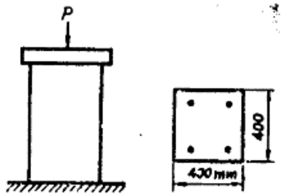
⑤求CD和EB杆中应力

$$\sigma_C=\frac{N_C}{A_C}=\frac{112.5\times10^3}{500}=225\text{MPa}$$

$$\sigma_S=\frac{N_S}{A_S}=\frac{94\times10^3}{250}=376\text{MPa}$$

例题 7 正方形截面的钢筋混凝土主柱上，放置一块刚性板，在板上施加轴向压力$P=300\text{kN}$。若钢筋与混凝土的截面积之比$A_S/A_C=1/40$。两者弹性模量之比为$E_S/E_C=10$，求钢筋和混凝土各受多大的力。

（一）题意分析 已知钢筋混凝土立柱，两种材料一起承受轴向压力；已知两种材料的面积比，弹性模量之比值，求此两种材料中的受力。



例 1 － 7 图

（二）解题思路

题意钢筋分布是对称的，所以钢筋和混凝土受到刚性板的压缩下，变形应相等。由此可得变形的协调关系。

（三）解题方法

①静力学平衡方程

由压板的平衡得：$N_S+N_C=P$ ①

②变形几何关系

因为结构是轴对称，所以钢筋和混凝土受钢性板的压缩下变形应相等，即，$\Delta l_S=\Delta l_C$

③物理关系

以虎克定律代入得变形补充方程