透平机械三元流动计算及其数学和气动力学基础

王仲奇 著

机 械 工 业 出 版 社

透平机械三元流动计算及其数学和气动力学基础
王仲奇 著
*
机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)
(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)
重庆印制一厂印刷
新华书店北京发行所发行 · 新华书店经售
*
开本 787×1092 1/16 · 印张$17^3/_4$ · 字数431千字
1983年2月重庆第一版 · 1983年2月重庆第一次印刷
印数0,001—4,400 · 定价2.20元
*
统一书号：15033·5400

作 者 的 话

自1973年以来，我们为有关的研究所、工厂的科技人员、高等院校的有关专业的教师举办过四期《透平机械三元流动》学习班；为哈尔滨工业大学的研究生和高年级大学生开设过《透平机械三元流动》、《向量分析》和《张量计算》等课，并编写了“透平长叶片级的空气动力学”、“透平机械三元流动计算及其数学和气动力学基础”、“向量与张量分析及其在气动力学中的应用”、“曲线座标系及其在透平机械三元流动计算中的应用”等讲义。本书就是以这四本讲义为基础编写的。

我在教学和编写本书的过程中得到了吴仲华教授，中国科学院工程热物理研究所的陈乃兴、蔡睿贤、吴文权、凌之光、葛满初、朱荣国，清华大学的叶大均、蒋滋康、上海机械学院的王甲生、刘高联以及作者的同事焦德勇等同志的大力帮助。

我的学生、本书责任编辑、机械工业部情报所林雅丽工程师全面审阅了书稿，并提出了许多宝贵意见。

对以上诸同志，作者表示衷心地感谢。

由于作者水平所限，错误和不妥之处在所难免，诚恳希望得到批评指正。

作者

序　言

各种形式的透平机械（或称叶轮机械）在能源、交通和国防等方面正在得到日益广泛的应用。叙述流体在其内部的三元流动的理论也相应地得到了很大发展。为了简洁地描述流体在三元空间中包含有速度、加速度等向量的各种属性的变化，在理论发展的初期，就应用了数学中向量分析这个工具，将流体运动所须遵循的各个物理定律用向量形式表达出来。以后随着计算技术的发展，采用非正交曲线座标及相应的非正交的速度分量可以更好地满足现代透平机械中复杂形状的边界条件，更准确地计算流体的三元流动，我们就需要使用张量分析这一门数学工具了。当然，在具体求解不论是用向量形式表达或者是用张量形式表达的透平机械内部运动时所须遵循各个物理定律时，我们还须用到大量的关于偏微分方程理论、数值计算方法，计算机运算等数学知识。

目前，适用于各种透平机械的三元流动理论正在透平机械工业中得到越来越广泛的应用。工作在透平机械的生产、教学、科研战线上的广大工程人员需要掌握透平机械的三元流动理论和计算方法。王仲奇同志自五十年代起即从事透平机械方面的教学与科研工作，有着很丰富的教学经验。现在他根据他多年工作的心得，为有志于学习透平机械三元流动理论及其应用的大学生、研究生和科技工作者写了这本书。针对过去和当前透平机械专业的教学计划中包括向量分析和张量计算的内容过少这一事实，作者在本书的第一章至第六章中结合透平机械的应用，作了很详细的介绍。我相信本书的出版将为我国广大透平机械的科技工作者提供一个很有用的基础参考材料，将为我国广泛在各种透平机械的设计中应用三元流动理论起一个很有力的促进作用。

吴仲华

一九八二年十月一日于

北京中关村

目　　录

第一章 向量分析

§1-1 向量与数量

在物理学中，我们常常碰到一些用大小或多少衡量的量，例如温度、密度和质量等，这些物理量称为数量。而速度、加速度和压力等，这些物理量不仅有大小，而且还有方向。这种既有大小又有方向的量，我们称为向量。在数学上用一条有方向的线段来表示向量，这条线段的长度表示向量的大小，其方向则表示该向量的方向。

本书用黑体字表示向量，如图 1-1 所示，**V** 表示向量。向量的大小称向量的模，用非黑体字相同符号表示向量的模，向量**V**的模用V表示。

模等于 1 的向量称为单位向量，模等于零的向量称为零向量。

下面讨论向量的加法和减法。首先观察某一个质点以等速完成了两个移动（图 1-2）：

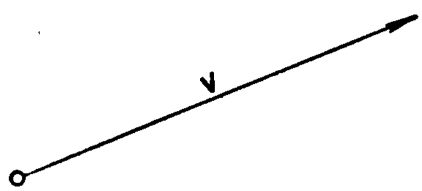

图1-1 向量表示图

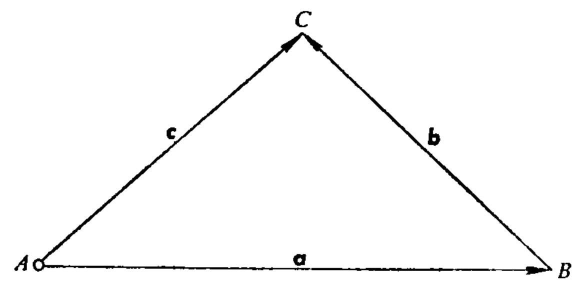

图1-2 向量的合成

第一次从A点移动到B点；第二次从B点移动到C点。质点第一次移动的距离用向量 **a** 表示，第二次移动的距离用向量 **b** 表示。经过两次移动，质点所占居的C点与移动前质点所占居的位置A点之间的距离用向量 **c** 表示。向量 **c** 应等于向量**a**和**b**之和。由图不难看出，向量 **a** 和 **b**相加的法则是：将向量 **b** 的始点与向量 **a** 的终点重合，从向量 **a** 的始点至向量 **b** 的终点的有向线段AC即表示两向量**a**和 **b** 之和 **c**，即

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b} \tag{1-1}$$

有一向量 **a**，与该向量 **a** 的模相等，而方向相反的向量称为向量 **a** 的负向量，并记作-**a**。向量**a** 减去向量 **b** 等于向量 **d** 的运算法则是：在向量 **a** 上加上向量 **b** 的负向量-**b** 即得向量**d**（图1-3）。

由图1-3不难看出，如果将向量 **a** 和 **b** 的始点重合，以此二向量为两个邻边作平行四边形，连结此二向量始点的平行四边形对角线，即为向量**a**和 **b** 之和，另一对角线为向量**a** 和**b** 之差。

前面已经讲到，向量通常用空间中有方向的线段来表示。将向量置放在某一座标系中，并将它投影到座标轴上进行研究是比较方便的。在透平机械中，常用的有直角座标系，又称笛卡尔座标系和圆柱座标系。而对于具有较复杂形状边界的流场计算，采用曲线座标系比较方便。

首先介绍直角座标系：取三个互相垂直的平面，这三个平面相交的一点称为座标原点。

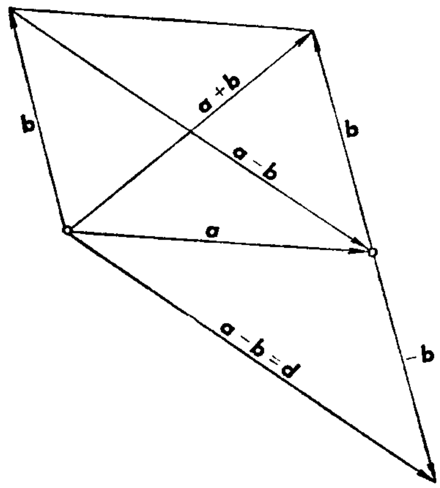

图1-3　向量的加法与减法

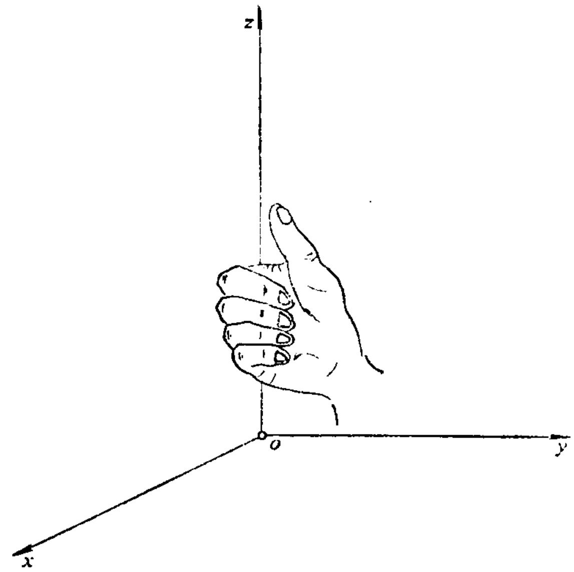

图1-4　直角座标系

通常用o表示座标原点。任意两个座标平面的相交线都是通过座标原点的直线。这三个互相垂直且通过原点o的直线称为座标轴，一般情况下，用x、y、z表示这三个座标轴（图1-4）。它们的正方向按右手法则确定，即以右手握住z轴，当右手的四个手指从x轴的正向以90°转向y轴的正向，大姆指的指向就是z轴的正向（图1-4）。

下面讨论某一向量 **a** 在某一方向 **u** 上的投影。如图1-5所示，向量**a**在**u**轴上的投影a_u为**u**轴上的某一线段$A'B'$，该线段是由两个分别通过向量始点A和终点B且与**u**轴垂直的平面切割而成的。当线段$A'B'$的方向与**u**轴的正方向一致时，投影a_u为正，否则为负。通过A点引一条直线，该直线与**u**轴平行并与通过B点且垂直于**u**轴的平面相交于B''点。不难看出，线段AB''与向量**a**的投影$A'B'$相等，于是

$$a_u = a\cos\sigma \tag{1-2}$$

或

$$a_u = a\cos(\mathbf{a}, \mathbf{u}) \tag{1-3}$$

式中　(**a**,**u**)表示向量**a**与**u**之间的夹角σ。

向量**a**在直角座标系中的投影如图1-6所示。如果用**i**、**j**、**k**分别表示直角座标系的x、y、z轴方向的单位向量，则根据向量相加法则，向量**a**可用其投影表示

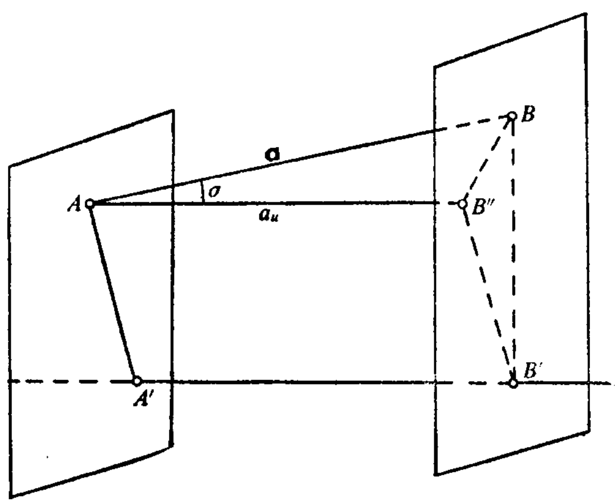

图1-5　向量在某方向上的投影

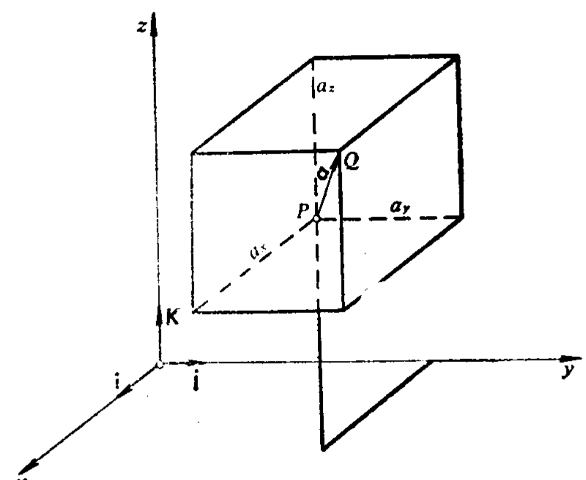

图1-6　直角座标系中向量的投影

$$\mathbf{a}=\mathbf{i}a_x+\mathbf{j}a_y+\mathbf{k}a_z \tag{1-4}$$

式中　a_x、a_y、a_z 分别表示向量a在座标轴x、y、z方向上的投影。

公式(1-4)叫做向量a的座标表示式。

不用举例，读者即可明了向量的和差反映了日常生活中以及工程技术中经常遇到的物理现象。同样，两个向量的乘积也是从客观世界的许多物理现象中概括出来的。向量的乘积分为两类：一类叫做向量的数量积，另一类叫做向量的向量积。

首先讨论向量的数量积。

在物理学中，常常遇到力推动物体作功的问题。设一个不变的力 F（包括大小和方向均不变）作用于某一物体。在此力的作用下，物体沿直线从P点移动到Q点。物体移动的距离用(PQ)表示（图1-7）。这时，力F所作的功等于

$$W=F(PQ)\cos\alpha \tag{1-5}$$

式中角α为力F与物体移动方向的夹角。由式(1-5)可知，需要对两个向量进行运算：一个向量是作用力F，另一个向量是物体移动的距离。运算结果所得到的功为一数量，它等于两个向量的模与它们之间夹角余弦的乘积。我们将这个乘积叫做两向量的数量积。设有两个向量a和b，其数量积用 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 表示，即

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=ab\cos(\mathbf{a},\mathbf{b}) \tag{1-6}$$

如果将式(1-5)中物体移动的距离用向量S表示，则式(1-5)可写作

$$W=\mathbf{F}\cdot\mathbf{S} \tag{1-7}$$

当两个向量a和b之夹角为锐角时，该二向量的数量积为正，而当a和b之夹角为钝角时，二向量的数量积为负。当向量a与向量b互相垂直时，其数量积$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$

两向量的数量积又称点积或内乘积。

两向量a与b的向量积用$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$表示，它是一个向量，其模等于由此二向量为两个邻边所作平行四边形的面积，其方向按右手法则确定，即当右手的四个手指从向量 a 以最短的角距离转向向量b时，大姆指的指向即为向量积的正方向。例如，当物体转动时，作用于物体上的力F所产生的力矩M即为作用力F与物体转动的回转半径 r 的向量积。如图1-8所示。力F 相对

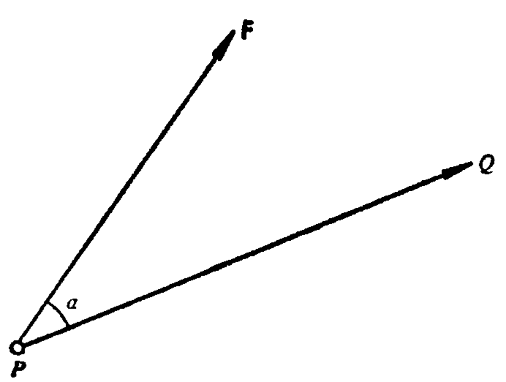

图1-7　力作功示意图

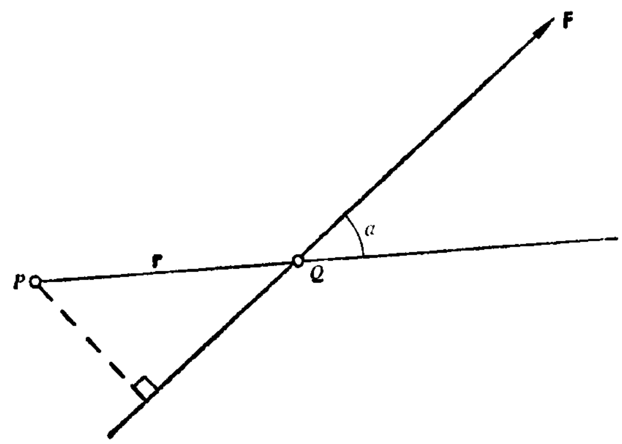

图1-8　力矩示意图

于P点产生的力矩值为

$$M=Fr\sin\alpha \tag{1-8}$$

力矩M的模等于由向量F和 r 为两邻边所作平行四边形之面积。力矩M的正方向垂直图面向

下。如果用向量 c 表示二向量 a 和b 的向量积，则

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b} \tag{1-9}$$

其模等于

$$c=ab\sin(\mathbf{a},\mathbf{b}) \tag{1-10}$$

两向量的向量积又称叉积或外乘积。

例题1-1

试证明两向量a与b之数量积等于两向量在直角座标系中向相同座标轴方向投影的乘积之和，即

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \tag{1-11}$$

［解］

根据式(1-4)

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}&=(\mathbf{i}a_x+\mathbf{j}a_y+\mathbf{k}a_z)\cdot(\mathbf{i}b_x+\mathbf{j}b_y+\mathbf{k}b_z)\\&=a_xb_x\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+a_xb_y\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+a_xb_z\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}+a_yb_x\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+a_yb_y\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}\\&\quad+a_yb_z\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}+a_zb_x\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}+a_zb_y\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}+a_zb_z\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\end{aligned}$$

由于在直角笛卡尔座标系中，单位向量 i、j、k 互相垂直，所以

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0 \tag{1-12}$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1 \tag{1-13}$$

所以

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

例题1-2

试证明两向量的向量积的座标表达式为下列形式

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix} \tag{1-14}$$

或者

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{i}(a_yb_z-a_zb_y)+\mathbf{j}(a_zb_x-a_xb_z)+\mathbf{k}(a_xb_y-a_yb_x) \tag{1-15}$$

［解］

根据向量的座标表达式(1-4)得

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b}&=(\mathbf{i}a_x+\mathbf{j}a_y+\mathbf{k}a_z)\times(\mathbf{i}b_x+\mathbf{j}b_y+\mathbf{k}b_z)\\&=a_xb_x\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_xb_y\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_xb_z\mathbf{i}\times\mathbf{k}+a_yb_x\mathbf{j}\times\mathbf{i}+a_yb_y\mathbf{j}\times\mathbf{j}\\&\quad+a_yb_z\mathbf{j}\times\mathbf{k}+a_zb_x\mathbf{k}\times\mathbf{i}+a_zb_y\mathbf{k}\times\mathbf{j}+a_zb_z\mathbf{k}\times\mathbf{k}\end{aligned}$$

由于单位向量 i、j、k 是三个互相垂直的向量，所以

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0\\\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\quad\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\quad\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\\\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k},\ \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i},\ \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}\end{array}\right\} \tag{1-16}$$

由此不难得到

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{i}(a_yb_z-a_zb_y)+\mathbf{j}(a_zb_x-a_xb_z)+\mathbf{k}(a_xb_y-a_yb_x)$$

此式即为式(1-15)，它的行列式即为式(1-14)。

讨论了两个向量的数量积和向量积以后，便可进一步讨论三个向量的乘积。既然两向量

的乘积分为数量积和向量积两种情况，那么，三向量 a、b、c 的乘积也必然分几种情况。

在三个向量 a、b、c 中任意两个向量，例如向量 b 和 c 可以是向量积，也可以是数量积。首先讨论向量 b 和 c 的乘积为数量积的情况。从前面的讨论中知道，数量积 b·c 为一数量，它与第三个向量 a 既不能构成数量积，也不能构成向量，它只能与第三个向量 a 进行常规的相乘，即 a (b·c)。这个三向量的乘积为一向量，其方向与向量 a 的方向一致，其模等于数量积 b·c 与向量 a 的模 a 的乘积。同理，三向量的乘积b(a·c)和 c(a·b)具有类似的意义。

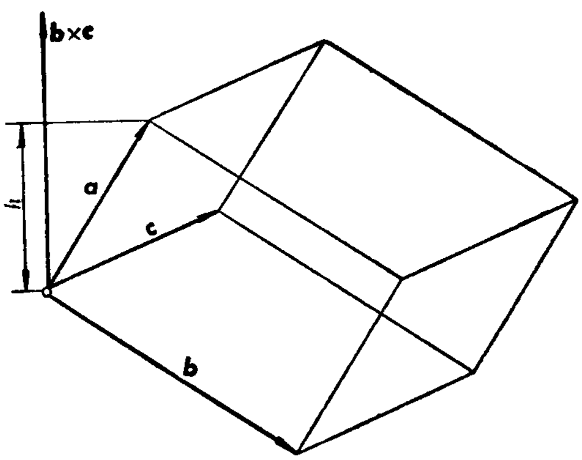

图1-9　三向量的混合积

当向量 b和c 的乘积为向量积时，它与第三个向量a可以点乘，也可以叉乘，即

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}),\quad \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

由此可以看出，第一个三向量的乘积为数量积，它称为三向量的向量-数量积或称 三 向量的混合积；第二个三向量乘积为一向量，它叫做三向量的二重向量积。

首先讨论三向量的向量-数量积a·(b×c)的几何意义。前面已经讲过，b×c 的模代表以b和c 为两邻边的平行四边形的面积，所以a·(b×c)应代表一个平行六面体的体积。由图1-9不难看出，向量a在向量b×c方向上的投影 h 等于

$$h=a\cos(\mathbf{a},\ \mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

而 h 为平行六面体的高度，这样，六面体的体积 v 为

$$v=|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|h=|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|a\cos(\mathbf{a},\ \mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

所以

$$v=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \tag{1-17}$$

方程(1-17)是一个很重要的公式。由于此式表示一个平行六面体的体积，所以，我们不难得到下列公式

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) \tag{1-18}$$

此式说明，在三向量的向量-数量积中，三个向量按循环法则换位不改变乘积之值。

最后讨论三向量的二重向量积 a×(b×c)。这个二重向量积可用行列式形式表示

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ (\mathbf{b}\times\mathbf{c})_x & (\mathbf{b}\times\mathbf{c})_y & (\mathbf{b}\times\mathbf{c})_z \end{vmatrix} \tag{1-19}$$

而向量积b×c的行列式为

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{1-20}$$

二重向量积a×(b×c)在直角坐标系中沿x轴方向的投影为

$$\begin{aligned}[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]_x &= a_y(\mathbf{b}\times\mathbf{c})_z-a_z(\mathbf{b}\times\mathbf{c})_y \\ &=a_y(b_xc_y-b_yc_x)-a_z(b_zc_x-b_xc_z) \\ &=b_x(a_yc_y+a_zc_z)-c_x(a_yb_y+a_zb_z)\end{aligned}$$

在此式的右端加一项 $a_xb_xc_x$，并减去该项

$$[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]_x=b_x(a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z)-c_x(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)$$
$$=b_x(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-c_x(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \qquad (1\text{-}21)$$

同理可得

$$[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]_y=b_y(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-c_y(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \qquad (1\text{-}22)$$

$$[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]_z=b_z(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-c_z(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \qquad (1\text{-}23)$$

式(1-21)、(1-22)和(1-23)分别代表二重向量积在直角座标系中沿x、y和z三个轴上的投影。这样，二重向量积可表示为

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \qquad (1\text{-}24)$$

此式叫做二重向量积的分解式。三向量的二重向量积中的括弧不能去掉，例如二重向量积 $\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ 表示一个垂直于向量$\mathbf{a}$和向量 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 的向量，只要向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$不为零，该二重向量积 $\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ 就不等于零，但是二重向量积$(\mathbf{a}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}$却为零，这是因为$\mathbf{a}\times\mathbf{a}=0$。由此看来，二重向量积中的括弧是必不可少的。

三向量的二重向量积的分解式(1-24)可以这样记忆：三向量的二重向量积分解为两项相减，第一项等于中间向量乘以另外两个向量的数量积，第二项等于括弧中另一向量乘以其余两向量的数量积。

例题1-3

试证明$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$

[解]

令 $\mathbf{e}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$，这样便可根据式(1-18)和(1-24)得

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\mathbf{e}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\mathbf{d}\cdot(\mathbf{e}\times\mathbf{c})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{d}\times\mathbf{e})$$
$$=\mathbf{c}\cdot[\mathbf{d}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]=\mathbf{c}\cdot[\mathbf{a}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{b})-\mathbf{b}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{a})]$$
$$=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{b})-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{a})$$

于是

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \qquad (1\text{-}25)$$

或者写成易于记忆的行列式形式

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{d}\\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}\end{vmatrix} \qquad (1\text{-}26)$$

例题1-4

试证明 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\mathbf{b}[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]-\mathbf{a}[\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]$

[解]

只要令 $\mathbf{e}=\mathbf{c}\times\mathbf{d}$，根据式(1-24)，上式显而易见成立，即

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{e}=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e})-\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{e})$$

所以

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\mathbf{b}[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]-\mathbf{a}[\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})] \qquad (1\text{-}27)$$

§1-2 向量函数对于数变量的导数

令向量函数$\mathbf{a}$是某一自变量t的函数，并记作$\mathbf{a}(t)$。当自变量t取某一值时，与它相对应

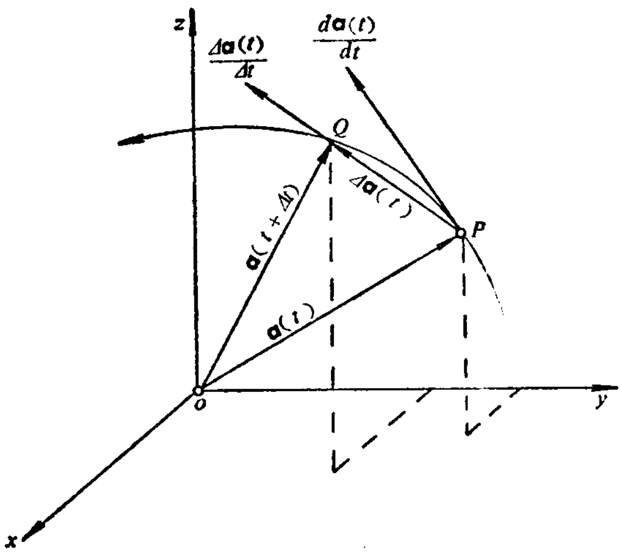

图1-10 向量函数的导数

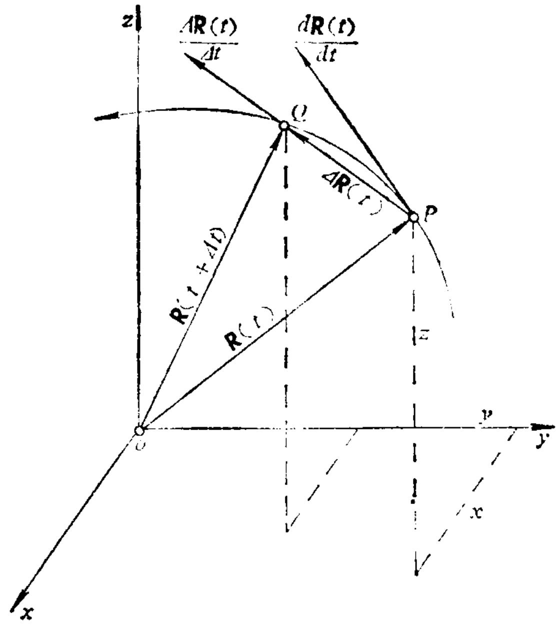

图1-11 曲线运动

的函数值为$\mathbf{a}(t)$，它在直角座标系中可分解为

$$\mathbf{a}(t)=\mathbf{i}a_x+\mathbf{j}a_y+\mathbf{k}a_z \tag{1-28}$$

图1-10中的$\overrightarrow{OP}$表示向量函数 $\mathbf{a}(t)$的大小和方向。当给自变量t某一微小增量Δt时，得到另一函数值$\mathbf{a}(t+\Delta t)$，它在直角座标系中可分解为

$$\mathbf{a}(t+\Delta t)=\mathbf{i}a_x(t+\Delta t)+\mathbf{j}a_y(t+\Delta t)+\mathbf{k}a_z(t+\Delta t) \tag{1-29}$$

由图1-10不难看出，线段$\overrightarrow{PQ}$表示函数的增量$\Delta\mathbf{a}(t)$，于是

$$\Delta\mathbf{a}(t)=\mathbf{a}(t+\Delta t)-\mathbf{a}(t) \tag{1-30}$$

将式(1-28)和(1-29)代入式(1-30)

$$\Delta\mathbf{a}(t)=\mathbf{i}\Delta a_x(t)+\mathbf{j}\Delta a_y(t)+\mathbf{k}\Delta a_z(t)$$

式中

$$\Delta a_x(t)=a_x(t+\Delta t)-a_x(t)$$
$$\Delta a_y(t)=a_y(t+\Delta t)-a_y(t)$$
$$\Delta a_z(t)=a_z(t+\Delta t)-a_z(t)$$

由于我们研究的是连续函数，即当Δt趋向于零时，下式各项的极限是存在的，所以

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta a(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\Delta a_x(t)}{\Delta t}\mathbf{i}+\frac{\Delta a_y(t)}{\Delta t}\mathbf{j}+\frac{\Delta a_z(t)}{\Delta t}\mathbf{k}\right]$$

由此得

$$\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt}=\frac{da_x(t)}{dt}\mathbf{i}+\frac{da_y(t)}{dt}\mathbf{j}+\frac{da_z(t)}{dt}\mathbf{k} \tag{1-31}$$

此式表明，向量导数在座标轴上的投影等于相应的向量投影的导数。

一个流体微团在空间的位置可以用直角座标系中三个座标 x、y、z 确定，也可以如图1-11所示的那样用向径$\mathbf{R}$确定。向径的始点与座标系原点重合，或者说，向径发自于座标系原点，而向径的终点与流体微团所处的位置重合。这样向径$\mathbf{R}$就可用座标系的三个座标表示

$$\mathbf{R}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z \tag{1-32}$$

如果用t表示时间，那么，在某一时间t时，流体微团的位置用$\mathbf{R}(t)$确定。而经过时间

间隔 Δt 时，流体微团占居空间点Q的位置，Q点的位置用向径$\mathbf{R}(t+\Delta t)$确定。由图1-11不难看出，$\Delta\mathbf{R}(t)$表示流体微团在时间间隔 Δt 内所移动的距离。它在直角座标系中沿三个座标轴方向上的投影分别用Δx，Δy，Δz表示。而 $\Delta\mathbf{R}(t)/\Delta t$ 则表示在时间间隔 Δt 内，流体微团运动的平均速度。当 Δt 趋向于零时，这个平均速度的极限即表示流体微团在瞬时 t 在空间P点时的速度

$$\mathbf{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{R}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\mathbf{i}\Delta x+\mathbf{j}\Delta y+\mathbf{k}\Delta z}{\Delta t}\right)$$

所以

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{R}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\mathbf{i}+\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)\mathbf{j}+\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)\mathbf{k}$$

由此得

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{R}}{dt}=\frac{dx}{dt}\mathbf{i}+\frac{dy}{dt}\mathbf{j}+\frac{dz}{dt}\mathbf{k} \tag{1-33}$$

于是

$$d\mathbf{R}=dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}+dz\mathbf{k} \tag{1-34}$$

式(1-33)表示，速度 $\mathbf{v}$ 等于流体微团所占位置的向径$\mathbf{R}$对时间的导数。

§1-3　数量场与向量场的微分

如果在流场内不同的空间位置上，某参数，例如流体的温度，具有一定的值，并且随着位置的不同，其值也不同，这样就可以确定这个参数与流场位置的函数。这样的函数称为点函数。如果这个函数具有数量性质，例如温度和密度，则点函数称为数量点函数；如果这个函数具有向量性质，例如速度、加速度和力等，则点函数称为向量点函数。数量点函数所展布的空间称为数量场，而向量点函数所展布的空间称为向量场。流场中温度和密度的分布表示数量场，而速度的分布则表示向量场。

在非定常的流场中，空间固定位置上的流体参数随时间而变化，另外，同一个流体参数在不同的流场位置上可能有不同的值。这样，在非定常的数量场中，某一数量参数φ是流场空间位置$\mathbf{R}$和时间 t 的函数

$$\varphi=\varphi(t,\ \mathbf{R}) \tag{1-35}$$

例如，在一个非定常的温度场中，在某一固定位置上，温度要随时间而变化，而在不同的固定位置上，在一般情况下，温度之值亦不相同，这样，温度函数可表示为

$$T=T(t,\ \mathbf{R}) \tag{1-36}$$

在非定常的速度场中，速度函数可表示为

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}(t,\ \mathbf{R}) \tag{1-37}$$

在以上三式中，t 表示时间。

在定常流场中，同一个固定位置上，流体参数，例如温度T，密度ρ，速度 $\mathbf{v}$，在所有的时间内均保持为常数，流体参数仅是流场中不同位置的函数，即

$$T=T(\mathbf{R}),\ \rho=\rho(\mathbf{R}),\ \mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{R}) \tag{1-38}$$

在一般情况下，流场中的点函数在一定时间和一定的位置上仅有一个值，这样的函数称为单值函数。此外，在流场中的流体参数，在大多数的情况下，也是连续的。今后如不特别

说明，我们讨论的函数均指单值连续函数。在本章中，用 φ 表示一个数量函数，而用 $\mathbf{v}$ 表示一个向量函数，前者可以代表气体的温度、密度、熵、焓等，而后者可以代表气体运动的速度、加速度、压力等。

如图1-12所示，在瞬时 t，P点的数量函数值为φ，在P点相邻的Q点上（即瞬时 $t+dt$），数量函数之值为$D\varphi+\varphi$，它等于

$$\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt+\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

由此可得

$$D\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt+\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz \tag{1-39}$$

式中 $D\varphi$表示函数φ的总变化，即它是由于流场的不稳定性（非定常性），在dt时间间隔内引起的函数φ的变化$(\partial\varphi/\partial t)dt$和在同一瞬时 t 由于流场内位置不同（由向径$\mathbf{R}$变为$\mathbf{R}+d\mathbf{R}$）所引起的函数变化$d\varphi$，即

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz \tag{1-40}$$

这样，函数φ的总变化$D\varphi$可表示为

$$D\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt+d\varphi \tag{1-41}$$

在定常流场中，函数φ对时间的偏导数为零

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

$d\varphi$ 是在给定的某瞬时 t，相邻位置上函数φ的变化。注意，此处所谓相邻位置是指流场中任何与位置P相邻的位置Q。P点和Q点并不一定处于同一条流线上。

如果φ为单值连续函数，则在流场的每一位置上，在某一瞬时 t，存在一个而且仅仅是一个φ值。所以，在每一瞬时，在流场空间内，均可确定一个φ为常数的面。φ为常数的面叫做等量面，又称等势面。

在非定常的流场中，等量面将随时间改变其形状。如果φ为单值连续函数，则在任何瞬时 t，等量面($\varphi=$const)是不能相交的。

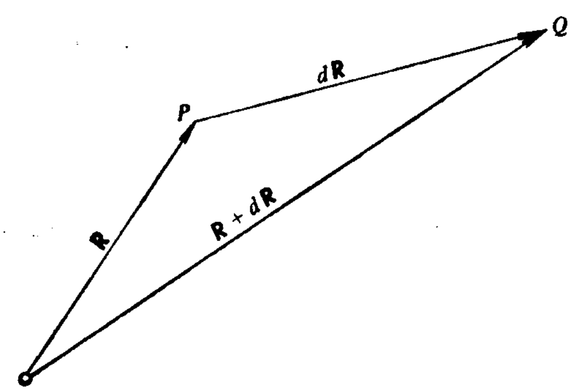

图1-12 流场中的点位置

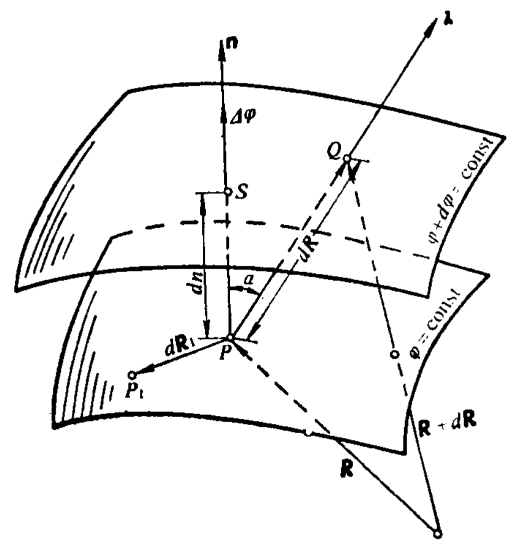

图1-13 函数φ的梯度

图1-13表示通过P点和Q点的两个等势面。Q点是P点相邻的一点。在P点数量函数的值为φ，在同一瞬时，在Q点数量函数的值为$\varphi+d\varphi$。仅仅由于流场中位置不同而起的函数φ的增量$d\varphi$可表示为

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz \tag{1-42}$$

或者

$$d\varphi=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz\right)\varphi \tag{1-43}$$

利用式(1-12)和(1-13)，上式改写为

$$d\varphi=(\mathbf{i}dx+\mathbf{j}dy+\mathbf{k}dz)\cdot\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi$$

引入一个符号∇，它的定义是

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1-44}$$

因此，

$$\nabla\varphi=\mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1-45}$$

于是$d\varphi$可表示为

$$d\varphi=(d\mathbf{R}\cdot\nabla)\varphi=d\mathbf{R}\cdot\nabla\varphi \tag{1-46}$$

∇是个算符，它称为哈密顿算子。它是个象征性的向量，本身并没有物理意义。它的三个分量为

$$\frac{\partial}{\partial x},\quad\frac{\partial}{\partial y},\quad\frac{\partial}{\partial z}$$

在等势面($\varphi=\text{const}$)上取一点P_1（图1-13），该点也是P点的相邻点。P点与P_1点之间的函数增量$d\varphi$按式(1-46)可表示为

$$d\varphi=d\mathbf{R}_1\cdot\nabla\varphi$$

由于在等势面($\varphi=\text{const}$)上，$d\varphi=0$，所以

$$d\mathbf{R}_1\cdot\nabla\varphi=0$$

然而，由于$d\mathbf{R}_1$和$\nabla\varphi$均不为零，所以，$d\mathbf{R}_1$和$\nabla\varphi$必须垂直。于是可得结论：$\nabla\varphi$垂直于等势面$\varphi=\text{const}$，也就是说，$\nabla\varphi$是个向量，它指向等势面的法向。

令$\boldsymbol{\lambda}$为$d\mathbf{R}$方向上的单位向量，而$\mathbf{n}$是等势面($\varphi=\text{const}$)上的单位法向量或表示$\nabla\varphi$方向上的单位向量，这样便有

$$d\varphi=d\mathbf{R}\cdot\nabla\varphi=\boldsymbol{\lambda}dR\cdot\mathbf{n}|\nabla\varphi|=dR|\nabla\varphi|\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{n} \tag{1-47}$$

如图1-13所示，由于$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{n}=\cos\alpha$，所以

$$d\varphi=dR\cos\alpha|\nabla\varphi|=dn|\nabla\varphi| \tag{1-48}$$

由此得

$$|\nabla\varphi|=\frac{d\varphi}{dn} \tag{1-49}$$

由此可知，$\nabla\varphi$的模等于函数φ对距离的最大变化率。向量$\nabla\varphi$称为数量函数φ的梯度。所以，

数量函数φ的梯度是指向函数φ增加最快的方向。例如温度梯度∇T 指向温度增加最快的方向。

在某一瞬时 t，函数φ沿任一方向 $\boldsymbol{\lambda}$ 的变化率可由式(1-47)求得

$$\frac{d\varphi}{dR}=\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla\varphi \tag{1-50}$$

在时间间隔dt内，P点和Q点间，函数φ的总变化$D\varphi$根据式(1-41)和(1-46)可表示为

$$D\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt+d\mathbf{R}\cdot\nabla\varphi \tag{1-51}$$

一个单值的连续向量函数 $\mathbf{V}(t,\mathbf{R})$表示一个非定常的向量场。在瞬时 t，流场中某点P上的向量函数值为$\mathbf{V}$。如图1-14所示，Q点是P点的相邻点。在瞬时$t+dt$，Q点上的函数值为

$$\mathbf{V}+\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}dt+\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x}dx+\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial y}dy+\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z}dz$$

如果用$D\mathbf{V}$表示在时间间隔 dt 内，两相邻点的向量函数总变化，则有

$$D\mathbf{V}=\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}dt+\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x}dx+\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial y}dy+\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z}dz \tag{1-52}$$

令 $d\mathbf{V}$ 表示在同一时间 t，由于空间点的位置不同所引起的向量函数$\mathbf{V}$的变化，即

$$d\mathbf{V}=\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x}dx+\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial y}dy+\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z}dz \tag{1-53}$$

这时，向量函数$\mathbf{V}$的总变化可表示为

$$D\mathbf{V}=\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}dt+d\mathbf{V} \tag{1-54}$$

此式等号右端第一项表示由于流场的非定常性，在时间间隔dt 内引起的向量函数$\mathbf{V}$的变化。

利用向径增量的表达式(1-34)和算符∇的表达式(1-44)不难看出，式(1-53)可改写为

$$d\mathbf{V}=d\mathbf{R}\cdot\nabla\mathbf{V} \tag{1-55}$$

将此式代入式(1-54)，得

$$D\mathbf{V}=\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}dt+d\mathbf{R}\cdot\nabla\mathbf{V} \tag{1-56}$$

如图1-14所示，$\boldsymbol{\lambda}$表示 $d\mathbf{R}$方向上的单位向量，所以得

$$d\mathbf{R}=\boldsymbol{\lambda}dR$$

代入式(1-55)

$$d\mathbf{V}=dR\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla\mathbf{V}$$

由此得

$$\frac{d\mathbf{V}}{dR}=\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla\mathbf{V} \tag{1-57}$$

式中 $d\mathbf{V}/dR$叫做向量函数$\mathbf{V}$沿单位向量 $\boldsymbol{\lambda}$ 方向上的方向导数。它表示向量函数$\mathbf{V}$在$\boldsymbol{\lambda}$方向上的变化率。在向量场中的同一点P上，由于单位向量$\boldsymbol{\lambda}$的不同，其方向导数 $d\mathbf{V}/dR$ 也不同。

在向量函数 $\mathbf{V}(t,\mathbf{R})$ 所在的同一个空间内，给定另一个向量函数 $\mathbf{U}(t,\mathbf{R})$。如果在某个时间 t，向量函数$\mathbf{V}$和$\mathbf{U}$在向径$\mathbf{R}$端点的值是已知的，则$\mathbf{V}$在$\mathbf{U}$方向上的方向导数为

$$\frac{d\mathbf{V}}{dR}=\frac{\mathbf{U}}{U}\cdot\nabla\mathbf{V}$$