解析几何
习题解答

北京市《初等数学》编写组编

人民教育出版社

内 容 提 要

本书是《解析几何》(人民教育出版社，1975 年 6 月修订第一版)的习题解答．为了便于查找，在练习、习题和复习题的标题下面和题号前面的括号内列出了原书上的页次．另外在各章题解后增加了一些参考题，供读者选作．书末附有参考题的解答，供参考．

解析几何习题解答

北京市《初等数学》编写组编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北 京 新 华 印 刷 厂 印 装

*

1978 年 7 月第 1 版　1978 年 10 月第 1 次印刷

书号 13012·0181　　定价 0.36 元

目　　录

第一章　曲线与方程

第一节　距离和定比分点

习　题(第 19 页)

[19] 1. 在直角坐标系中描出下列各点：

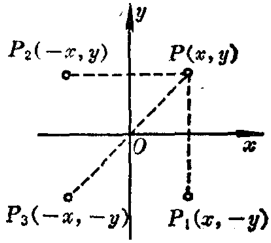
(1,3), (1,−3), (−1,3), (−1,−3),

(0,4), (0,−4), (4,0), (−4,0).

作图略.

[19] 2. (1) 求 $P(x,y)$ 关于 x 轴、y 轴的对称点 P' 的坐标；

(2) 求与 $P(x,y)$ 对称于原点的点 P' 的坐标．并指出第 1 题中那些点是互相对称的(关于 x 轴、y 轴或原点)．



(第 2 题)

解：如图，

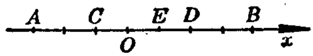
(1) $P_1(x,-y)$与 $P(x,y)$ 关于 x 轴对称．$P_2(-x,y)$ 与 $P(x,y)$关于 y 轴对称.

(2) $P_3(-x,-y)$与 $P(x,y)$关于原点对称.

第一题中，(1,3)与(1,−3)、(−1,3)与(−1,−3)、(0,4)与(0,−4)关于 x 轴对称．(1,3)与(−1,3)、(−1,−3)与(1,−3)、(4,0)与(−4,0)关于 y 轴对称．(1,3)与(−1,−3)、(−4,0)与(4,0)、(0,4)与(0,−4)、(−1,3)与(1,−3)关于原

点对称.

[19] 3. 如图，x 轴上每一格等于一个单位长度，写出有向线段 AB、BC、CD、DE、EA 的数量和长度.



(第 3 题)

解：有向线段 AB 的数量：

$$AB=x_2-x_1=4-(-3)=7.$$

有向线段 AB 的长度：

$$|AB|=|x_2-x_1|=|4-(-3)|=7.$$

同理，有向线段 BC、CD、DE、EA 的数量和长度分别为：

$$BC=-1-4=-5,\quad |BC|=5;$$

$$CD=2-(-1)=3,\quad |CD|=3;$$

$$DE=1-2=-1,\quad |DE|=1;$$

$$EA=-3-1=-4,\quad |EA|=4.$$

[19] 4. y 轴上 A、B 两点的纵坐标分别是 y_1 和 y_2，设

(1) $y_1=8,\quad y_2=6$; (2) $y_1=5,\quad y_2=-3$;

(3) $y_1=-4,\quad y_2=0$; (4) $y_1=-9,\quad y_2=-11$.

求 AB、BA 和 $|AB|$.

解：(1) $AB=y_2-y_1=6-8=-2$,

$BA=y_1-y_2=8-6=2$,

$|AB|=2$.

(2) $AB=-3-5=-8$,

$BA=5-(-3)=8$,

$|AB|=8$.

(3) $AB=0-(-4)=4$,

$BA=-4-0=-4$,

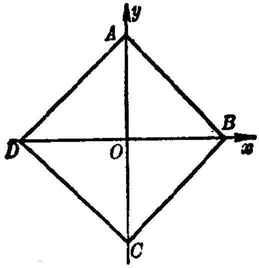
$|AB|=4.$

(4) $AB=-11-(-9)=-2,$

$BA=-9-(-11)=2,$

$|AB|=2.$

[19] **5.** 正方形的边长为5，以两条对角线为坐标轴，写出四个顶点的坐标.



（第5题）

解：$\because$ $OA^2+OB^2=5^2,$

$\therefore$ $2\,OA^2=25,$

$$OA=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

同理 $$OB=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

又 A、C 关于 x 轴对称，B、D 关于 y 轴对称，A、B、C、D 四点的坐标分别为

$$A\left(0,\frac{5\sqrt{2}}{2}\right),\qquad B\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},0\right),$$

$$C\left(0,-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right),\qquad D\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2},0\right).$$

[20] **6.** 一个质点从 $A(-3,2)$ 点到 $B(4,5)$ 点作直线运动，求它经过的距离.

解：$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$=\sqrt{(4+3)^2+(5-2)^2}$

$=\sqrt{58}.$

[20] **7.** 求证：以 $A(0,0)$、$B(3,1)$、$C(1,7)$ 为顶点的三角形是直角三角形.

证明：$\because$ $AB^2=(3-0)^2+(1-0)^2=10,$

$BC^2=(1-3)^2+(7-1)^2=40,$

$AC^2=(1-0)^2+(7-0)^2=50,$

$\therefore$ $AB^2+BC^2=10+40=50=AC^2.$

因此，$\triangle ABC$ 是直角三角形.

[20] **8.** 在 x 轴上有一点 P，它和 $A(1,-3)$ 点的距离等于 5，求 P 点的坐标.

解：设 P 点的坐标是 $(x,0)$.

由 $\sqrt{(x-1)^2+(0+3)^2}=5,$

得 $(x-1)^2+9=25,$

$x-1=\pm4,$

$\therefore$ $x_1=5,\ x_2=-3.$

因此所求的点是 $P_1(5,0)$，$P_2(-3,0)$.

[20] **9.** 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(-a,0)$、$B(a,0)$、$C(0,\sqrt{3}a)$，求证这个三角形是等边三角形.

证明：$\because$ $|AB|=\sqrt{(a+a)^2+(0-0)^2}=2a,$

$|BC|=\sqrt{(0-a)^2+(\sqrt{3}a-0)^2}=2a,$

$|CA|=\sqrt{(0+a)^2+(\sqrt{3}a-0)^2}=2a.$

$\therefore$ $|AB|=|BC|=|CA|,$

$\therefore$ $\triangle ABC$ 是等边三角形.

[20] **10.** 三角形的三个顶点是 $A(2,1)$、$B(-2,3)$、$C(0,-1)$，求三条中线的长.

解：AB、BC、AC 三边中点 E、F、D 坐标分别为

$$x_E=\frac{2+(-2)}{2}=0,$$

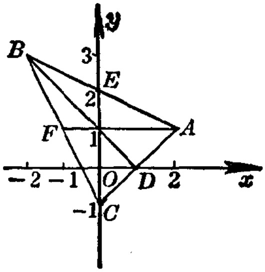
$$y_E=\frac{1+3}{2}=2;$$

$$x_D=\frac{2+0}{2}=1,$$

$$y_D=\frac{1+(-1)}{2}=0;$$

$$x_F=\frac{-2+0}{2}=-1,$$

$$y_F=\frac{3+(-1)}{2}=1.$$



(第 10 题)

$\therefore$ $$|AF|=\sqrt{(2+1)^2+(1-1)^2}=3,$$
$$|BD|=\sqrt{(1+2)^2+(0-3)^2}=3\sqrt{2},$$
$$|CE|=\sqrt{(0-0)^2+(2+1)^2}=3.$$

[20] **11.** 连结 $P_1(2,y)$ 和 $P_2(x,6)$ 两点的线段的中点是 $P(3,2)$，求 x 和 y.

解：$\because$ P 点是 P_1P_2 的中点，

$\therefore$ $$3=\frac{2+x}{2},\qquad 2=\frac{6+y}{2}.$$

即 $$x=4,\ y=-2.$$

[20] **12.** 绘制 $I=\frac{bd^3}{12}$ 的算图，b:1～10，d:1～10，图尺长取 10 cm.

[20] **13.** 用测绳测得矩形耕地的长是 u 米，宽是 v 米，计算矩形耕地的亩数的公式是 $S=0.0015uv$. 绘制矩形地积算图：u 取 10～100 米，v 取 10～100 米，图尺长取 10 cm.

第 12、13 题绘制算图参看《解析几何》第 14 页.

第二节　曲线的方程和方程的图形

习　题(第 26 页)

[26] **1.** (1, −2)、(2, −3)、(3, 10)三个点是否在方程

$$x^2-xy+2y+1=0$$

的图形上?

解: 将(1, −2)、(2, −3)、(3, 10)三个点的坐标分别代入方程 $x^2-xy+2y+1=0$, 得

$$1^2-1\times(-2)+2(-2)+1=1+2-4+1=0,$$

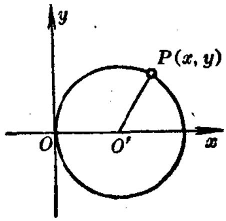
$$2^2-2(-3)+2(-3)+1=4+6-6+1\neq 0,$$

$$3^2-3\times 10+2\times 10+1=9-30+20+1=0.$$

∴　(1, −2)、(3, 10)在图形上, (2, −3)不在图形上.

[26] **2.** 求圆心在(2, 0)点, 半径等于 2 的圆的方程.

解: 选定坐标系如图. 在圆上取一动点 $P(x, y)$, 它到 $O'(2, 0)$的距离等于 2, 即



(第 2 题)

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}=2.$$

∴　$(x-2)^2+y^2=4.$

圆上任何一点的坐标 $P(x, y)$ 都满足这个方程; 反之, 凡坐标满足上述方程的点, 到(2, 0)点的距离都等于 2, 所以所求圆的方程是 $(x-2)^2+y^2=4$.

[26] **3.** 一动点到 x 轴的距离和到 $F(0, 4)$ 点的距离保持相等, 求它的轨迹的方程, 并作出轨迹的图形.

解：设动点是 $P(x,y)$，它到 x 轴的距离和到 $F(0,4)$ 点的距离相等，即

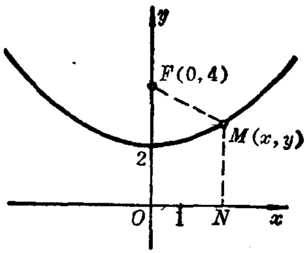
$$\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2}=|y|.$$

两边平方，得

$$x^2+(y-4)^2=y^2.$$

化简后，得

$$x^2-8y+16=0.$$



(第 3 题)

凡适合已知条件的点的坐标必适合这个方程；反之，凡坐标满足上述方程的点，必满足已知条件．因此 $x^2-8y+16=0$ 即为所求的轨迹方程．

轨迹的图形可结合该方程特点，用描点法作图．

方程 $y=\frac{1}{8}x^2+2$ 中，把 x 换成 $-x$，方程不变，所以该方程的图形关于 y 轴对称．

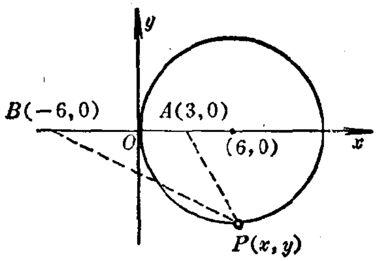
又 $\quad -\infty<x<\infty,\ \ y\geqslant 0.$

列表：

x	0	± 2	± 4	…
y	2	$\frac{5}{2}$	4	…

轨迹方程的图形如图．

[27] **4.** 一动点到$A(3,0)$点的距离，等于它到$B(-6,0)$点的距离的一半，求它的轨迹的方程，并作图.



(第 4 题)

解：设动点是$P(x,y)$.

根据题设条件，得

$$|PA|=\frac{1}{2}|PB|,$$

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(x+6)^2+y^2}.$$

两边平方，得

$$(x-3)^2+y^2=\frac{1}{4}[(x+6)^2+y^2].$$

化简，得 $$x^2+y^2-12x=0,$$

即 $$(x-6)^2+y^2=36.$$

凡适合已知条件的点的坐标必适合这个方程；反之，凡坐标满足上述方程的点，必满足已知条件. 因此

$$(x-6)^2+y^2=36$$

即为所求的轨迹方程.

轨迹方程的图形如图.

[27] **5.** 怎样判断一个方程的图形是否对称于x轴？对称于y轴？对称于原点？

答：在方程中，如果把x换成$-x$，方程不变，图形关于y轴对称；如果把y换成$-y$，方程不变，图形关于x轴对称；如果把x,y同时换成$-x,-y$，方程也不变，图形关于原点对称.

[27] 6. 判断下列各方程的图形的对称性和范围，作出它们的图形：

(1) $x^2=4y$，　　(2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，

(3) $x^2=y^3$，　　(4) $x^2-4y^2=16$.

答：(1) 把 x 换成 $-x$，方程不变，图形关于 y 轴对称.

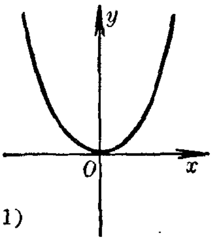
由 $$y=\frac{x^2}{4},$$

∴ $$-\infty<x<\infty,\quad y\geqslant 0.$$

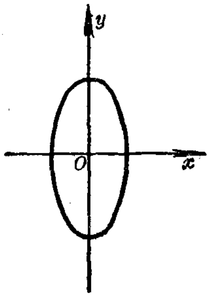
(2) 把 x 换成 $-x$，y 换成 $-y$，或把 x、y 同时换成 $-x$、$-y$，方程均不变，因此图形关于 y 轴、x 轴、原点均对称.

由 $$y=\pm\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2},$$

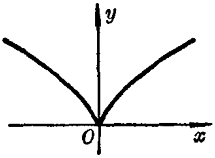
∴ $$-2\leqslant x\leqslant 2,\quad -3\leqslant y\leqslant 3.$$



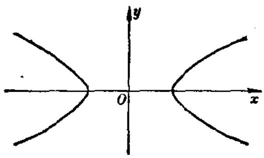
(1)



(2)



(3)



(4)

(第 6 题)

(3) 把 x 换成 $-x$，方程不变，图形关于 y 轴对称。

由 $$y=\sqrt[3]{x^2},$$

∴ $$-\infty<x<\infty,\quad y\geqslant 0.$$

(4) 把方程变形 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1.$

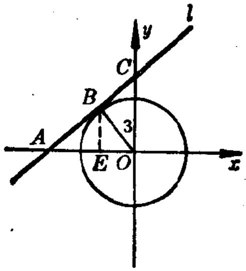
图形关于 x 轴、y 轴、原点均对称。

由 $$y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{x^2-16},$$

∴ $$x\geqslant 4,\quad x\leqslant -4,\quad -\infty<y<\infty.$$

复 习 题（第 28 页）

[28] 1. 如图，⊙O 以原点为圆心，半径等于 3，直线 l 和⊙O 切于 B 点，交 x 轴、y 轴于 A、C；$\angle AOB=50°$. 求 A、B、C 三点的坐标。



（第 1 题）

解：∵ l 与⊙O 切于 B 点，

∴ $$OB\perp l.$$

又 $$\angle AOB=50°,$$

∴ $\angle BAO=40°$，$\angle ACO=50°$.

∴ $$OA=\frac{OB}{\cos AOB}=\frac{3}{\cos 50°}=\frac{3}{0.6428}\approx 4.67.$$

A 点坐标为 $(-4.67,0)$.

又 $$OC=\frac{BO}{\sin ACO}=\frac{3}{\sin 50°}=\frac{3}{0.766}\approx 3.92.$$

C 点坐标是$(0,3.92)$.

过 B 作 $BE\perp AO$.

$$\therefore\quad BE=y_B=OB\cdot\sin BOE=3\sin 50^\circ=3\times 0.766$$

$$\approx 2.30.$$

$$OE=x_B=3\cos 50^\circ=3\times 0.6428\approx 1.93.$$

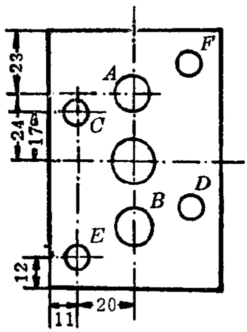
B 点坐标是$(-1.93,2.30)$.

[28] 2. 工件图样如图，取适当坐标系，写出 A、B、C、E 四个点的坐标.

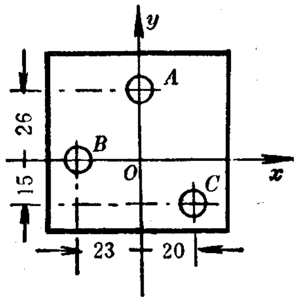
解: 取过 A、B 的直线为 y 轴，AB 的中点为坐标原点，过这点与 y 轴垂直的直线为 x 轴. 则

$A(0,24)$, $B(0,-24)$,

$C(-20,17)$. $E(-20,-35)$.



(第 2 题)



(第 3 题)

[28] 3. 在图上选择适当的坐标系，计算每两个孔中心的距离(单位是 mm).

解: 如图建立坐标系，则

$A(0,26)$,

$$B(-23,0),$$
$$C(20,-15).$$
$$\therefore \quad |AB|=\sqrt{23^2+26^2}$$
$$=\sqrt{1205}\approx 34.7(\text{mm}),$$
$$|AC|=\sqrt{20^2+(-15-26)^2}$$
$$=\sqrt{2081}\approx 45.6(\text{mm}),$$
$$|BC|=\sqrt{(20+23)^2+(-15)^2}$$
$$=\sqrt{2074}\approx 45.5(\text{mm}).$$

[28] **4.** (0,7)、(1,10)、(2,3)、(−3,5)四个点在不在方程 $3x-y+7=0$ 表示的直线上?

解: 分别将这四个点的坐标代入方程:

$\because$ $3\times 0-7+7=0$, $\quad\therefore$ (0,7)点在直线上;

$\because$ $3\times 1-10+7=0$, $\quad\therefore$ (1,10)点在直线上;

$\because$ $3\times 2-3+7\neq 0$, $\quad\therefore$ (2,3)点不在直线上;

$\because$ $3\times(-3)-5+7\neq 0$, $\therefore$ (−3,5)点不在直线上.

[28] **5.** 方程$(x-2)^2+(y-3)^2=R^2$ 所表示的曲线,在什么条件下经过坐标原点?

解: 将原点(0,0)代入方程,得

$$(-2)^2+(-3)^2=R^2,$$
$$\therefore \quad R=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}.$$

因此 $R=\sqrt{13}$ 时,上述方程所表示的曲线经过原点.

[28] **6.** 已知方程 $3x+4y-10+\lambda(4x-6y+7)=0$ 的图形经过(4,−7)点,求 λ 的值.

解: 将(4,−7)代入方程,得

$$3\times 4+4\times(-7)-10+\lambda[4\times 4-6\times(-7)+7]=0.$$

∴ $\lambda=0.4.$

[28] 7. 设有两点 $F_1(-4,0)$ 和 $F_2(4,0)$，求具有下列性质的动点 P 的轨迹的方程，并作出图形：

(1) 到 F_1、F_2 两点距离的比等于 $\frac{4}{3}$，

(2) 到 F_1、F_2 两点距离的平方差等于 32.

解：(1) 设动点 $P(x,y)$ 到 F_1、F_2 两点距离的比等于 $\frac{4}{3}$，

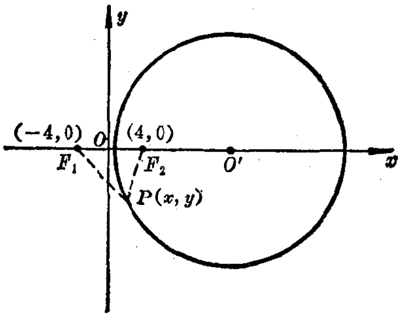
即
$$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{4}{3},$$

∴ $$3\sqrt{(x+4)^2+y^2}=4\sqrt{(x-4)^2+y^2}.$$

两边平方并化简，得
$$7x^2+7y^2-200x+16\times7=0.$$

整理，得
$$\left(x-\frac{100}{7}\right)^2+y^2=\left(\frac{96}{7}\right)^2.$$

到 F_1、F_2 两点距离的比等于 $\frac{4}{3}$ 的任一点都满足这个方程；反之，坐标满足上述方程的点，到 F_1、F_2 两点距离的比等于 $\frac{4}{3}$. 所以该方程为所求的轨迹方程. 它的图形是以 $O'\left(\frac{100}{7},0\right)$ 为圆心、$\frac{96}{7}$ 为半径的圆.



(第 7 题(1))