

高等教育自学考试教材

经济数学

李树仁 主编

陕西科学技术出版社

(陕) 新登字 002 号

高等教育自学考试教材

经 济 数 学

李树仁 主编

陕西科学技术出版社出版发行

(西安北大街 131 号)

西安向阳印刷厂印刷

787×1092 毫米 16 开本 22.75 印张 49 万字

1994 年 3 月第 1 版 1994 年 3 月第 1 次印刷

印数: 1—4000

ISBN 7—5369—2040—7/G · 546

定 价: 12.00 元

前 言

本书是为参加高等教育自学考试经济类专业编写的教材。教材内容以“高等数学(财经类)考核目标”(全国高等教育自学指导委员会高等数学题库建设研究组制订)所规定内容为准。包括:函数、极限与连续、导数与微分、中值定理及导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、无穷级数、微分方程初步等九章。每章均分为若干节,每节后附有以下内容:

1. 基本要求与节末注记。指出自学时应掌握的基本内容及深度、广度,并对全节内容进行简要的总结和点注。

2. 思考题。主要是为了加深学员对基本概念的理解,弥补自学时经常会产生疏漏。

3. 基本练习题。用以加强基本运算技能训练。

每章后有综合习题。书前附有初等数学基础知识,书末附有习题答案,可供自学参考。学完全部内容大约需要120学时左右(授课时间)。少数内容以“*”号,仅供学员开阔眼界,扩大知识面之用。

本书是在原稿《经济数学》(李树仁主编)的基础上重新修订的。原因是经过近几年自学考试的实践,有关领导、教师及读者出于对自学考试的关心,对原书提出了不少宝贵的改进意见,编者认为采纳这些意见对进一步推动自学考试完全是必要的。

编写时,在教材处理方面力求简明、扼要,重点放在基本概念和基本方法方面,不追求过分严密的推导和过深的理论证明。在文字叙述方面力求通俗易懂,多举例子,以便自学。在不增加深度和难度的前提下,结合经济问题,以提高读者联系经济实际的能力。

本书成稿前承蒙陕西省考试管理中心副主任周振豪同志多方指点,对编写大纲提出了很多极为宝贵的建议。成稿后受编者邀请又对全稿进行了全面审定,在此仅表衷心的感谢。

由于作者水平所限,书中不免有某些欠妥之处,欢迎读者及同行指正。

编 者

1994年3月

目 录

初等数学基础知识

(一)初等代数	(1)	(五)平面解析几何	(6)
(二)初等几何	(3)	(六)极坐标及极坐标下的曲线方程	(7)
(三)平面三角	(3)	(七)初等函数的作图问题	(9)
(四)充分必要条件	(6)		

第一章 函 数

1.1 集 合	(10)	(三)函数的有界性	(32)
(一)集合的概念	(10)	(四)函数的周期性	(32)
(二)集合的表示方法	(11)	基本要求与节末注记	(33)
(三)集合间的关系和运算	(11)	思考题	(33)
基本要求与节末注记	(13)	基本练习题 1.3	(33)
思考题	(13)	1.4 初等函数	(34)
基本练习题 1.1	(14)	(一)基本初等函数	(34)
1.2 函 数	(15)	(二)复合函数	(37)
(一)变量与区间	(15)	(三)初等函数	(38)
(二)函数的概念	(17)	基本要求与节末注记	(38)
(三)关于分段函数	(22)	思考题	(39)
(四)建立函数关系举例	(23)	基本练习题 1.4	(39)
(五)反函数的概念	(25)	1.5 常见经济函数与保本产量	(40)
基本要求与节末注记	(26)	(一)常见经济函数	(40)
思考题	(27)	(二)保本产量	(41)
基本练习题 1.2	(27)	基本要求与节末注记	(41)
1.3 函数的基本性态	(29)	思考题	(42)
(一)函数的奇偶性	(29)	基本练习题 1.5	(42)
(二)函数的单调性	(31)	习题一	(42)

第二章 极限与连续

2.1 数列的极限	(44)	(四)保号定理和有界性定理的证明	(62)
(一)数 列	(44)	(五)无穷小量与无穷大量的严格定义	(63)
(二)数列的极限	(45)	(六)极限、无穷小量、无穷大量有关定理的证明	(63)
(三)收敛数列的有界性	(46)	基本要求与节末注记	(64)
基本要求与节末注记	(46)	2.5 极限的运算法则	(64)
思考题	(47)	(一)极限的四则运算法则	(64)
基本练习题 2.1	(47)	(二)几类特殊极限的定值法	(66)
2.2 函数的极限	(48)	基本要求与节末注记	(69)
(一) $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限	(48)	思考题	(70)
(二) $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限	(49)	基本练习题 2.5	(70)
(三)极限的保号性和有界性	(51)	2.6 极限存在的准则、两个重要极限	(71)
基本要求与节末注记	(51)	(一)准则 I 与第一个重要极限	(71)
思考题	(52)	(二)准则 II 与第二个重要极限	(75)
基本练习题 2.2	(52)	基本要求与节末注记	(78)
2.3 无穷小量与无穷大量	(52)	思考题	(78)
(一)无穷小量	(53)	基本练习题 2.6	(79)
(二)无穷小量的比较	(53)	2.7 函数的连续性	(79)
(三)无穷大量	(54)	(一)函数的增量及其计算	(79)
(四)极限、无穷小量、无穷大量之间的关系	(55)	(二)连续函数的概念	(80)
基本要求与节末注记	(55)	(三)函数的间断点	(82)
思考题	(56)	(四)连续函数的运算法则、初等函数的连续性	(83)
基本练习题 2.3	(56)	(五)在闭区间上连续函数的性质	(84)
* 2.4 极限、无穷小、无穷大概念的进一步说明	(57)	基本要求与节末注记	(85)
(一)数列极限的 $\epsilon-N$ 定义	(57)	思考题	(85)
(二)当 $x \rightarrow \infty$ 时函数极限的 $\epsilon-M$ 定义	(57)	基本练习题 2.7	(86)
(三)当 $x \rightarrow x_0$ 时函数极限的定义 $\epsilon-\delta$ 定义	(60)	习题二	(86)

第三章 导数与微分

3.1 导数的概念	(89)	(二)导数的定义	(91)
(一)导数问题举例	(89)	(三)可导与连续的关系	(92)

基本要求与节末注记	(94)	基本练习题 3.3	(114)
思考题	(95)	3.4 导数概念应用	(115)
基本练习题 3.1	(95)	(一)导数应用举例	(115)
3.2 初等函数的求导法则	(96)	(二)边际概念	(117)
(一)基本初等函数求导公式	(96)	(三)弹性概念	(118)
(二)导数的四则运算及反函数求导公式	(98)	基本要求与节末注记	(119)
(三)复合函数求导公式	(102)	思考题	(120)
(四)初等函数的导数	(104)	基本练习题 3.4	(120)
(五)初等函数的高阶导数	(106)	3.5 微分	(121)
基本要求与节末注记	(107)	(一)微分概念	(121)
思考题	(108)	(二)函数微分与函数增量的关系	(122)
基本练习题 3.2	(108)	(三)微分法则	(123)
3.3 其它形式下函数求导问题	(110)	(四)微分的应用	(125)
(一)隐函数的导数	(110)	基本要求与节末注记	(126)
(二)由参数方程给出的函数的导数	(112)	思考题	(127)
基本要求与节末注记	(113)	基本练习题 3.5	(127)
思考题	(114)	习题三	(127)

第四章 中值定理、导数的应用

4.1 中值定理	(129)	(二)函数增减性的判定方法	(141)
(一)罗尔中值定理	(129)	(三)极值点的确定方法	(143)
(二)拉格朗日中值定理	(130)	(四)导数在最优化方法中的应用	(148)
(三)柯西中值定理	(134)	基本要求与节末注记	(152)
基本要求与节末注记	(134)	思考题	(153)
思考题	(134)	基本练习题 4.3	(154)
基本练习题 4.1	(135)	4.4 曲线凹向、拐点及函数作图问题	(155)
4.2 罗必达法则—未定式的定值法	(135)	(一)曲线的凹向与拐点	(155)
(一)罗必达法则	(135)	(二)曲线的渐近线	(158)
(二)其它未定式定值法	(137)	(三)函数图形的作法	(159)
基本要求与节末注记	(139)	基本要求与节末注记	(162)
思考题	(139)	思考题	(163)
基本练习题 4.2	(139)	基本练习题 4.4	(163)
4.3 导数在最优化方法中的应用	(140)	习题四	(163)
(一)极值的概念	(140)		

第五章 不定积分

5.1 不定积分的概念.....	(165)	(三)常见有理式的积分	(176)
(一)原函数	(165)	基本要求与节末注记	(181)
(二)不定积分	(166)	思考题	(181)
(三)积分法与微分法的关系	(168)	基本练习题 5.3	(182)
基本要求与节末注记	(168)	5.4 第二类换元积分法.....	(182)
思考题	(169)	(一)基本方法	(182)
基本练习题 5.1	(169)	(二)举 例	(183)
5.2 基本积分法.....	(169)	基本要求与节末注记	(185)
(一)基本积分表	(169)	思考题	(186)
(二)不定积分的性质	(170)	基本练习题 5.4	(186)
(三)基本积分法	(171)	5.5 分部积分法.....	(186)
基本要求与节末注记	(172)	(一)分部积分公式	(186)
思考题	(172)	(二)举 例	(187)
基本练习题 5.2	(172)	基本要求与节末注记	(189)
5.3 第一类换元积分法—凑微分法		思考题	(190)
.....	(173)	基本练习题 5.5	(190)
(一)第一类换元积分法的基本思路	(173)	习题五	(190)
(二)举 例	(174)		

第六章 定积分及其应用

6.1 定积分概念.....	(191)	(一)变上限积分	(201)
(一)定积分概念引例	(191)	(二)微分基本定理—牛顿莱布尼兹公式	(203)
(二)定积分定义	(194)	基本要求与节末注记	(205)
(三)用定义计算定积分举例	(195)	思考题	(205)
(四)定积分的几何意义	(196)	基本练习题 6.3	(205)
基本要求与节末注记	(197)	6.4 定积分的换元积分法与分部积分法	(206)
思考题	(197)		
基本练习题 6.1	(197)	(一)定积分的换元积分法	(206)
6.2 定积分的基本性质.....	(197)	(二)定积分的分部积分法	(208)
基本要求与节末注记	(200)	基本要求与节末注记	(208)
思考题	(200)	思考题	(209)
基本练习题 6.2	(200)	基本练习题 6.4	(209)
6.3 牛顿—莱布尼兹公式.....	(201)		

6.5 定积分的应用.....	(210)	6.6 广义积分.....	(217)
(一)平面图形的面积	(210)	(一)无限区间上的积分	(217)
(二)体 积	(212)	(二)无界函数的积分	(219)
(三)经济应用问题举例	(214)	基本要求与节末注记	(220)
基本要求与节末注记	(215)	思考题	(221)
思考题	(216)	基本练习题 6.6	(221)
基本练习题 6.5	(217)	习题六	(221)

第七章 多元函数微积分

7.1 空间解析几何简介.....	(223)	7.5 多元复合函数求导法则.....	(245)
(一)空间直角坐标系	(223)	(一)多元复合函数求导的一般法则	(245)
(二)空间两点的距离公式	(224)	(二)多元复合函数求导的一些特殊情况	(246)
(三)曲面与方程	(224)	基本要求与节末注记	(248)
基本要求与节末注记	(228)	思考题	(249)
思考题	(229)	基本练习题 7.5	(249)
基本练习题 7.1	(229)	7.6 隐函数求导公式.....	(250)
7.2 多元函数的概念.....	(229)	(一)含有两个变量的方程所确定的隐函数求导	
(一)多元函数的定义	(229)	公式	(250)
(二)二元函数的定义域、邻域	(230)	(二)含三个变量的方程所确定的隐函数的偏导	
(三)二元函数的几何表示	(231)	公式	(251)
(四)二元函数的极限与连续性	(233)	基本要求与节末注记	(252)
(五)有界闭域上二元函数的性质	(233)	思考题	(252)
基本要求与节末注记	(234)	基本练习题 7.6	(252)
思考题	(234)	7.7 多元函数的极值.....	(253)
基本练习题 7.2	(234)	(一)多元函数的极值	(253)
7.3 偏导数.....	(235)	(二)二元函数的最大值、最小值	(255)
(一)偏导数的概念	(235)	* (三)条件极值与拉格朗日乘数法	(256)
(二)多元函数偏导数的计算	(236)	基本要求与节末注记	(258)
(三)高阶偏导数	(238)	思考题	(258)
基本要求与节末注记	(239)	基本练习题 7.7	(258)
思考题	(239)	7.8 二重积分.....	(259)
基本练习题 7.3	(239)	(一)二重积分的定义及简单性质	(259)
7.4 全微分.....	(240)	(二)直角坐标系下二重积分的计算	(262)
(一)全微分及其计算	(240)	(三)极坐标系下二重积分的计算	(267)
(二)全微分在近似计算中的应用	(243)	(四)用二重积分求空间立体的体积	(269)
基本要求与节末注记	(244)	基本要求与节末注记	(271)
思考题	(244)	思考题	(271)
基本练习题 7.4	(244)		

基本练习题 7.8	(271)	(二)三重积分在直角坐标系下的计算 ...	(274)
* 7.9 三重积分	(273)	基本练习题 7.9	(275)
(一)三重积分的定义	(273)	习题七	(275)

第八章 无穷级数

8.1 常数项级数的概念和性质	(277)	思考题	(291)
(一)常数项级数的概念	(277)	基本练习题 8.3	(291)
(二)无穷级数的基本性质	(279)	8.4 幂级数	(292)
基本要求与节末注记	(280)	(一)幂级数的收敛性	(292)
思考题	(281)	(二)幂级数的性质	(294)
基本练习题 8.1	(281)	基本要求与节末注记	(295)
8.2 正项级数的审敛法	(282)	思考题	(296)
(一)正项级数收敛的充要条件	(282)	基本练习题 8.4	(296)
(二)比较审敛法	(282)	8.5 函数展开成幂级数	(296)
(三)比值审敛法	(284)	(一)泰勒公式	(297)
基本要求与节末注记	(286)	(二)泰勒级数	(299)
思考题	(287)	(三)初等函数的展开式	(300)
基本练习题 8.2	(287)	(四)利用幂级数作近似计算	(304)
8.3 任意项级数的审敛法	(287)	基本要求与节末注记	(305)
(一)交错级数	(287)	思考题	(305)
(二)任意项级数的审敛法	(289)	基本练习题 8.5	(306)
基本要求与节末注记	(291)	习题八	(306)

第九章 微分方程初步

9.1 微分方程的概念	(308)	思考题	(319)
基本要求与节末注记	(311)	基本练习题 9.2	(320)
思考题	(311)	9.3 二阶微分方程	(320)
基本练习题 9.1	(311)	(一)二阶常系数齐次线性微分方程	(320)
9.2 一阶微分方程	(312)	(二)其它几种简单二阶微分方程	(324)
(一)可分离变量的微分方程	(312)	基本要求与节末注记	(326)
(二)齐次微分方程	(313)	思考题	(327)
(三)一阶线性微分方程	(316)	基本练习题 9.3	(327)
基本要求与节末注记	(319)	习题九	(327)

习题答案	(329)
------------	-------

初等数学基础知识

为了帮助读者更好地理解本书所讨论的全部内容,我们将一些常用的初等数学基础知识简述于后,供读者自学时参考。

(一) 初等代数

1. 乘法及因式分解公式

- (1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
- (2) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;
- (3) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;
- (4) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;
- (5) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$;
- (6) $a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + ab^{n-2} - b^{n-1})$, (n 是偶数);
- (7) $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, (n 是奇数);
- (8) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$.

2. 二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$

- (1) 求根公式: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- (2) 根的性质由判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 决定:
 - $\Delta > 0$ 两个实根, 不相等;
 - $\Delta = 0$ 两个实根, 相等;
 - $\Delta < 0$ 两个复根; 共轭(参看(一)8. 复数)。
- (3) 根与系数的关系:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

3. 指数运算

- (1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
- (2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$;
- (3) $(a^m)^n = a^{mn}$;
- (4) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$;

$$(5) \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m};$$

$$(6) a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m;$$

$$(7) a^0 = 1;$$

$$(8) a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

4. 对数运算公式(其中 $a > 0, a \neq 1$)

$$(1) \text{ 如果 } a^y = x, \text{ 则 } y = \log_a x;$$

$$(2) \log_a a = 1;$$

$$(3) \log_a 1 = 0;$$

$$(4) \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N;$$

$$(5) \log_a M^n = n \log_a M;$$

$$(6) \log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M;$$

$$(7) \text{ 对数换底公式: } \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a};$$

$$(8) a^{\log_a x} = x$$

5. 牛顿二项定理(n 是正整数)

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \dots + b^n. \end{aligned}$$

6. 阶乘

$$n! = n(n-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

7. 自然数及自然数平方和、立方和公式

$$(1) \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1);$$

$$(2) \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$(3) \sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2.$$

8. 复数

任何实数的平方都不会是负数,也就是负数开平方根在实数范围内是没有意义的,这样,就产生了复数的概念。

我们用 i 表示 $\sqrt{-1}$, 即 $i^2 = -1$, 并把一切形如

$$a + bi$$

的数称为复数,这里 a, b 都是实数,分别称为复数的实部和虚部, i 称为虚数单位。当 $b = 0$ 时复数就变成了实数 a , 所以,实数是复数的特殊情况。

$a + bi$ 和 $a - bi$ 这两个复数实部相等,虚部反号,互称为**共轭复数**。

解一元二次方程时,如果 $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} < 0$,方程有两个复根:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}i$$

它们是互为共轭的。

(二) 初等几何

下面初等几何公式中,字母 r 表示圆半径, h 表示高, l 表示斜高。

(1) 三角形:面积 $= \frac{1}{2}bh$ (b 表示底边长);

(2) 梯形:面积 $= \frac{1}{2}(a + b)h$ (a, b 为梯形两底);

(3) 圆:周长 $= 2\pi r$;面积 $= \pi r^2$;

(4) 圆扇形:面积 $= \frac{1}{2}r^2\alpha$ (式中 α 表示扇形圆心角,以弧度计);

(5) 正圆柱体:体积 $= \pi r^2 h$;侧面积 $= 2\pi r h$;

(6) 正圆锥体:体积 $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$;侧面积 $= \pi r l$;

(7) 球体:体积 $= \frac{4}{3}\pi r^3$;表面积 $= 4\pi r^2$ 。

(三) 平面三角

1. 角度的度量

角的大小有两种量法,根据两种量法就定出两种不同的单位。

(1) 六十分度:单位是一个周角的 $\frac{1}{360}$,称为**一度**,记为“°”。

(2) 弧度:单位角是圆周上长度等于半径的弧段所对的圆心角,称为**一弧度**。

弧度与度的关系:

$$180^\circ = \pi \text{ 弧度} \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ 弧度} \quad 1 \text{ 弧度} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

2. 三角函数的定义

在直角坐标系中,设 α 是顶点在原点 O ,始边为 x 轴正方向的任意角, P 是它终边上任意一点,其横坐标为 x ,纵坐标为 y , $OP = r$,我们定义六个三角函数如下(参看下图):

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{y}{r} & \cos \alpha &= \frac{x}{r} & \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y}{x} \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{x}{y} & \sec \alpha &= \frac{r}{x} & \operatorname{csc} \alpha &= \frac{r}{y} \end{aligned}$$

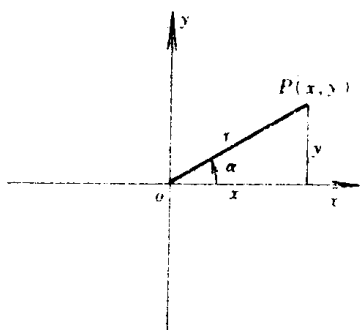


图 0—1

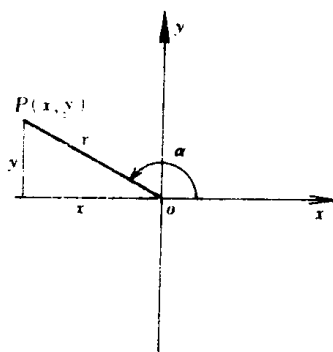


图 0—2

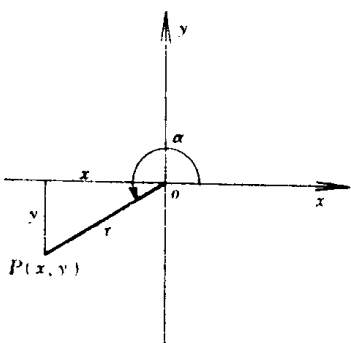


图 0—3

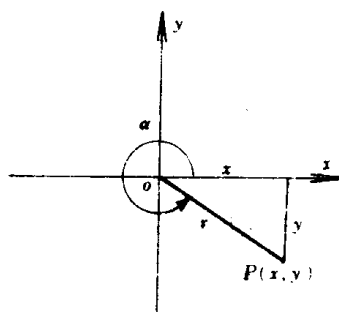


图 0—4

3. 基本关系

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{csc}^2 \alpha;$$

$$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha;$$

$$\sin \alpha \cdot \operatorname{csc} \alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1;$$

4. 特殊角的三角函数值

角 函数	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

5. 任意角三角函数的简化公式

角 函数	$-\alpha$	$90 \pm \alpha$	$180 \pm \alpha$	$270 \pm \alpha$	$k360^\circ \pm \alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
cos	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$

6. 半角、半倍公式

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}};$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x);$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}};$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x);$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x;$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

7. 和角公式

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y};$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

8. 积化和差公式

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)];$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) - \sin(x - y)];$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)];$$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$

9. 和差化积公式

$$\sin x + \sin y = 2\sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

(四) 充分必要条件

1. **充分条件**: 若条件 A 具备时, 某事件 B 一定成立, 则称条件 A 为事件 B 的充分条件。
2. **必要条件**: 若条件 A 不具备时, 某事件 B 一定不成立, 则称条件 A 为事件 B 的必要条件。
3. **充分必要条件**: 若条件 A 既是事件 B 的充分条件, 又是事件 B 的必要条件, 则称条件 A 是事件 B 的充分必要条件, 简称充要条件或必充条件。

由以上定义看出, 充分条件保证结论成立, 但不一定唯一; 必要条件不能保证结论成立, 但不具备这个条件时结论一定不成立。可见充分条件是足以保证结论成立的条件, 必要条件是结论成立时必不可缺的条件。

(五) 平面解析几何

1. 基本公式

- (1) 给定点 $M_1(x_1, y_1)$ 及 $M_2(x_2, y_2)$, 则 M_1, M_2 间的距离:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

线段 M_1M_2 的斜率

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- (2) 给定两条直线(设斜率分别为 k_1, k_2), 则该两直线平行的充分必要条件为

$$k_1 = k_2$$

垂直的充分必要条件为

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

- (3) $M(x_0, y_0)$ 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

2. 直线的各种方程

- (1) 点斜式: 直线过 (x_0, y_0) 点, 斜率为 k , 则直线方程为: $y - y_0 = k(x - x_0)$;
- (2) 截斜式: 直线斜率为 k , 纵截距为 b , 则直线方程为 $y = kx + b$;
- (3) 两点式: 直线过 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 点, 则直线方程为: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$;

(4) 截距式: 设 a, b 分别为横截距与纵截距, 则直线方程为: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

3. 曲线方程

(1) 圆周方程: 圆心为 (a, b) 半径为 r 的圆周方程为:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

(2) 抛物线方程:

顶点在原点, 焦点为 $(\frac{p}{2}, 0)$ 的抛物线方程为:

$$y^2 = 2px$$

顶点在原点, 焦点为 $(0, \frac{p}{2})$ 的抛物线方程:

$$x^2 = 2py$$

顶点在 (a, b) 对称轴为 $y = b$ 的抛物线方程为:

$$(y - b)^2 = 2p(x - a)$$

顶点在 (a, b) 对称轴为 $x = a$ 的抛物线方程为:

$$(x - a)^2 = 2p(y - b)$$

(3) 椭圆方程: 中心在原点, a 为长半轴, b 为短半轴, 焦点在 x 轴上的椭圆方程为:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(4) 中心在原点, a 为实半轴, b 为虚半轴, 焦点在 x 轴上的双曲线方程:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(5) 等边双曲线方程: 中心在原点, 渐近线为坐标轴的等边双曲线方程为:

$$xy = m \quad (m \text{ 为常数})$$

(六) 极坐标及极坐标下的曲线方程

1. 极坐标的概念

在平面上取一点 o , 称为极点, 自 o 引一射线 oA , 称为极轴(图 0—5)。于是平面上任一点 M (不在极点) 的位置, 可由两个数

$$r = |oM|, \theta = \angle AoM$$

来确定, 其中 θ 是射线 op 由极轴开始绕 o 点逆时针方向第一次转到 M 点的角; r 是射线 op 上由 o 点到 M 点的距离。 r, θ 称为 M 点的极坐标, 记为

$$M(r, \theta)$$

r 称为极径, θ 称为极角。

当我们限制 $r > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ 时, 任意给定一个对数 (r, θ) , 平面上就有唯一的一点 M 与之对应; 反之, 除 o 点外, 对平面上任一点 M , 必有唯一的一对数 r, θ 与之对应。当点 M 为极点 o

时, $or = 0, \theta$ 可任意取值。

在实际应用时,常取消 r, θ 的以上限制,即 r, θ 可取任意实数值。这时对任一组 (r, θ) 值,可用以下方法来确定平面唯一的一点 M 。先作射线 op 使以 oA 为始边,以 op 为终边的角 $\angle Aop = \theta$ 。其次,如果 $r > 0$,则在 op 上作一点 M ,使 $|oM| = r$;如果 $r < 0$,则在 op 的反向延长线上作一点 M ,使 $|oM| = r$ 。但反过来,对平面上任一点 M ,却可以找到无数有序数组 (r, θ) 与之对应。例如当极坐标 $r = 3, \theta = \frac{\pi}{4}$ 时,可在极坐标中找到唯一的 M 点与之对应;但反过来,与 M 点对应的极坐标却不止一个,如 $(3, \frac{\pi}{4} - 2\pi), (-3, \frac{\pi}{4} + \pi)$ 等(参看 0—6)。

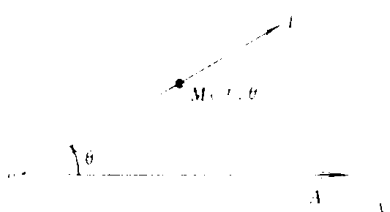


图 0—5

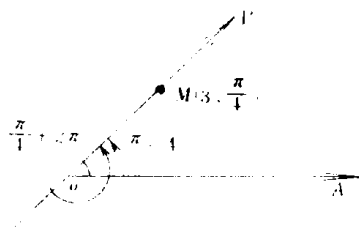


图 0—6

2. 极坐标与直角坐标的关系

设平面上有一直角坐标系和一极坐标系,它们之间的关系是:极坐标的极点与直角坐标的原点重合,极轴与直角坐标的 x 轴正半轴重合。设平面上任一点 M 在直角坐标系中的坐标为 (x, y) ,在极坐标系中的坐标为 (r, θ) ,如图 0—7 所示,则

M 点的直角坐标与极坐标之间有如下关系:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

最后一式中,由 $\operatorname{tg} \theta$ 决定 θ 时应根据 M 点在第几象限来定;当 $x = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$ 或 $\theta = \frac{3\pi}{2}$,这时 M 点在 y 轴上。

有了以上公式,我们就可以实现直角坐标与极坐标的相互转换。

值得指出的是,有一些平面曲线,在极坐标下的方程特别简单,应用起来十分方便,例如:

(1) 中心在极点,半径为 a 的圆的极坐标方程为:

$$r = a$$

(2) 通过极点且与极轴成 α 角的直线的极坐标方程为:

$$\theta = \alpha$$

(3) 半径为 a ,圆心为 $(a, 0)$ 的圆的极坐标方程为:

$$r = 2a \cos \theta$$

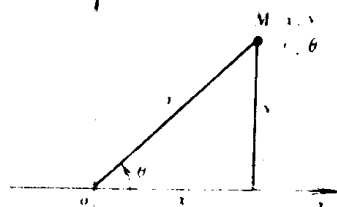


图 0—7