经济管理应用数学

微积分

辽宁科学技术出版社

经济管理应用数学（上）

微 积 分

Jingji Guanli Yingyong Shuxue

主 编：张连诚 孙克忠 唐贵才

副主编：陈志强 龙启林 王玉勤 赵善济

辽宁科学技术出版社出版发行（沈阳市南京街6段1里2号）

中国科学院沈阳分院印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：$11^1/_2$ 字数：255,000

1987年8月第1版 1987年8月第1次印刷

责任编辑：路 明 封面设计：庄庆芳

印数：1—16,000

ISBN 7-5381-0008-3/O·1

统一书号：13288·49 定价：2.30元

前　　言

根据1986年6月辽宁省经济管理院校协作组第二次会议纪要精神，同年7月，由十一所院校的代表讨论制订了《管理数学教学大纲》，该大纲适用于经济管理各专业，已得到辽宁省高等教育局的通过，作为全省高校经济管理各专业教学、统考的依据。为此，尽快地编出一套适应教学大纲要求，满足当前教学需要的教材，是当务之急。

《经济管理应用数学》就是为这一目的而编写的一部教材。本书内容分上、中、下三册编写，上册为微积分，中册为线性代数、概率论与数理统计，下册为运筹学。管理数学是经济管理各专业的重要基础课，它培养学生掌握必要的数学基础知识，掌握经济管理中常用的数学方法，提供解决实际中所遇到问题的数学工具，以提高分析问题和解决问题的能力。所以，在编写本书时，注意了理论的科学性和系统性，并联系经济管理的实际，采用循序渐进、由浅入深的方法，力求使它成为一部适用面广，适合教学要求，有自己特色的教材。

参加全书编写工作的院校有沈阳工业学院、辽宁经济管理干部学院、沈阳财经学院、沈阳工业大学、大连管理干部学院、辽宁青年干部学院、辽阳管理干部学院、东北工学院、本钢工学院、沈飞工学院、沈阳商业局职工大学、沈阳有色金属职工大学、沈阳科技干部进修学院、瓦房店轴承厂

职工大学等。参加本书上册微积分部分编写的有下列同志：侯锡五（第一章）、李辉（第二章）、万军（第三章）、冯树德（第四章）、孙书勤（第五章）、郭良、吴硕（第六章）、张连诚（第七章、第八章），由张连诚统稿。

本书由辽宁省管理数学学会名誉理事长、东北工学院潘德惠教授审阅，他给予了热情的指导，并提出了许多中肯的意见。在本书编写过程中，还得到辽宁省高等教育局、辽宁经济管理干部学院和辽宁省管理数学学会的关怀和帮助，在此一并致谢。

本书可作为经济管理类各专业管理数学教材，对于各类成人高等教育（职工大学、干部学院、函授大学、电视广播大学等）经济管理专业也适用，亦可供有关工程技术人员、管理干部短训班和自学参考。

由于时间仓促，编者水平有限，书中谬误难免，敬请读者批评指正。

编　者

1987年5月

目　　录

第一章　函　　数

现实世界中许多事物的变化是相互依赖、相互依存的，反映到量上，其变化存在着某种规律性。函数是研究这种规律性的有力工具，是微积分中最重要的基本概念之一。本章主要介绍函数的定义及其表示法，函数的特性和初等函数的构成，为后面各章的学习打下基础。

§1.1　函数的概念

1. 常量与变量

在一个实际问题中，会出现各种各样的量，归纳起来可以分为两类：一类是在所讨论的问题中保持不变的量，我们称它们为**常量**；另一类是在所讨论的问题中变动的量，我们称它们为**变量**。通常用字母a、b、c、…表示常量，用字母x、y、z、…表示变量。

常量的保持不变，我们可以理解为在所讨论问题的全过程中，它始终取同一个值。变量的变动，理解为在所讨论问题的全过程中，它可以取不同值。例如，在销售某种产品时，产品的单价是常量，每天的销售量和总收入都是变量。又如，我们观察某车间一天的生产情况，材料的消耗、动力的消耗、产品的产量等是变量，设备的数量、当日出勤工人数、产品的品种等一般是常量。

常量和变量的概念与所讨论的问题有关，因此具有相对性。在一定条件下是常量，而在另一种条件下可能就是变量。例如，产品的单价在较短时间内可以看成为常量，在一个较长时间内就是一个变量；在实际销售活动中，针对不同购货对象和方式，单价又分为批发价、零售价和优惠价等，这样单价就是一个变量。

常量和变量的几何意义是，在数轴上用点表示一个量，常量表示成数轴上的一个定点，变量表示成数轴上的动点。

2. 函数的定义

在所讨论的问题中，如果存在着几个量，这些量的变化是互相联系、互相影响的，为了研究这些量，就应该找出它们之间的变化规律，函数关系是最重要的量变规律之一。

例如，考虑销售某产品，用a表示产品的单价，用x表示每天产品的销售量，用y表示每天销售该产品的总收入，则量a、x与y之间的关系，可以表示为

$$y = ax$$

此式表明，当销售量x取定某一值时，产品总收入y就为完全确定的一个值。

又如，我国经济建设总的奋斗目标是，在不断提高经济效益的前提下，力争使全国工农业的年总产值翻两番，即由1980年的7100亿元增加到2000年的28400亿元。在这个问题中，设每年工农业总产值平均增长率为x，由1980年开始第n年的工农业总产值为y（亿元），则它们之间的关系，可以表示为

$$y = 7100\ (1 + x)^n$$

此式表明，当n固定在某年后，对于增长率x每一取定值，总产值y就为完全确定的一个值。特别地，到公元2000年，

$n=20$，当 $x=7.18\%$ 时，$y=28400$（亿元）。即只有工农业总产值平均每年增长7.18%，20年后我国工农业总产值才能翻两番。

一般地，可以用下述方式定义两个变量间的函数关系。

定义 在所讨论的问题中，如果变量 x 在其变化范围内每取一个值，另一个变量 y 依某一个规则总有完全确定的值与之对应，则说 y 是 x 的**函数**，称 x 为**自变量**，y 是**因变量**或 x 的函数，记为

$$y=f(x)$$

其中 f 为函数记号，它表示在所讨论的问题中由 x 确定 y 的规则，也称 f 为函数关系。

前面的引例中，销售量 x 为自变量，总收入 y 为因变量，它是 x 的函数，即

$$y=f(x)=ax$$

其中 f 表示销售量 x 与单价 a 相乘的关系。另一引例中，工农业总产值平均年增长率 x 是自变量，20年后工农业年总产值 y 是因变量，它是 x 的函数，即

$$y=f(x)=4700\ (1+x)^{20}$$

其中 f 表示对年平均增长率 x 施行如下运算 $4700(1+x)^{20}$。

不能把 $f(x)$ 看成是 f 与 x 的乘积，它是 x 与 y 间函数关系的抽象记号，f 反映了 x 与 y 间的对应规律，即对于 x 每一个可能取的值，通过对应规律 f，就能完全确定出一个变量 y 与之对应。对于 x 取某一值 x_0 时，对应的函数值 y_0，可以写成 $f(x_0)$，即 $y_0=f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$。

一般地，自变量 x 的取值范围叫做函数 y 的**定义域**，它表示使函数有意义的自变量的集合。而称函数值 y 的变化范围为函数的**值域**。在前面第一个引例中，如产品销售量的最高

值为M，则函数$y=ax$的定义域为$0\leqslant x\leqslant M$，值域为$0\leqslant y\leqslant aM$；另一个引例中，工农业总产值年平均增长率x可根据实际国情确定在某一范围$a\leqslant x\leqslant b$内，此区间$[a,b]$即为函数$y=4700(1+x)^{20}$的定义域。

综上所述，变量x与y间的函数关系，由三个要素来确立，即对应规律、定义域和值域。

对应规律要根据所讨论问题的实际意义来建立，寻求反映变量对应规律的函数关系，也称为建立实际问题的数学模型，一般来说，这一工作比较困难，它需要较丰富的技术知识和较深厚的数学基础，以及较强的分析问题和解决问题的能力。由于本书仅是经济管理应用数学的基础，我们只介绍较简单的经济管理模型，今后将通过训练逐步提高建立函数关系的能力。

函数的定义域要根据所讨论问题的实际意义和数学意义来确定。考虑函数$y=f(x)$的数学意义主要注意以下几点：

（1）对于分式函数，分母不能为零；

（2）对于偶次根式函数，被开方数不能为负数；

（3）对于对数函数，真数必须为正数；

（4）对于正切函数，角不能取为$k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k=0,\pm1,\cdots$）（余切可类似讨论）；

（5）对于反正弦函数，其自变量值的绝对值不超过1（反余弦可类似讨论）等。

例1　求函数$y=\sqrt{x^2+3x+2}$的定义域，并求$y|_{x=0}$，$y|_{x=2}$

解　函数y的定义域应是使$x^2+3x+2\geqslant0$的一切实数。根据$x^2+3x+2=(x+2)(x+1)\geqslant0$知，当$x\leqslant-2$或$x\geqslant-1$

时函数有意义，故定义域为 $(-\infty, -2]$ 或 $[-1, +\infty)$。

$y|_{x=0}=\sqrt{0^2+3\times0+2}=\sqrt{2}$

$y|_{x=2}=\sqrt{2^2+3\times2+2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

例 2　求函数 $y=f_1(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 的定义域，并与 $y=f_2(x)=x+2$ 进行比较，两函数是否相同？

解　$f_1(x)$ 的定义域是使 $x-2\neq0$ 的一切实数，即 $(-\infty, 2)$ 或 $(2, +\infty)$。

$f_2(x)$ 的定义域为一切实数。

比较 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$，由于定义域不同，两函数不相同。在 $x\neq2$ 的一切点上，两函数有相同的值，$f_1(x)=f_2(x)$；但在 $x=2$ 时，$f_2(x)=2+2=4$，而 $f_1(2)$ 无意义。

例 3　已知 $f(x)=e^{x+2}$，求 $f(x-1)$，$f(x^2+1)$

解　$f(x-1)$ 是将函数 $f(x)$ 中的 x 换成 $x-1$，得到的结果，即

$$f(x-1)=e^{(x-1)+2}=e^{x+1}$$

同理有

$$f(x^2+1)=e^{(x^2+1)+2}=e^{x^2+3}$$

上面讨论的函数，都是对于取自定义域中的每一个值 x，函数 y 仅有一个确定的值与之对应，这样的函数称为**单值函数**，如果对于 x 的每一取值，y 有多个值与之对应，则称这样的函数为**多值函数**。本书中主要讨论单值函数。

3．函数的表示法

在抽象的讨论两个变量 x 与 y 间的函数关系时，可以用记号 $y=f(x)$ 来表示，x 与 y 间的对应规律具体化，可以采取以下三种表示方法。

（1）公式法：将 x 与 y 间的对应规律用数学公式表示出

来，其形式非常简捷，便于计算和进一步进行解析地研究。如销售总收入函数

$$y = ax$$

工农业年总产值y与年平均增长率x的函数

$$y = 4700\ (1 + x)^{20}$$

圆的面积S与半径r的函数

$$S = \pi r^2$$

等等，都是公式法表示的函数。

有时用几个公式表示一个函数，即对于自变量不同的取值范围，函数采用不同的公式，这种函数叫做**分段函数**，它是研究实际问题常用的一种函数表示法。

例 4　火车的客票，如果在 200 公里以内，按每公里 0.03元计费；在200公里以外，按每公里 0.02 元计费。试用公式表示收费M与路程S的函数关系。

解　当 $0 \leqslant S \leqslant 200$时，$M$ 可以表示成$0.03S$；当$200 < S$时，M 表示成$0.03 \times 200 + 0.02\ (S - 200)$ 。将两部分合在一起，写成

$$M = f(S) = \begin{cases} 0.03S & 0 \leqslant S \leqslant 200 \\ 6 + 0.02(S - 200) & 200 < S < +\infty \end{cases}$$

这个函数的定义域为〔0， $+\infty$）。

认为分段函数是由几个函数组成，或它表示几个函数，这是错误的。分段函数是由几个公式表示出来的一个函数。

（2）图示法：对于函数 $y = f(x)$ 我们可以采用几何表示法。在平面直角坐标系里，自变量 x 表示动点的横坐标，函数 y 表示动点的纵坐标，将动点(x, y)的位置找到，当x取定义域〔a, b〕内的所有值时，点(x, y)描绘出的图形称为函数$y = f(x)$的**图象**。一般函数的图象是一条曲线（如图1—1），

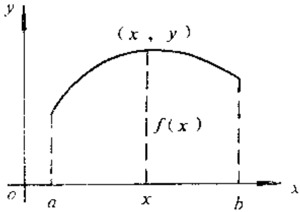

图 1—1

函数的图示法，能把变量x与y的对应规律直观形象地表示出来，便于我们对函数进行研究。有些实际问题只能得到变量间的变化曲线，如各种记录仪上画出的曲线，但用公式表示变量间的函数关系就较困难了。因此，函数的图示法，是实用中经常采用的方法。

将例 4 所给出的函数 $M=f(S)$用图示法表示，它是一条折线，见图1—2。

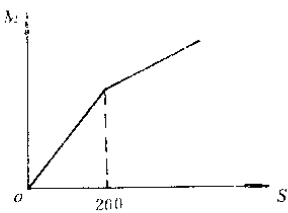

图 1—2

例 5　试用图示法表示下面的函数

$$y=\begin{cases} x^2 & 0\leqslant x<1 \\ 1 & 1\leqslant x \end{cases}$$

解　这是一个分段函数，在〔0,1）段上是抛物线的一部

分；在$[1, +\infty)$上是平行ox轴的直线，见图1—3。

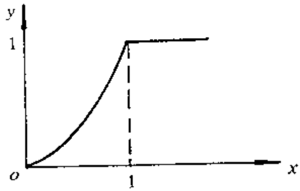

图 1—3

函数 $y=f(x)$的图象可用如下方法画出：在定义域$[a, b]$内选择x_1，x_2，…，x_n，求出对应的函数值y_1，y_2，…，y_n，在平面直角坐标系中，按数组（x_1, y_1），（x_2, y_2），…，（x_n, y_n）描点，然后用平滑的曲线将各点连成曲线。

（3）表格法：将一系列的自变量值与所对应的函数值列成数表，反映出x与y间的对应关系。这种表格直接给出x与y的对应数值，省去了计算过程，减轻了计算工作量，便于在经济管理的实践中查用。例如某产品的材料消耗量x（吨）与产品产量y（台）的关系，列成表格为

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	24	48	72	96	120	144	168	192

数学用表中，平方表、对数表、三角函数表等是用表格表示函数关系的典型实例。

4. 建立函数关系举例

例6　某厂生产某种商品，其年销售量为 a 件，每批生产需增加准备费 b 元，而每件的库存费为 c 元，如果年销售率是均匀的，此时商品库存量为批量的一半，试建立总费用函数。

解　设总费用为 y 元，全年生产的批数为 x 批，由于年销售量为 a 件，知批量为 a/x。生产准备费用为 bx，库存费用为 $(a/2x)\ c$，因此可得

$$y = bx + \frac{ac}{2x}$$

例7　产品的总成本 C 由固定成本 C_0 和变动成本 C_1 两部分组成。如果单位产品的变动成本（称为边际成本）为 a 元，产量为 q，试建立**总成本函数**。

解　根据总成本与固定成本、变动成本的关系，可得

$$C = C_0 + aq$$

这个函数的定义域将根据企业产品产量的生产能力来确定。如最大生产能力为 n 件，则定义域为 $[0, n]$。

如果求平均成本函数 $\overline{C}$，只要将总成本函数 C 除以产量 q 即得

$$\overline{C} = \frac{C}{q} = \frac{C_0 + aq}{q} = a + \frac{C_0}{q}$$

如果以 $R(q)$ 记**总收益函数**，以 $L(q)$ 记**总利润函数**，根据总利润等于总收益减去总成本，得

$$L(q) = R(q) - C(q)$$

例8　一个企业在一定的技术水平和管理组织水平下，某产品的最大产量 q，与各种要素投入量的总和 u 之间的关

系，称为**生产函数**。如果q与u之间的关系为

$$q = au^2 + bu + c$$

其定义域依赖于资源的限制，如投入量的最大值为m，定义域为$[0, m]$。

例 9　在商品经济中，商品的价格与商品的供求量有着密切的关系。一方面价格决定商品供求量的增减；反过来，供求量的增减又使价格波动。设某商品的价格为p元，商品供应量为q_1，市场需求量（销售量）为q_2，则有商品的**供应函数**

$$q_1 = f_1(p)$$

和**需求函数**

$$q_2 = f_2(p)$$

其中f_1、f_2将根据市场的具体情况来确定。

例10　设某商店以每千克p_1元购进一批水果，以p_2元的单价销售。超过三天卖不完，就要削价处理，以每千克p_3元卖掉。如果进货量为a千克，市场三天内的销售量（需求量）为q千克，试建立利润函数$L(q)$。

解　商店销售水果的利润依赖于市场销售量q，题中给出的p_1、p_2、p_3及a都是常量。

当$q<a$时，供应大于需求，商店获得销售q千克水果的收益及处理$a-q$千克水果的收益，减去总支出p_1a即得利润

$$\begin{aligned} L(q) &= p_2q + p_3(a-q) - p_1a \\ &= (p_2 - p_3)q - (p_1 - p_3)a \end{aligned}$$

当$q \geqslant a$时，需求超过供应，商店获得全部进货量a的销售收益，此时利润

$$L(q) = p_2a - p_1a = (p_2 - p_1)a$$

将上述两部分合在一起得分段表示的函数

$$L(q)=\begin{cases}(p_2-p_3)q-(p_1-p_3)a & 0\leqslant q \quad a\\(p_2-p_1)a & a\leqslant q\end{cases}$$

该函数的定义域为〔0，$+\infty$〕，值域为 $-(p_1-p_3)a<L\leqslant(p_2-p_1)a$。

§1.2　函数的简单特性

1．函数的单调性

定义　如果函数 $y=f(x)$ 对于区间 $(a,\ b)$ 内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，如有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内是**单调增加的**；当 $x_1<x_2$ 时，如有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内是**单调减少的**。

单调增加函数的图象是沿 ox 轴正向上升的曲线（如图1—4）；单调减少函数的图象是沿 ox 轴正向下降的曲线（如图1—5）。

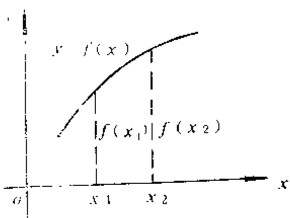

图 1—4

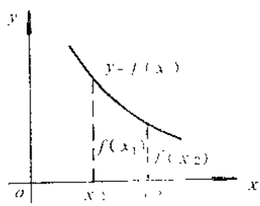

图 1—5

例 1　讨论函数 $f(x)=x^2$ 的单调性。

解　函数 $f(x)=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$。在定义域内任取 $x_1<x_2$。