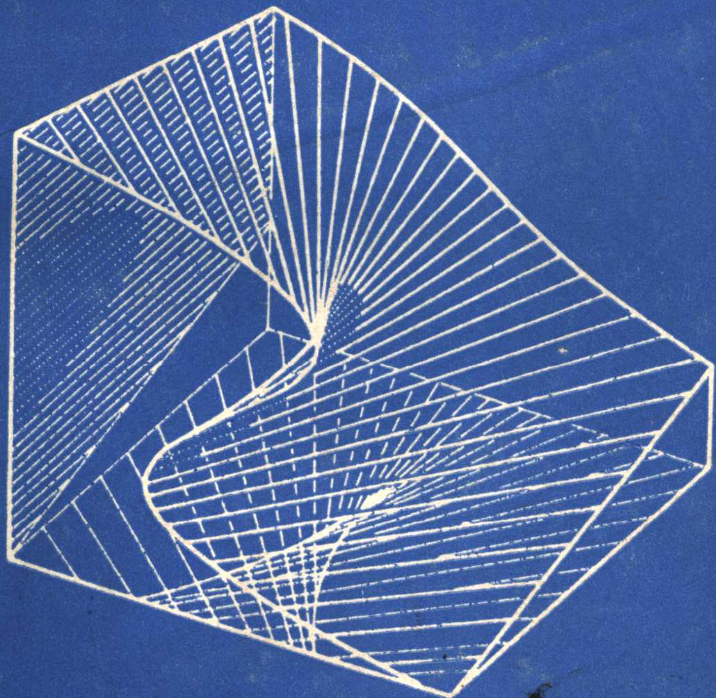
TUBIAN LILUN JIQI YINGYONG

突变理论及其应用



• 凌复华 著 • 上海交通大学出版社

内 容 提 要

对梯度系统中的奇点成功地进行分类，导致法国数学家 Thom 建立了突变理论。这种理论的应用遍及物理科学一类的“硬”科学，也遍及生物科学和社会科学一类的“软”科学的许多领域，解释了其中的一些突变现象，并能进行定性的预测。本书介绍了突变理论的主要数学基础，例如奇点、横截性、结构稳定性、确定度和开折等概念，以及 Morse 引理、分裂引理和特别是 Thom 的分类定理等定理，但避免了过于高深的数学知识。本书对突变理论的各种应用方式作了详细的说明，并列举了不同类型的大量应用实例。

本书适合对于突变理论有兴趣的具有工科数学基础的各类读者，也可以用作大学高年级和研究生课程的教材。

突变理论及其应用

上海交通大学出版社出版

（淮海中路 1984 弄 19 号）

新华书店上海发行所发行

常熟文化印刷厂排版印装

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 7.5 字数 163,000

1987 年 12 月第 1 版 1988 年 1 月第 1 次印刷

印数 1—3,500

ISBN 7-313-00095-2/O 1-0　　科技书目：166-287

定价：1.25 元

序 言

60 年代中期，法国数学家 Thom 创立了突变理论，70 年代中期，“突变热”席卷世界学术界，不仅波及数学界，也波及物理、化学、工程界，更在生物学界和社会科学界掀起了一场轩然大波。这种理论的数学基础相当高深，但它的实际应用又显得十分“容易”，这就使它在具有强烈吸引力的同时，又蒙上了一层神秘的色彩。

我国对于突变理论的介绍和研究，几乎是从十年动乱期一结束就开始了。1978 年起，在报刊杂志上出现了一些介绍突变理论的文章，以后又陆续发表了数十篇研究论文，有的并有较高的水平。但除了作者翻译的“突变理论入门”[31]外，尚未出版其他有关的书籍。作者从 1983 年起，在上海交通大学为研究生开设了“突变理论及其应用”课程，已讲授三次，本书就是在讲义的基础上扩充、修改而写成的。近年来，我们收到不少在不同学科工作的同志的来信，他们希望对突变理论有所了解并能应用，有的并已着手用这种理论来分析和解决他们遇到的实际问题，这是一件很好的事情。但是作者也注意到，不少同志对突变理论的了解只限于“突然变化”，当应用这种理论时常常发生一些概念性的错误。突变理论的数学基础是相当高深的，非数学专业的同志不大可能也没有必要掌握全部数学证明，但他们至少应当对重要的概念和结论有正确的了解。本书的主要目标就是帮助从事应用科学、工程科学、生物科学和社会科学等工作的同志了解突变理论，并帮助他

们应用这种理论去解决各自的具体问题。因此，本书不追求数学上的严格性和完整性，而是尽量用通俗的语言来解释高深的数学内容，并特别着重于提供正确应用这种理论的指南。本书中只列出直接引证的参考资料，详细的文献目录请读者参看[29]、[37]、[56]。

本书的内容可分为四大部分。第一部分是引论，简述了突变理论的发展史和说明了突变理论与其他理论的关系，着重阐释了突变理论的研究对象和适用范围。第二部分是突变理论的主要数学内容，共有七章。第一章是数学预备知识，其余六章对突变理论的数学基础给出了一个比较完整但尽量通俗的说明，其核心是 Thom 的分类定理。其中第三章介绍了 Zeeman 突变机构这一个示教模型，用这个模型可以形象地说明突变理论所研究的现象的一些主要特点。本书附有说明，读者可自制一个并在详细阅读本书之前和阅读中经常自行试验，以得到必不可少的感性知识。读者在第一遍阅读时也可以略去所有的证明、较困难的第五章 1 至 4 节和第六章，而先简单地认可所给出的结论。第三部分是应用方面内容，共六章，其中第八章说明了突变理论的多种可能应用方式，是以后各章所述具体应用的一个总纲。九至十三章所述的种种颇不相同的应用例子表明，突变理论的应用范围十分广泛，应用方式多种多样。关于突变理论的应用的文献十分浩瀚，我们虽注意选择较为成熟的例子，并反映我国学者的成就，但这种选择难免带有一定的任意性。第四部分包括第十四章和结束语，其中介绍了突变理论的一些进一步的内容及其发展趋势。书末有两个附录，附录 1 是我国学者所发表突变理论文献的一份不完整的目录，附录 2 是对上述 Zeeman 突变机构的说明。

最后对“突变”这个译名作一说明。这个词源出自希腊文，

英、法名 catastrophe，德名 Katastrophe，俄名 Катастрофе，日名カタストロフィー，都只是简单的音译。这个词的第一个意义是大灾难、大变动，还常用来描述戏剧在结束前的(悲剧性)决定性转折。在古生物地质学中有一种灾变说(catastrophism)，认为在地球演化过程中，生物物种曾多次灭绝；另一个意义是"突然变化"。在法语中，第二个意义还常常使用，但在英语中，第二个意义已几乎不用了。Thom 选择这个有一些感情色彩的词来描写具有一定数学内涵的突然变化，而与一般意义下的突跳、突变相区别。作者在五年前翻译那本小书[31]时，也根据原文直译为"灾变"。但近年来国内学术界更多地应用"突变"这个译名，因此作者也随流从俗，改用"突变"这一译名。不过应当指出，这个突变不是普通的突然变化，而是有一定数学内涵的突然变化。也就是说，"突变"必定是突然变化，但是突然变化不一定是"突变"。突变理论不能处理所有的突然变化，但能处理"突变"，这一点是要提请读者诸君特别注意的。至于"突变"的具体数学内涵，看完本书第五章当可明了。

本书在成书过程中吸收了选修本课程的一些研究生的有益意见，附录1中资料的收集曾得到锦州师院姜广峰同志的帮助，在此一并致谢。作者竭诚欢迎对本书的批评、意见和建议。

凌复华

一九八七年元月十六日于上海交通大学

目　录

引　论

保加利亚的瓦尔纳是黑海滨的一个避暑胜地。1984 年 9 月，第十届国际非线性振动大会在此召开。中午有一段颇长的休息时间，人们在海边漫步。一位德国教授谈起 30 年前他的一辆汽车，它有个怪毛病，当车速增加到每小时四、五十公里时，车身就激烈抖动，继续增加到每小时八、九十公里，却又平稳如初。但若再把车速减少到每小时六、七十公里，它又会强烈抖动。大家当然知道，这是非线性振动系统中跳跃现象的一个生动实例。谈话间，阵风骤起，原来平静的海面上泛起了汹涌波涛，黑球升起，警告人们不得再出海游泳。我们转而观察海浪，只见远处水面上海水渐渐涌起，顶端越升越高，并从圆滑变为尖锐，最后终于化成白色的浪花，打在海边礁石或淋浴的人们身上。波涛翻滚得更激烈了，笔者不禁遐想，倘若有一艘不那么稳当的小船，它就很可能在波浪中倾覆。

上面提到了三种现象：速度连续变化时汽车振动幅度的突然增加或减少；浪花的形成、发展和破碎；船舶的倾覆。这些看来互不相关的现象却有一个共同特点：某个因素的连续(往往还是光滑，理解为无限次可微)的变化可能导致系统性态的突然变化。这样的例子还可以举出很多，各种各样的失稳现象(压杆在纵向载荷达到临界值时突然弯曲；薄铁皮罐头合端盖可来回揿压到不同的平衡位置；桥梁承载过大时突然倒塌)是常见的例子。更使人感兴趣的是生命的发育，由一个简单的胚胎竟能发展成如此众多的不同形态，并且其中有着

突然的变化。还应该提到语言学，在漫长的人类进化历程中，从猿猴的若干种简单叫喊声发展成如此多样丰富的各种语言，目前仍在应用的也还有一千五百多种。所有这些以及其他许多在连续发展过程中出现突然变化的现象，以及它与连续变化因素之间的关系，就成为一门新兴的学科——“突变理论”——的研究内容。应当指出，虽然传统数学所研究的主要是光滑或连续的过程，但突变现象也已受到注意。上面所述的弹性系统失稳问题，早就有较多的研究。经典的分叉理论，就是处理参数变化时某些定性性态的改变的。但系统地处理并成功地解决大量实际问题，则自突变理论开始。

突变理论的数学渊源可以追溯到 Poincaré，他在一个世纪以前就已指出常微分方程的解有三个要素：结构稳定性、动态稳定性和临界集。但 Poincaré 的思想是超越时代的，不能为当时的数学界所接受。直到 1937 年，Андронов 和 Понтрягин[1] 才提出“粗”系统而确立了结构稳定性的概念。1930 年出现的 Morse 引理[26]，对于突变理论的数学基础是一个重要的贡献。但最大的推动力则来自美国数学家 Whitney 于 1955 年发表的论文——“曲面到平面的映射”[48]。这篇论文奠定了光滑映射的奇异性这种新的数学理论的基础。Whitney 指出，空间曲面到平面的投影只可能有两种奇异性，那就是折叠和尖点。这些正是突变理论创始人 Thom 的著名分类表中最低阶的两种突变。50 年代，Thom 引入横截性概念作为讨论结构稳定性的基础，对一类特殊的系统——梯度系统，可以证明结构稳定系统是稠的。60 年代，他又用这个概念对梯度系统即一类特殊的映射 $f: \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ 的奇点进行分类，并称之为“初等突变”，从而导致突变理论的建立。Thom 的奠基性著作出版于 1972 年[41]，并很快有了英译本。但 Thom 并未

对分类定理进行严格的数学证明，这项工作是后来由 Mather 和 Malgrange 等人完成的。Zeeman 在突变理论的发展中也起了很大的作用，他在理论上、应用上和普及化等方面都做了大量工作[54]。

与数学中的大多数新发展不同，突变理论在其开创初期就是强调应用的。因此，它从未局限于数学界的窄小圈子中，从而鲜为外人所知；相反地，自从 Thom 的奠基著作出版以来，许多著名的科学杂志（如 Scientific American——《科学的美国人》、Nature——《自然》、Science——《科学》）以及一些有世界性影响的报刊杂志(如 The New York Times——《纽约时报》、Newsweek——《每周新闻》)都发表了一些介绍性的文章，在 70 年代中期掀起了一股名副其实的“突变热”。其中影响最大的当推 Zeeman 在《科学的美国人》杂志上所发表的“突变理论”[52]，许多人(包括本书作者在内)正是通过这篇文章接触到突变理论的。当时对突变理论的评价褒贬不一、各走极端的。肯定的说“Newton 发明微积分以来数学史上最大的成就”，或“说明参数的连续改变怎样会引起不连续现象的第一种理论”；否定的说“没有穿衣服的皇帝”，或“一些奇妙的观察伴随着完全无根据的推测”真是无所不有。主要的批评者有 Sussman[49]， Smale[34] 和 Арнольд[2] 等人。但他们对突变理论的数学基础(奇异性理论)及它在硬科学(如物理学)中的应用并无异议，批评集中在“软”科学(如生物科学、社会科学)中的应用上。事实上，Арнольд 本人对奇异性理论就有很大贡献，也致力于它的应用。由于在“软”科学中缺乏可用的数学方法，突变理论的出现自然很受欢迎，应用中有些牵强附会，开始时也在所难免。本书也举出了一些有关的应用例子，读者可以自行作出判断。

十几年来，关于突变理论(主要是应用方面)已发表的学术性论文总数估计在1000篇以上，散见于数学、力学、物理、化学、生物学、社会科学等学科的学术性刊物和会议论文集之中。但是，突变理论不能看成一个独立的数学分支：就应用而言，它与其他学科的关系太密切了；就数学理论而言，也难以确定哪里是突变理论的终点，哪里是其他理论的起点，反之亦然。因此，Thom 一开始就说他提出的是一个数学纲要。Zeeman[55]也说："突变理论这个名称将来有一天会消失，但在这些数学分支中的定理将会继续存在下去，科学中模型化的几何技巧的应用将继续增加。"

那么，Thom 的纲要究竟要解决什么问题呢？我们从与其密切有关的分叉理论谈起。"分叉理论的最一般形式是关于非线性方程平衡解的理论。所谓平衡解，我们指的是例如常解、时间周期解和概周期解。"[19] 这里所说的常解就是一般所谓的平衡点，经典的**分叉理论**研究的是非线性微分方程支配的演化问题的平衡解的分叉。近年来，逐渐认识到存在第四种平衡解或定常运动形式——**混沌**。对混沌解与其他三种定常运动形式相互之间的转化条件的研究十分活跃，其中也常常应用**分叉**这个名词，请看图 0-1 中列举的一些已经研究得比较透彻的关系；又请看文献[45]。

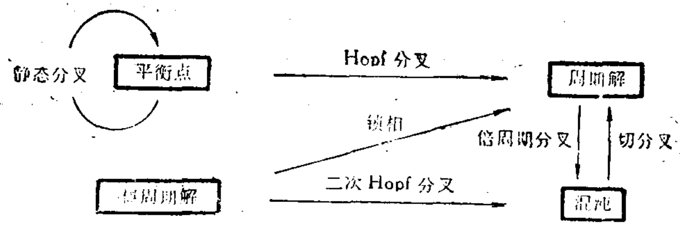


图 0-1　四种定常运动形式之间的转化

突变理论研究的，实际上还是**静态分叉**，即平衡点之间的相互转换问题，这与经典的分叉理论有相似之处，但它的立足点较高，不只是考虑单一参数的变化，而是考虑多个参数变化时平衡点附近分叉情况的全面图像，特别是其中可能出现的突然变化。因此，突变理论在某种意义上包含了静态分叉，而**广义的分叉理论**又在某种意义上包含了突变理论。

还可以用表 0-1[11] 进一步说明突变理论的研究对象。相当一般地，可以用定义在 $x\in \mathrm{R}^n$ 中的 k 个微分-积分方程来描述一个随时间演化的系统，其中带有参数 $c_\alpha(\alpha=1, \cdots r)$。作为它的第一次简化，即不考虑积分项，将得到一个非线性偏微分方程组。第二次简化中不考虑对位置的导数，即不考虑位置的影响，得到一个非线性常微分方程组。对以上这些情况，都难以给出一般性的结论。在第四次简化中得到了一个**动力学系统**，对它已有较多的研究工作。第五次简化后我们有一个**自治动力学系统**，当参数很少时($r\leqslant 4$)，已经可以说出一些有用的结果。第六次简化导致一个**梯度系统**，已有相当多的结果。最后，第七次简化中考虑的是梯度系统的**平衡点**，这才是突变理论的研究对象：突变理论研究由 $\partial v/\partial\psi_i=0$ 解出的诸平衡点 $\psi_i^0(c_\alpha)$ 如何随控制参数 c_α 的改变而改变。按 Thom 的原意，这种理论应当称为**初等突变理论**，他的纲要尚包括**非初等突变理论**，即对**非梯度系统**中的平衡点和其他现象进行研究。近年来，在这个方向上的确有了不少发展，我们将在第十四章中略予提及。但这些发展及其继续，一般已不再冠以突变理论的名称。通常提到的突变理论，其实就是指初等突变理论。还应指出的是，通过对梯度系统平衡点的研究所建立的初等突变理论的实际应用范围，已大大超越了这种平衡点。请参看第八章的一般说明和第九至十三章的实际例子。

这种“超水平”应用最富于吸引力，但也应仔细考虑，尽量避免错误。

表 0-1 突变理论的地位

简化假设	方程 $F_i=0$ 的结构形式	注
0	$F_i(\psi_j; c_\alpha; t; \frac{d\psi_j}{dt}, \frac{d^2\psi_j}{dt^2}, \cdots, x_l; \frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}, \frac{\partial^2\psi_j}{\partial x_l \partial x_m}, \cdots, \int dx_i; \cdots)$	
1	$F_i(\psi_j; c_\alpha; t; \frac{d\psi_j}{dt}, \frac{d^2\psi_j}{dt^2}, \cdots; x_l; \frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}, \frac{\partial^2\psi_j}{\partial x_l \partial x_m}, \cdots; ——)$	
2	$F_i(\psi_j; c_\alpha; t; \frac{d\psi_j}{dt}, \frac{d^2\psi_i}{dt^2}, \cdots, x_l; ————; ——)$	
3	$F_i(\psi_j; c_\alpha; t; \frac{d\psi_j}{dt}, \frac{d^2\psi_j}{dt^2}, \cdots; ——; ————; ——)$	
4	$F_i=\frac{d\psi_i}{d}-f_i(\psi_j; c_\alpha; t)$	动力学系统
5	$F_i=\frac{d\psi_i}{dt}-f_i(\psi_j; c_\alpha; —)$	自治动力学系统
6	$F_i=\frac{d\psi_i}{dt}+\frac{\partial V(\psi_j; c_\alpha)}{\partial\psi_i}$	梯度系统
7	$0=0+\frac{\partial v(\psi_j; c_\alpha)}{\partial\psi_i}$	梯度系统的平衡点

第一章　多维几何和多维分析

我们假定本书的读者已经学习过高等数学和线性代数。本书中还要用到较多一点的基础数学知识，但有不少实际上归结为熟悉一些记法和符号。本章介绍有关多维几何与多维分析的一些重要而有用的结果，特别注意那些在一般的教科书上较为简略而对了解突变理论特别重要的知识。

§1-1　多维几何

一、集合论的一些记法

$x\in X$ 表示 x 是**集合** X 的一个元素。

$X\subseteq Y$ 表示集合 X 是集合 Y 的**一个子集**(子集合)，或说 X 含于 Y，或说 Y 包含 X。

$(x_1, \cdots, x_n)$ 称为一个 n **序组**。

$X_1\times\cdots\times X_n=\{(x_1, \cdots, x_n)\mid x_1\in X_1, \cdots, x_n\in X_n\}$ 称为 n 个集合的**直接积**。

函数(**映射**、映照) $f: X\to Y$，X 是**定义域**，Y 是**值域**。习惯上常当 $Y\subset\mathrm{R}$，即 $y\in Y$ 是一个标量时称 f 为一个函数。而映射或映照通常在其他更为一般的情况下应用，但这不是严格的规定，混用的情况不时见于文献。

若 $f: A\to B$ 和 $g: C\to D$ 均为函数，且若 $f(a)\in C$，$\forall a\in A$($\forall$ 指"对于所有")，则可以定义复合函数

$$g\circ f(a)=g(f(a)),$$

于是 $g\circ f: A\to D$。

若 $f: A\to B$ 和 $g: C\to D$ 均为函数，并有

$$g(f(a))=a,\ f(g(b))=b,\ \forall a\in A,\ b\in B,$$

则称 g 是 f 的反函数，并记 $g=f^{-1}$（注意我们一般只讨论单值函数，若反函数多值时通常取其中一支）。

若 $X\subseteq A$，则定义限制于 X 的 f 为函数 $f|_X: X\to B$。它与 f 的区别只在于缩小了定义域。

二、Euclid 空间

n 维 **Euclid 空间**定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{R}^n&=\{(x_1,\ \cdots,\ x_n)\,|\,x_i\in\mathrm{R},\ i=1,\ \cdots,\ n\}\\&=\mathrm{R}\times\cdots\times\mathrm{R}。\end{aligned}$$

定义加法和数乘使 R^n 具有**实向量空间**的结构。

R^n 的**子空间**是子集 W，它满足

(a) 若 $x,\ y\in W$，则 $x+y\in W$；

(b) 若 $x\in W$ 且 $\lambda\in\mathrm{R}$，则 $\lambda x\in W$。

显然，R^3 中的原点及包含原点的直线、平面和空间都是 R^3 的子空间。

称一组线性无关的向量 $\boldsymbol{v}^1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}^s$ 张成一个子空间 W，若 W 的每个元素均可写成线性组合

$$\lambda_1\boldsymbol{v}^1+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{v}^s,\ \lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_s\in\mathrm{R},$$

且所有这样的线性组合均在 W 中。$\boldsymbol{v}^1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}^s$ 称为 W 的一组**基**，s 为 W 的维数，记为 $\dim W$，显然有

$$0\leqslant s\leqslant n。$$

W 在 R^n 中的余维数为

$$r=n-s。$$

W 在 R^n 中的余基由 r 个向量构成，它们与 W 的一组基一

起张成 R^n。

三、线性变换

由 R^n 至 R^m 的**线性变换**或**线性映射** $\boldsymbol{f}: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$ 满足

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}), \\ &\boldsymbol{f}(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \end{aligned} \quad \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^n,\ \lambda \in \mathrm{R},$$

下面讨论它的一般形式。设 R^n 的基为 $\boldsymbol{u}^1, \cdots, \boldsymbol{u}^n$，而 R^m 的基为 $\boldsymbol{v}^1, \cdots, \boldsymbol{v}^m$，则有

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^i) = \sum_j \lambda_{ji} \boldsymbol{v}^j,$$

但

$$\boldsymbol{x} = \sum_i \mu_i \boldsymbol{u}^i,$$

故

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j} \mu_i \lambda_{ji} \boldsymbol{v}^j。$$

线性变换必定取这种形式，反过来，有这种形式的变换一定是线性变换。若取 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 为单位基，则

$$\boldsymbol{x} = (\mu_1,\ \cdots,\ \mu_n),$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\lambda_{11}\mu_1 + \cdots + \lambda_{1n}\mu_n,\ \cdots,\ \lambda_{m1}\mu_1 + \cdots + \lambda_{mn}\mu_n)。$$

线性变换的几何意义是使区域歪斜(但直线仍保持)，并把它压扁。

称**映象** $\boldsymbol{f}(\mathrm{R}^n) = \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n\}$ 的**维数**为 $\boldsymbol{f}$ 的**秩**，又称它的**核** $\{\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0\}$ 的维数为 $\boldsymbol{f}$ 的朒。那么可以证明

$$\boldsymbol{f} \text{ 的秩} + \boldsymbol{f} \text{ 的朒} = n,$$

或等价地有

$$\boldsymbol{f} \text{ 的核的}\textbf{余维数} = \boldsymbol{f} \text{ 的秩}。$$

它的几何意义是：没有被 $\boldsymbol{f}$ 压扁的方向的数目等于映象所具有方向的数目。