高等教育自学考试教材

经济数学

李树仁 主编

陕西科学技术出版社

（陕）新登字002号

高等教育自学考试教材
经 济 数 学
李树仁 主编
陕西科学技术出版社出版发行
(西安北大街131号)
西安向阳印刷厂印刷
787×1092毫米 16开本 22.75印张 49万字
1994年3月第1版 1994年3月第1次印刷
印数：1—4000
ISBN 7—5369—2040—7/G·546
定 价：12.00元

前　言

本书是为参加高等教育自学考试经济类专业编写的教材。教材内容以“高等数学(财经类)考核目标”(全国高等教育自学指导委员会高等数学题库建设研究组制订)所规定内容为准。包括：函数、极限与连续、导数与微分、中值定理及导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、无穷级数、微分方程初步等九章。每章均分为若干节，每节后附有以下内容：

1. 基本要求与节末注记。指出自学时应掌握的基本内容及深度、广度，并对全节内容进行简要的总结和点注。

2. 思考题。主要是为了加深学员对基本概念的理解，弥补自学时经常会产生的疏漏。

3. 基本练习题。用以加强基本运算技能训练。

每章后有综合习题。书前附有初等数学基础知识，书末附有习题答案，可供自学参考。学完全部内容大约需要 120 学时左右(授课时间)。少数内容以“ * ”号，仅供学员开阔眼界，扩大知识面之用。

本书是在原稿《经济数学》(李树仁主编)的基础上重新修订的。原因是经过近几年自学考试的实践，有关领导、教师及读者出于对自学考试的关心，对原书提出了不少宝贵的改进意见，编者认为采纳这些意见对进一步推动自学考试完全是必要的。

编写时，在教材处理方面力求简明、扼要，重点放在基本概念和基本方法方面，不追求过分严密的推导和过深的理论证明。在文字叙述方面力求通俗易懂，多举例子，以便自学。在不增加深度和难度的前提下，结合经济问题，以提高读者联系经济实际的能力。

本书成稿前承蒙陕西省考试管理中心副主任周振豪同志多方指点，对编写大纲提出了很多极为宝贵的建议。成稿后受编者邀请又对全稿进行了全面审定，在此仅表衷心的谢意。

由于作者水平所限，书中不免有某些欠妥之外，欢迎读者及同行指正。

编　者

1994 年 3 月

目　录

初等数学基础知识

第一章　函　数

第二章　极限与连续

第三章　导数与微分

第四章 中值定理、导数的应用

第五章　不定积分

第六章　定积分及其应用

第七章 多元函数微积分

第八章 无穷级数

第九章 微分方程初步

初等数学基础知识

为了帮助读者更好地理解本书所讨论的全部内容，我们将一些常用的初等数学基础知识简述于后，供读者自学时参考。

（一） 初等代数

1. 乘法及因式分解公式

（1）$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$；

（2）$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$；

（3）$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$；

（4）$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$；

（5）$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$；

（6）$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1})$，（$n$ 是偶数）；

（7）$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$，（$n$ 是奇数）；

（8）$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$.

2. 二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$

（1）求根公式：$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

（2）根的性质由判别式 $\triangle = b^2 - 4ac$ 决定：

$\triangle > 0$　　两个实根，不相等；

$\triangle = 0$　　两个实根，相等；

$\triangle < 0$　　两个复根；共轭（参看（一）8. 复数）。

（3）根与系数的关系：

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

3. 指数运算

（1）$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$　　（2）$a^m \div a^n = a^{m-n}$；

（3）$(a^m)^n = a^{mn}$；　　（4）$(ab)^m = a^m \cdot b^m$；

(5) $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$;　　(6) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$;

(7) $a^0 = 1$;　　(8) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$。

4. 对数运算公式(其中 $a > 0, a \neq 1$)

(1) 如果 $a^y = x$,则 $y = \log_a x$;

(2) $\log_a a = 1$;

(3) $\log_a 1 = 0$;

(4) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$;

(5) $\log_a M^n = n\log_a M$;

(6) $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_a M$;

(7) 对数换底公式:$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$;

(8) $a^{\log_a x} = x$

5. 牛顿二项定理(n 是正整数)

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \cdots + b^k.$$

6. 阶乘

$$n! = n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

7. 自然数及自然数平方和、立方和公式

(1) $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$;

(2) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

(3) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = [\frac{1}{2}n(n+1)]^2$.

8 复数

任何实数的平方都不会是负数,也就是负数开平方根在实数范围内是没有意义的,这样,就产生了复数的概念。

我们用 i 表示 $\sqrt{-1}$,即 $i^2 = -1$,并把一切形如

$$a + bi$$

的数称为**复数**,这里 a、b 都是实数,分别称为复数的**实部**和**虚部**,i 称为**虚数单位**。当 $b = 0$ 时复数就变成了实数 a,所以,实数是复数的特殊情况。

$a+bi$ 和 $a-bi$ 这两个复数实部相等，虚部反号，互称为**共轭复数**。

解一元二次方程时，如果 $\triangle = \sqrt{b^2-4ac} < 0$，方程有两个复根：

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}i$$

它们是互为共轭的。

（二） 初等几何

下面初等几何公式中，字母 r 表示圆半径，h 表示高，l 表示斜高。

（1）三角形：面积 $= \frac{1}{2}bh$（b 表示底边长）；

（2）梯形：面积 $= \frac{1}{2}(a+b)h$（a、b 为梯形两底）；

（3）圆：周长 $= 2\pi r$；面积 $= \pi r^2$；

（4）圆扇形：面积 $= \frac{1}{2}r^2\alpha$（式中 α 表示扇形圆心角，以弧度计）；

（5）正圆柱体：体积 $= \pi r^2 h$；侧面积 $= 2\pi rh$；

（6）正圆锥体：体积 $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$；侧面积 $= \pi rl$；

（7）球体：体积 $= \frac{4}{3}\pi r^3$；表面积 $= 4\pi r^2$。

（三） 平面三角

1. 角度的度量

角的大小有两种量法，根据两种量法就定出两种不同的单位。

（1）六十分度：单位是一个周角的 $\frac{1}{360}$，称为**一度**，记为“°”。

（2）弧度：单位角是圆周上长度等于半径的弧段所对的圆心角，称为**一弧度**。

弧度与度的关系：

$$180° = \pi \text{ 弧度} \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ 弧度} \qquad 1 \text{ 弧度} = \left(\frac{180}{\pi}\right)°$$

2. 三角函数的定义

在直角坐标系中，设 α 是顶点在原点 0、始边为 x 轴正方向的任意角，P 是它终边上任意一点，其横坐标为 x，纵坐标为 y，$oP = r$，我们定义六个三角函数如下（参看下图）：

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{x}{y} \qquad \sec\alpha = \frac{r}{x} \qquad \csc\alpha = \frac{r}{y}$$

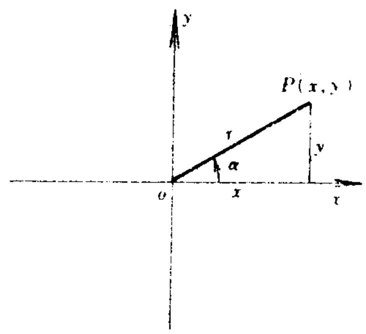

图 0—1

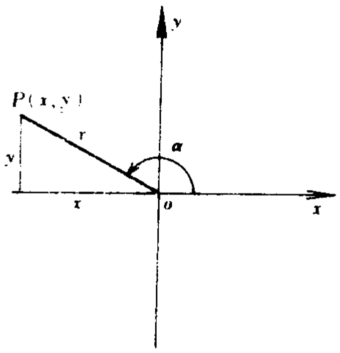

图 0—2

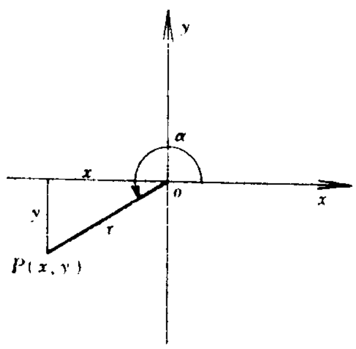

图 0—3

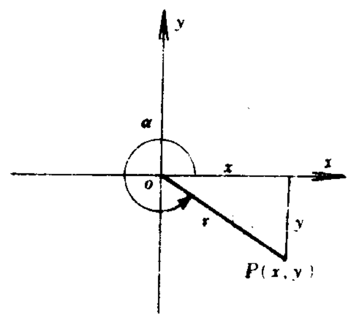

图 0—4

3. 基本关系

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；　　$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$；

$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha$；　　$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$；

$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$；　　$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$；

$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

4. 特殊角的三角函数值

角 函数	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

5. 任意角三角函数的简化公式

角 / 函数	$-\alpha$	$90\pm\alpha$	$180\pm\alpha$	$270\pm\alpha$	$k360°\pm\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
cos	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$
ctg	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$

6. **半角、半倍公式**

$$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}};\qquad \cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}};$$

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}};\qquad \sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x);$$

$$\cos^2x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x);\qquad \sin 2x=2\sin x\cos x;$$

$$\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x;\qquad \mathrm{tg}2x=\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}.$$

7. **和角公式**

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

$$\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y}{1-\mathrm{tg}x\mathrm{tg}y};\qquad \mathrm{tg}(x-y)=\frac{\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}y}{1+\mathrm{tg}x\mathrm{tg}y}.$$

8. **积化和差公式**

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)];$$

$$\cos x\sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)];$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)];$$

$$\sin x\sin y=-\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$$

9. **和差化积公式**

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

（四） 充分必要条件

1. **充分条件**：若条件 A 具备时，某事件 B 一定成立，则称条件 A 为事件 B 的充分条件。

2. **必要条件**：若条件 A 不具备时，某事件 B 一定不成立，则称条件 A 为事件 B 的必要条件。

3. **充分必要条件**：若条件 A 既是事件 B 的充分条件，又是事件 B 的必要条件，则称条件 A 是事件 B 的充分必要条件，简称充要条件或必充条件。

由以上定义看出，充分条件保证结论成立，但不一定唯一；必要条件不能保证结论成立，但不具备这个条件时结论一定不成立。可见充分条件是足以保证结论成立的条件，必要条件是结论成立时必不可缺的条件。

（五） 平面解析几何

1. 基本公式

(1) 给定点 $M_1(x_1,y_1)$ 及 $M_2(x_2,y_2)$，则

M_1,M_2 间的距离：

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

线段 M_1M_2 的斜率 $\qquad k=\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

(2) 给定两条直线（设斜率分别为 k_1,k_2），则该两直线

平行的充分必要条件为

$$k_1=k_2$$

垂直的充分必要条件为 $\qquad k_1\cdot k_2=-1$

(3) $M(x_0,y_0)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

2. 直线的各种方程

(1) 点斜式：直线过 (x_0,y_0) 点，斜率为 k，则直线方程为：$y-y_0=k(x-x_0)$；

(2) 截斜式：直线斜率为 k，纵截距为 b，则直线方程为 $\quad y=kx+b$；

(3) 两点式：直线过 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 点，则直线方程为：$\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$；

(4) 截距式：设 a,b 分别为横截距与纵截距，则直线方程为：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

3. **曲线方程**

(1) 圆周方程：圆心为 (a,b) 半径为 r 的圆周方程为：

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

(2) 抛物线方程：

顶点在原点，焦点为 $(\frac{p}{2},0)$ 的抛物线方程为：

$$y^2=2px$$

顶点在原点，焦点为 $(0,\frac{p}{2})$ 的抛物线方程：

$$x^2=2py$$

顶点在 (a,b) 对称轴为 $y=b$ 的抛物线方程为：

$$(y-b)^2=2p(x-a)$$

顶点在 (a,b) 对称轴为 $x=a$ 的抛物线方程为：

$$(x-a)^2=2p(y-b)$$

(3) 椭圆方程：中心在原点，a 为长半轴，b 为短半轴，焦点在 x 轴上的椭圆方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(4) 中心在原点，a 为实半轴，b 为虚半轴，焦点在 x 轴上的双曲线方程：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

(5) 等边双曲线方程：中心在原点，渐近线为坐标轴的等边双曲线方程为：

$$xy=m \qquad (m\text{ 为常数})$$

(六) 极坐标及极坐标下的曲线方程

1. **极坐标的概念**

在平面上取一点 o，称为极点，自 0 引一射线 oA，称为**极轴**(图 0—5)。于是平面上任一点 M(不在极点) 的位置，可由两个数

$$r=|oM|\ ,\ \theta=\angle AoM$$

来确定，其中 θ 是射线 op 由极轴开始绕 o 点逆时针方向第一次转到 M 点的角；r 是射线 op 上由 o 点到 M 点的距离。r、θ 称为 M 点的极坐标，记为

$$M(r,\theta)$$

r 称为**极径**，θ 称为**极角**。

当我们限制 $r>0,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 时，任意给定一个对数 (r,θ)，平面上就有唯一的一点 M 与之对应；反之，除 o 点外，对平面上任一点 M，必有唯一的一对数 r、θ 与之对应。当点 M 为极点 o

时，$r=0$，θ可任意取值。

在实际应用时，常取消r、θ的以上限制，即r、θ可取任意实数值。这时对任一组(r,θ)值，可用以下方法来确定平面唯一的一点M。先作射线op使以oA为始边，以op为终边的角$\angle Aop=\theta$。其次，如果$r>0$，则在op上作一点M，使$|oM|=r$；如果$r<0$，则在op的反向延长线上作一点M，使$|oM|=r$。但反过来，对平面上任一点M，却可以找到无数有序数组(r,θ)与之对应。例如当极坐标$r=3,\theta=\dfrac{\pi}{4}$时，可在极坐标中找到唯一的$M$点与之对应；但反过来，与$M$点对应的极坐标却不至一个，如$(3,\dfrac{\pi}{4}-2\pi)$，$(-3,\dfrac{\pi}{4}+\pi)$等(参看0—6)。

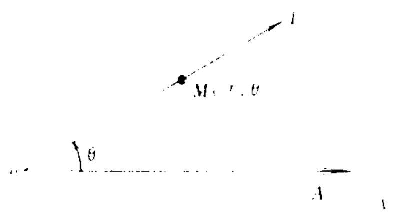

图　0—5

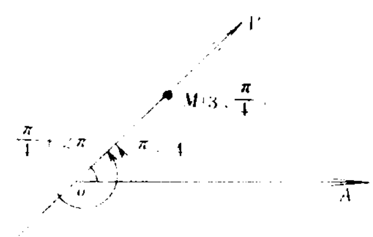

图　0—6

2. **极坐标与直角坐标的关系**

设平面上有一直角坐标系和一极坐标系，它们之间的关系是：极坐标的极点与直角坐标的原点重合，极轴与直角坐标的x轴正半轴重合。设平面上任一点M在直角坐标系中的坐标为(x,y)，在极坐标系中的坐标为(r,θ)，如图0—7所示，则M点的直角坐标与极坐标之间有如下关系：

$$x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \mathrm{tg}\theta=\frac{y}{x}$$

最后一式中，由$\mathrm{tg}\theta$决定θ时应根据M点在第几象限来定；当$x=0$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$或$\theta=\dfrac{3\pi}{2}$，这时M点在y轴上。

有了以上公式，我们就可以实现直角坐标与极坐标的相互转换。

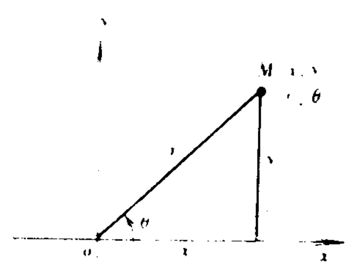

图　0—7

值得指出的是，有一些平面曲线，在极坐标下的方程特别简单，应用起来十分方便，例如：

(1) 中心在极点，半径为a的圆的极坐标方程为：

$$r=a$$

(2) 通过极点且与极轴成α角的直线的极坐标方程为：

$$\theta=a$$

(3) 半径为a，圆心为$(a,0)$的圆的极坐标方程为：

$$r=2a\cos\theta$$