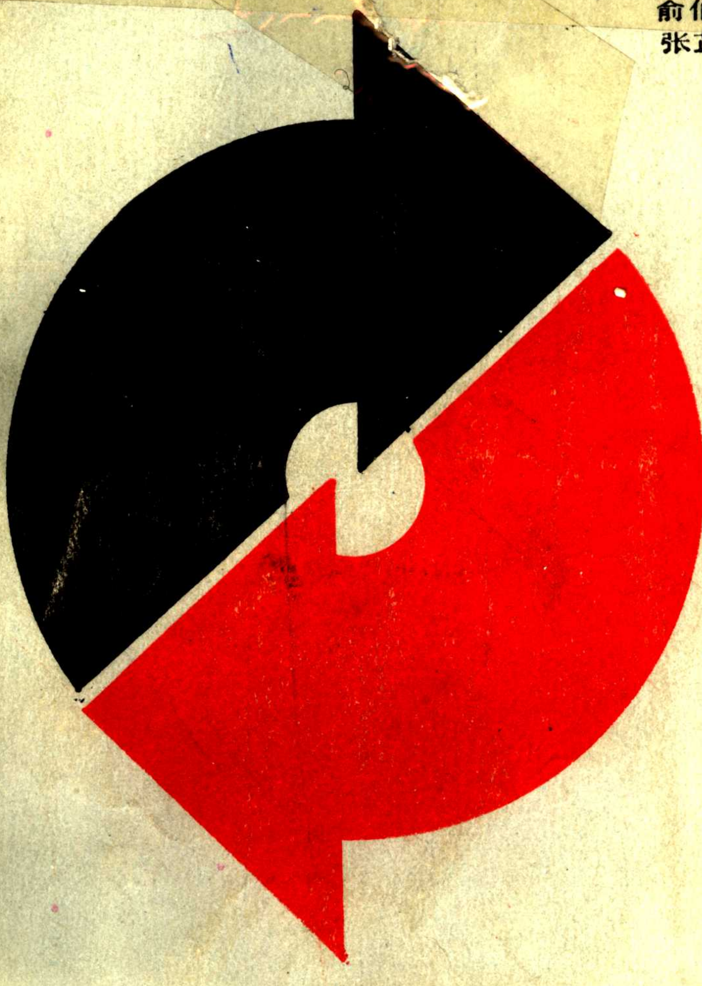
动力系统稳定性理论

[美] N.P.Bhatia 著
[意] G.P.Szegö

俞伯华 译
张芷芬 校



高等教育出版社

本书是根据Springer Verlag出版的，[美]N.P.Bhatia和[意]G.P.Szegö著的《Stability Theory of Dynamical Systems》一九七〇年版译出的.本书系统地阐述了度量空间中动力系统的基本理论，介绍了动力系统稳定性理论最近二十年来的重要成果.全书分两个部分，第一部分(第Ⅰ—Ⅶ章）介绍度量空间中动力系统的基础理论；第二部分（第Ⅷ，Ⅸ章）介绍稳定性理论的应用和推广.

本书可供理科数学、力学、物理等专业师生作为教学参考书，也可供科学工作者和工程技术人员参考.

动力系统稳定性理论

[美]N.P.Bhatia
[意]G.P.Szegö 著

俞伯华 译
张芷芬 校

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张10.5 字数254 000
1988年7月第1版 1988年7月第1次印刷
印数 00 1—2,230
ISBN7—04—000252—3/0.283

定价 3,95元

序　言

本书系统地阐明在度量空间中动力系统的基本理论，重点是稳定性理论及其对于自治常微分方程的应用和推广。

我们认为，本书适合作为数学、物理和工程技术专业大学高年级学生、始业研究生的动力系统理论课程和讨论班的教科书。

我们不打算把这本书写成包罗这门学科一切著名成果的专著，但是我们尽可能把过去二十年来大多数新的重要的成果和进展写进去。书末广泛的文献目录使得本书对有兴趣于进一步探讨这门学科的读者来说更为有用。

读者应该学过常微分方程的基本课程，且具备一些有关度量空间理论的知识，而这些知识通常在大学的分析和拓扑教程中都有。

本书的每一个作者强烈地认为书中可能遗留的错误可归因另一方，但是我们每一个都愿意诚恳地接受来自科学界的任何批评指正。

我们感谢A.Strauss教授阅读了全部原稿，并且纠正了一些错误。我们同时也感谢F.Castillo博士、L.Franklin博士、C.Olech博士和G.Treccani博士帮助校对了校样.

N P. Bhatia, G. P. Szegö

1970年6月.

记　　号

集合论的记号

全书所使用的集合论记号都是标准的集合论记号. $\subset$, $\cup$, $\cap$ 分别表示集合的包含，集合的并以及集合的交. 对于给定的集合M,以∂M, $\mathscr{I}(M)$, $\overline{M}$, $\mathscr{C}(M)$ 分别表示集合 M 的边界，内部，闭包和补集. 对于给定的集合A、B，$A-B$表示集合A和B的差集. 所使用的其他标准的集合论记号有：

X	具有度量ρ的度量空间.
2^X	X的所有子集族.
R	实数集合.
R^n	实 n 维欧氏空间.
R^+	非负实数集合.
R^-	非正实数集合.
$\varnothing$	空集.
$\lvert\cdot\rvert$	实数的绝对值.
$\lVert\cdot\rVert$	欧氏距离模.
$\langle x, y\rangle$	在R^n内向量x, y的数量积.
$S(x,\alpha)$	对于给定的$x\in X$和$\alpha>0$, $S(x,\alpha)$表示以x为中心，α为半径的开球，即集合$\{y:\rho(x,y)<\alpha\}$.
$S(M,\alpha)$	集合$\{y:\rho(y,M)<\alpha\}$，其中$M\subset X$和$\alpha>0$是给定的.
$S[x,\alpha]$	中心在x，半径为$\alpha\geqslant 0$ 的闭球，即集合$\{y:\rho(x,y)\leqslant\alpha\}$.

$S[M,\alpha]$ 集合$\{y:\rho(y,M)\leqslant\alpha\}$.

$H(x,\alpha)$ 中心在x，半径为$\alpha\geqslant0$的超球面，即集合

$\{y:\rho(x,y)=\alpha\}$.

$H(M,\alpha)$ 集合$\{y:\rho(y,M)=\alpha\}$.

$\{x_n\}$或$\{x^n\}$序列.

$x_n\to x$ 序列$\{x_n\}$收敛于x.

$\mathscr{C}^1$ 连续可微函数族.

$\mathscr{C}^2$ 二次连续可微函数族.

动力系统的记号

(X,R,π) 在空间X上的动力系统(Ⅰ,1.1).

π 给定动力系统的相映射(Ⅰ,1.1).

π^t 对应于给定的$t\in R$的转移(Ⅰ,1.1).

π_x 经过x的运动(Ⅰ,1.1).

$\gamma(x)$ 经过x的轨线(Ⅱ,1.9).

$\gamma^+(x)(\gamma^-(x))$ 经过x的正（负）半轨线(Ⅱ,1.9).

$\Lambda^+(x)(\Lambda^-(x))$ x的正（负）向极限集合(Ⅱ,3.1).

$D^+(x)(D^-(x))$ x的正（负）向延伸(Ⅱ,4.1).

$J^+(x)(J^-(x))$ x的正（负）向延伸极限集合(Ⅱ,4.1).

$D_\alpha^+(x)(D_\alpha^-(x))$对于给定的序数$\alpha$，$D_\alpha^+(x)(D_\alpha^-(x))$表示$x$的第$\alpha$阶正（负）向延伸（Ⅶ，1.12）

$J_\alpha^+(x)(J_\alpha^-(x))$对于给定的序数$\alpha$，$J_\alpha^+(x)(J_\alpha^-(x))$表示$x$的第$\alpha$阶正（负）向延伸极限集合(Ⅶ,3.1)

$D_u^+(M)$ 集合M的一致正向延伸（Ⅶ,2.11).

$D^+(M,U)$ 对于给定在X内的M,U，相对于U的M的正向延伸（Ⅱ,4.10).

$A_\omega(M)$	$M\subset X$的弱吸引区域(V,1.1).
$A(M)$	$M\subset X$的吸引区域(V,1.1).
$A_u(M)$	$M\subset X$的一致吸引区域(V,1.1).
$\mathscr{R}$	广义回复集合(Ⅶ,3.6).
$\mathscr{D}$	在高阶延伸定义中使用的算子(Ⅶ,1.1).
$\mathscr{G}$	在高阶延伸定义中使用的算子(Ⅶ,1.1).

目　　录

绪　论

动力系统理论作为常微分方程理论的一个专门论题，可以说是从十九世纪末H. Poincaré 的具有开创性的工作开始的. Poincaré及其后的I. Bendixson 研究了平面上自治常微分方程解的拓扑性质.Poincaré-Bendixson 理论现在是常微分方程课程中讨论的一般论题. 在Coddington和Levinson[1], Lefschetz[1], Hartman[1], Sansone和Conti[1], Nemytskii和 Stepanov[1]的书中对 Poincaré-Bendixson 理论都作了足够详细的论述，而其中Hartman的书包含有最详细和最新的叙述.

几乎和Poincaré同时, A. M. Liapunov 发展了含有n个一阶常微分方程的系统的运动（解）稳定性理论. 他精确地定义了稳定的概念、渐近稳定的概念和不稳定的概念，并且为了分析一个常微分方程已知解的稳定性，给出了一种“方法”(Liapunov 第二方法或直接方法).他的定义和“方法”两者都在严格的局部范围内刻划出微分方程解的稳定特性. 与此相反，在Poincaré的理论中对平面上微分方程全局性质的研究起着主要作用，因此Liapunov的理论显著地不同于Poincaré的理论.

Poincaré理论的一个主要方面是轨线概念的引进，即在 x, $\dot{x}$ 平面上以时间变量t作为参数的一条曲线，这条曲线可以从给定的方程中消去变量 t 而求得，就是把原方程组化为连接x和 $\dot{x}$ 的一个一阶微分方程.这样，Poincaré建立了一个合适的几何结构来研究平面微分方程的定性性态. Poincaré关心的不是特殊类型方程的积分法，而是所有二阶微分方程的各种可能性态的分类，利用引进的这种轨线概念，Poincaré便能把微分方程理论中的问题

作为拓扑问题来阐明和解决.

用上述方法，Poincaré为动力系统抽象概念的系统阐明铺平了道路. 实际上，这一概念的系统阐述属于 A. A. Markov和H. Whitney. 这两位作者分别注意到，在一个适当的空间X中，人们能够研究曲线（轨线）族的定性理论，只要假定这些曲线族的可能性态受到某种限制，例如，这些曲线族是由作用在X上的一个一般单参数拓扑变换群定义的.

G. D. Birkhoff的工作对于动力系统理论的研究起了巨大的推动作用，实际上，可以认为他是这个理论的奠基人. 1927年，他的关于动力系统的名著(Birkhoff[1]) 是三十年代和四十年代许多研究工作的基础，至今，此书也并不过时. Birkhoff建立了关于动力系统理论的两个主要的研究方向，即拓扑理论和遍历理论.

1947年，V. V. Nemytskii和V. V. Stepanov[1] 完成了他们的《微分方程定性论》[1] 一书，至今此书仍作为一本权威性参考书，因为它概括了直到十九世纪四十年代中期在动力系统理论方面的所有重要进展. 1949年，Nemytskii[10] 写了一篇关于动力系统理论的拓扑问题的综合性文章，该文总结了直到十九世纪四十年代末几乎所有涉及到拓扑理论的研究成果.

在十九世纪五十年代，比较大的力量是花在将动力系统的概念推广到拓扑变换群. 这样，在1955年W. H. Gottschalk和G. A. Hedlund[1] 的书问世了，从此后，出版了一大批有关这方面的研究著作. 除了Gottschalk和Hedlund的工作以外，还有R. Ellis, H. Furstenberg, J. Auslander, H. Chu, F. Hahn, S. Kakutani有关这方面的工作也值得注意. 另一方面，常微分方程结构稳定性

---

1) 已有中译本，《微分方程定性论》（上、下册），王柔怀，童勤谟译，科学出版社，1956年. ——译者注.

的问题已导致努力引用微分拓扑的概念和方法，以及S. Smale, D. V. Anosov, J. Moser，M. Peixoto和L. Markus的理论. 在这方面Anosov[1]的专著是值得注意的.

近代，由于引进了Liapunov稳定性问题，动力系统的基础理论已有所扩展，关于这种稳定性方面的工作，在动力系统和拓扑变换群比较早期的工作中是特别缺少的. 在这方面，T. Ura的工作，特别是他的延伸理论，以及延伸理论与稳定性的联系，已清楚地表明稳定性理论的一个重要方面实质上是拓扑的，因而属于动力系统理论的主要方向. V. I. Zubov[1]曾经试图引进Liapunov直接方法. 然而，他主要是把微分方程中已有的结果和方法引入到度量空间的流中，并没有致力于把它们发展成为独立的理论.

本书想用简明易懂的方式来阐述度量空间上动力系统理论的最新成果，特别是稳定性理论及其在微分方程理论中的具体应用.

本书不介绍近代研究中一些有趣的领域，如结构稳定性理论（它需要某些微分拓扑的知识)、遍历理论和拓扑变换群的一般理论. 为了使得本书的叙述保持在易于为大学三、四年级学生能理解的水平上（他们已有一些度量空间和微分方程的知识)，我们不介绍局部动力系统，虽然大多数结果对于这种系统也是正确的. 局部半动力系统（N. P. Bhatia和O Hajek[1])、不满足唯一性的流（G. P. Szegö和G. Treccani[1]）是当代发展的另外较重要的领域. 虽然本书不包含这些内容，但是对于所有想在上面提到过的任何一个领域里深入研究的读者，本书对于他们定会有帮助的.

至于本书所包含的内容，第Ⅰ—Ⅶ章包含度量空间中动力系统的基础理论，第Ⅷ和第Ⅸ章包括稳定性理论（第Ⅴ章）的应用

和推广到由常微分方程所定义的动力系统上去。具体地说，第Ⅰ章包括动力系统的定义，指出了各种不同领域里应用的一些例子。第Ⅱ章包括动力系统在某些拓扑变换下保持不变的一些基本概念。第Ⅲ章主要论述极小集合和它们的构造。第Ⅳ章致力于扩散动力系统和可平行化动力系统的研究。本书所研究的基础理论部分到此结束。第Ⅴ章展开本书的主题，即稳定性和吸引性理论。这里所介绍的理论完全不同于Zubov所发展的理论，它们基本上是建立在弱吸引性概念（这在Zubov的工作中是没有的）基础上的。第Ⅵ章致力于更专门的问题：在紧不变集合近旁流的分类。给出了一些结果，但这方面的许多问题仍然是悬而未决的。第Ⅶ章包括由T. Ura开创的高阶延伸理论及其在绝对稳定性和广义回复中的应用。第Ⅷ章论述自治常微分方程稳定性的几何理论，包括 Liapunov 直接方法的各种各样的推广。第Ⅸ章仍然致力于通过非连续Liapunov 函数来表征稳定性和吸引性概念这一更专门的问题。象弱吸引性这样一些概念不是用连续Liapunov函数可表征的。

关于本书的编排形式是：每章分为几节，最后不标数码的一节为注释和参考文献。在每一节中，每一条（定义、定理等等）连贯地标以数码，每一条可再分成带有连贯数码的几款。引用同一章中的内容不标章数，例如参考2.5.3表示同一章的第2节，第5条，第3款。引用其他章的内容有一个章数标号，例如Ⅱ，3.17表示在第Ⅱ章中第3节的第17条。参考文献目录是以作者姓名来编排的，必要时，另外在方括号内再给出一个数码。

第I章 动力系统

在这一章中，我们引进动力系统的定义，动力系统也称为连续流。给出几个一般的例子，以激励读者去学习动力系统理论，并为此作些准备。全书用记号X表示具有度量ρ的度量空间，R表示实数集合。

1. 定义和有关记号

1.1 定义 在X上的一个动力系统是一个三元组(X,R,π)，其中π是乘积空间$X\times R$到空间X的一个映射，且满足下列公理：

1.1.1 恒等公理 $\pi(x,0)=x$，对每一个$x\in X$，

1.1.2 群公理 $\pi(\pi(x,t_1),t_2)=\pi(x,t_1+t_2)$，对每一个$x\in X$和$R$内的$t_1$，$t_2$，

1.1.3 连续性公理 π是连续的。

给定在X上的一个动力系统，空间X和映射π分别称为（动力系统的）相空间和相映射。除非特别申明，以后在X上的一个动力系统总假定是给定的

以后，我们一般删去记号π，这样一来，在$X\times R$内点(x,t)的映象$\pi(x,t)$简写成xt，由此恒等公理和群公理记作

1.1.4 恒等公理 $x0=x$，对每一个$x\in X$，

1.1.5 群公理 $xt_1(t_2)=x(t_1+t_2)$，对每一个$x\in X$和R内的t_1，t_2。

按照这种记法，如果$M\subset X$和$A\subset R$，则MA是集合$\{xt:x\in M和t\in A\}$。如果M或A是单点集，即$M=\{x\}$或$A=\{t\}$，则对于$\{x\}A$和$M\{t\}$分别简写成xA和Mt。对任何$x\in X$，集合

xR称为经过x的轨线（参看Ⅱ，1.9）.

当变量x或t有一个固定时，相映射确定另外两个映射，即对固定的$t\in R$，由$\pi^t(x)=xt$所确定的映射π^t：$X\to X$称为转移；而对固定的$x\in X$，由$\pi_x(t)=xt$所确定的映射$\pi_x:R\to X$称为（经过x的）运动．注意，π_x把R映射到xR上．

下列定理表明转移π^t的一个重要性质．

1.2 定理 对每一个$t\in R$，π^t是X到自身的一个同胚映射．

证 对任何$t\in R$，由于π连续，因此转移π^t也是连续的．为了证明π^t是一对一的满映射，只须注意到，如果$yt=zt$，则从$y=y0=y(t-t)=yt(-t)=zt(-t)=z(t-t)=z0=z$，得到$y=z$．反之，如果$y\in X$，则对于$x=y(-t)$容易验证$\pi^t(x)=y$．最后为了证明$\pi^t$有一个连续逆映射，我们只需指出转移$\pi^{-t}$是$\pi^t$的逆转移．为此只要注意到对于任何两个转移$\pi^t$和$\pi^s$，其合成$\pi^t\circ\pi^s$是转移$\pi^{t+s}$，因为对任何$x\in X$，有

$$\begin{aligned}\pi^t\circ\pi^s(x)&=\pi^t(\pi^s(x))=\pi^t(xs)=xs(t)=x(t+s)\\&=\pi^{t+s}(x).\end{aligned}$$

再注意转移π^0是恒等转移，因此对任何$x\in X$，$\pi^0(x)=x0=x$．现在从$\pi^{-t}\circ\pi^t=\pi^{t-t}=\pi^0$得到转移$\pi^{-t}$是$\pi^t$的逆转移．

1.3 习题

1.3.1 试证转移$\pi^t(t\in R)$形成一个以转移合成作为群运算的交换群．

1.3.2 对任何$x\in X$和$[a,b]\subset R$，集合$x[a,b]$是紧的和连通的．

2．动力系统的一些例子

2.1 自治常微分系统 考虑自治微分系统

2.1.1 $\frac{dx}{dt}=\dot{x}=f(x)$,

其中$f: R^n\to R^n$（R^n是实n维欧氏空间）是连续的，并且假定对每一个$x\in R^n$存在定义在R上且满足$\varphi(0,\ x)=x$的唯一解$\varphi(t,x)$。那末，众所周知（例如参看Coddington和Levinson[1]第一章和第二章)，由解的唯一性推得

2.1.2 对R内的t_1，t_2，$\varphi(t_1,\varphi(t_2,x))=\varphi(t_1+t_2,x)$，$\varphi$作为一个从$R\times R^n$到$R^n$的函数，对于它的变量是连续的（Coddington和Levinson[1]第二章第四节）。显然，映射$\pi: R^n\times R\to R^n$，使得$\pi(x,t)=\varphi(t,x)$在R^n上定义了一个动力系统。注意，2.1.1的解具有如上所要求的条件是可以得到的。例如，若函数f满足整体Lipschitz条件，即存在正数k，使得

2.1.3 对R^n内的一切x,y，$\|f(x)-f(y)\|\leqslant k\|x-y\|$。

2.2 自治常微分系统（续） 为了说明本章所定义的动力系统理论适用于类型广泛的自治常微分系统，我们考虑系统

2.2.1 $\frac{dx}{dt}=\dot{x}=f(x)$, $\qquad x\in R^n$,

其中$f:D\to R^n$是定义在某个开集$D\subset R^n$上的连续函数，且对每一个$x\in D$，2.2.1有定义在最大区间(a_x,b_x)上的唯一解$\varphi(t,x)$，$\varphi(0,x)=x$，其中$-\infty\leqslant a_x<0<b_x\leqslant+\infty$。对每一个$x\in D$，定义$\gamma^+(x)=\{\varphi(t,x):0\leqslant t<b_x\}$和$\gamma^-(x)=\{\varphi(t,x):a_x<t\leqslant 0\}$。$\gamma^+(x)$和$\gamma^-(x)$分别称为经过点$x\in D$的正半轨线和负半轨线。我们将证明对于每一个系统2.2.1有下列系统与之对应：

2.2.2 $\frac{dx}{dt}=\dot{x}=g(x)$, $\qquad x\in R^n$,

其中$g:D\to R^n$，使得2.2.2在D上定义了一个动力系统，且具有这样的性质：对每一个$x\in D$，系统2.2.1和2.2.2有相同的正半轨线

和负半轨线.这样,在一般情况下,完全可以用2.2.2来代替2.2.1.

如果$D=R^n$，则对于给定的2.2.1，设

2.2.3 $$\frac{dx}{dt}=\dot{x}=g(x)=\frac{f(x)}{1+\|f(x)\|},$$

其中$\|\cdot\|$是欧氏距离模. 如果$D\neq R^n$，则$\partial D\neq\phi$且是闭的. 在这种情况下，对于给定的2.2.1，设

2.2.4 $$\frac{dx}{dt}=\dot{x}=g(x)=\frac{f(x)}{1+\|f(x)\|}\cdot\frac{\rho(x,\partial D)}{1+\rho(x,\partial D)},$$

其中$\rho(x,\partial D)=\inf\{\|x-y\|:y\in\partial D\}$. 每当系统2.2.1有唯一解时，我们能证明2.2.3或2.2.4在R^n或D上定义了一个动力系统.并且2.2.3(或2.2.4)和2.2.1有相同的正半轨线和负半轨线.

2.3 含参数的自治常微分系统 考虑微分系统

2.3.1 $$\dot{x}=f(x,\mu),\qquad x\in R^n,$$

其中μ是在度量空间M上的一个参数,$f:R^n\times M\to R^n$是连续的,假定对每一个$(x,\mu)\in R^n\times M$有定义在R上且满足$\varphi(0,(x,\mu))=x$的唯一解$\varphi(t,(x,\mu))$.令$X=R^n\times M$，定义$\pi:X\times R\to X$，其中$\pi((x,\mu),t)=(\varphi(t,(x,\mu)),\mu)$.容易验证$\pi$在$R^n\times M=X$上定义了一个动力系统.

2.4 非自治常微分系统 考虑微分系统

2.4.1 $$\dot{x}=f(t,x),\qquad x\in R^n,t\in R,$$

其中f: $R\times R^n\to R^n$连续,假定对每一个$(t_0,\ x_0)\in R\times R^n$,2.4.1有唯一解$\varphi(t,t_0,x_0)$,$\varphi(t_0,t_0,x_0)=x_0$，对一切$t\in R$有定义. 考虑映射$\pi$: $X\times R\to X$，其中$X=R\times R^n$，$\pi((t,\ x),\ s)=(s+t,\ \varphi(s+t,\ t,\ x))$，于是$\pi$在$X$上定义了一个动力系统. 事实上，这个动力系统对应于在R^{n+1}内等价的自治微分系统.