

通信工程丛书

现代通信工程教学

矩阵方法

胡正名 陈其昌 编著

中国通信学会主编

人民邮电出版社

内 容 提 要

本书介绍现代通信技术中的矩阵方法，包括矩阵的基本理论和在通信技术中的应用。全书共分六章，依次为：矩阵的基础知识、正交阵、矩阵方法在电路网络分析中的应用、码理论中的矩阵方法、数字信号处理中的矩阵方法以及信号系统中的矩阵方法。

本书是当前集中讲矩阵方法在通信中应用的一本专著，要求读者具有微积分和线性代数初步知识。

现代通信工程数学(2)

矩 阵 方 法

胡正名 陈启浩 编著

*

人 民 邮 电 出 版 社 出 版

北京东长安街27号

轻工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

*

开本：1168×850 1/32 1985 年 7 月 第 一 版

印张：16 页数：256 1985年7月京北第一次印刷

字数：424 千字 印数：1—7,000 册

统一书号：15045·总3000-无6320

定价：4.15元

丛 书 前 言

为了帮助我国通信工程技术人员有系统地掌握通信学科有关专业的基础理论知识，提高解决专业科技问题、做好实际工作的能力，了解通信技术的新知识和发展趋势，以便为加快我国通信建设、实现通信现代化作出应有的贡献，我会与人民邮电出版社协作，组织编写这套“通信工程丛书”，准备陆续出版。

这套丛书的主要读者对象是从事通信工作不久的大专院校通信学科各专业毕业生、各通信部门的助理工程师、工程师和其他通信工程技术人员。希望能够有助于他们较快地实际达到通信各专业工程师所应有的理论水平和技术水平。

这套丛书的特点是力求具有理论性、实用性、系统性和方向性，丛书内容从我国实际出发，密切结合当前通信科技工作和未来发展的需要，阐述通信各专业工程师应当掌握的专业知识，包括有关的系统、体制、技术标准、规格、指标、要求，以及技术更新等方面。力求做到资料比较丰富完备，深浅适宜，条理清楚，对专业技术发展有一定的预见性。这套丛书不同于高深专著或一般教材，不仅介绍有关的物理概念和基本原理，而且着重于引导读者把这些概念和原理应用于实际；论证简明扼要，避免繁琐的数学推导。

对于支持编辑出版这套丛书的各个通信部门和专家们，我们表示衷心感谢。殷切希望广大读者和各有关方面提出宝贵的意见和建议，使这套丛书日臻完善。

中国通信学会



前 言

矩阵方法一直是通信工程技术的理论分析的有力数学工具。随着计算机化、数字化时代的即将到来，现代通信技术的理论分析将更离不开矩阵方法。应用矩阵方法去分析通信技术理论的某些问题，不仅表述方便，而且比较形象。如果再充分应用矩阵理论本身固有的特点，就能使一些结论更加简洁明瞭。这也正是近年来越来越多的通信科技工作者都愿意用矩阵方法去分析处理通信技术理论的原因。

本书不仅系统地叙述了矩阵基本理论知识，着重分析了矩阵方法在通信工程中的应用，而且还适当地介绍了一些有关应用矩阵方法于现代通信中的新进展的内容。

全书共分六章，前两章介绍矩阵理论的基础知识。考虑到正交阵在通信工程技术中的广泛应用，因而，我们专门列入了一章正交阵的内容。后面四章都是矩阵方法在通信工程中的应用。这四章内容不仅每章独立，甚至某些节也是独立的，读者可以根据自己的需要，分别选读有关章、节，不必按顺序从前向后逐章逐节阅读。

当然，矩阵方法在通信技术方面的应用，并不仅仅限于这四章所论述的内容。为了适应现代通信技术发展的需要，同时也为了突出矩阵方法固有特点，我们对于信息数字化、码化方面的应用内容安排得略多一点；而有一些领域，书中虽有所涉及，但限于篇幅，安排得就较少一些。

关于现代通信技术中矩阵方法的新课题方面，我们认为，无论是从矩阵理论与方法上来看，还是从现代通信技术的要求上来看，矩阵稀疏化都是值得我们关注的课题。如果在矩阵稀疏化方面有所突破，必将大大提高我们处理信号、加速通信的能力。这方面的工

作，还不是非常成熟，尚有潜力可挖。本书第五章涉及到有关这方面的内容。

本书前三章由陈启浩执笔，后三章由胡正名执笔。由于编著者水平有限，本书定有不妥之处，谨请读者指正。

编著者

1984. 12月

目 录

前 言	1
第一章 矩阵的基础知识	1
第一节 向量	1
1.1 向量及其运算	1
1.2 向量组的线性相关性	4
1.3 向量组的秩	7
第二节 矩阵及其秩	9
2.1 矩阵的概念	9
2.2 矩阵的秩	13
2.3 矩阵秩的计算	15
第三节 矩阵的运算和变换	21
3.1 矩阵的代数运算 (一): 加法, 数乘和乘法	21
3.2 矩阵的代数运算(二): 转置, 求逆	27
3.3 矩阵的代数运算(三): 分块矩阵运算	36
3.4 矩阵的分析运算	49
3.5 矩阵的变换	58
第四节 矩阵的特征概念与对角化	63
4.1 特征矩阵与特征多项式	63
4.2 特征值与特征向量	66
4.3 化对角阵	71
4.4 化约当阵	77
本章小结	87
第一章 参考资料	88

第二章 正交阵	89
第一节 数域的概念	89
第二节 正交阵	97
2.1 正交向量	98
2.2 正交阵	105
2.3 实对称阵	108
2.4 实二次型简介	118
第三节 U 阵(酉阵)	125
3.1 U 阵	125
3.2 厄密特阵	126
3.3 厄密特二次型简介	130
第四节 哈达玛阵	134
4.1 定义和性质	134
4.2 有限数域 J_p	137
4.3 有限域 $F(p')$	142
4.4 构造方法	150
本章小结	165
第二章 参考资料	166
第三章 矩阵方法在电路网络分析中的应用	167
第一节 引言	167
第二节 线图	168
2.1 基本知识	169
2.2 基本性质	173
第三节 有关线图的三个重要矩阵	175
3.1 关联矩阵	176
3.2 回路矩阵	179
3.3 割集矩阵	185
第四节 基尔霍夫定律的矩阵表示	190
4.1 KCL 的矩阵表示	190
4.2 KVL 的矩阵表示	193
第五节 电路网络分析方法	195

5.1 结点法	197
5.2 回路法	205
5.3 割集法	210
5.4 状态变量法	215
本章小结	229
第三章 参考资料	230
第四章 码理论中的矩阵方法	231
第一节 $(0, 1)$ -矩阵	231
第二节 生成格雷码的矩阵方法	232
2.1 矩阵变换法	232
2.2 矩阵形式的十进数顺序置换法	235
2.3 矩阵形式的反射法	239
第三节 多元格雷码的矩阵方法	241
3.1 3 进制格雷码与 m 进制格雷码	241
3.2 常用的 m 进码矩阵式与 m -格雷码矩阵式	247
第四节 伪随机矩阵	253
4.1 伪随机码	253
4.2 伪随机矩阵	261
第五节 码空间的矩阵方法	265
5.1 生成矩阵与校验矩阵	265
5.2 求对偶子空间的矩阵方法	271
第六节 汉明码的矩阵分析	278
第七节 一般信道编码的矩阵方法	287
7.1 BCH 码的生成矩阵与校验矩阵	287
7.2 BCH ($n=15, k=7$) 码纠两个差错的具体过程	292
第八节 非块码的生成矩阵与校验矩阵	300
第九节 矩阵码	310
第十节 等重等距码的矩阵方法	314
本章小结	325
第四章 参考资料	326

第五章 数字信号处理中的矩阵方法	327
第一节 FFT 的矩阵方法	327
1.1 FFT—矩阵稀疏化	327
1.2 FFT—矩阵循环卷积化	342
1.3 长 $N=N_1N_2\cdots N_m$ ($N_1, N_2, \cdots, N_m$ 两两互素) 的循环卷积运算	353
1.4 FFT—矩阵降阶处理法	363
第二节 沃尔什函数的矩阵方法	369
2.1 完备离散沃尔什函数组的矩阵表示	369
2.2 沃尔什阵的特性与沃尔什阵的统一生成法	380
第三节 离散信号沃尔什谱的矩阵分析	383
3.1 沃尔什变换的快速算法—沃尔什阵的稀疏化	386
3.2 信号移位的谱点变化问题	403
第四节 并元微分算子的矩阵形式与并元积分算子	423
4.1 并元微分算子	423
4.2 并元积分算子	426
4.3 关于 D_p 与 $\tilde{I}_p$ 的互为伪逆的关系	427
第五节 斜变换的矩阵表示及其稀疏化的快速算法	430
5.1 斜变换的矩阵表示	430
5.2 斜变换矩阵稀疏化的快速算法	432
第六节 离散余弦变换的矩阵方法	434
本章小结	440
第五章 参考资料	441
第六章 信号、系统中的矩阵方法	442
第一节 确定信号的矩阵表示	442
第二节 随机信号的协方差矩阵与相关矩阵	444
第三节 随机矩阵	447
第四节 信号滤波的矩阵分析	454
第五节 沃尔什滤波的矩阵处理	461
第六节 布氏矩阵与门电路	463

6.1 布氏矩阵与门电路	463
6.2 2 开关的开关电路(或 2 输入的单输出门电路).....	471
6.3 3 开关的开关电路(或 3 输入的门电路).....	472
6.4 多开关的开关电路	477
第七节 散射矩阵	483
7.1 散射矩阵	483
7.2 散射矩阵与阻抗矩阵的转换关系	485
本章小结	491
第六章 参考资料	492
名词解说	493

第一章 矩阵的基础知识

矩阵是一种数学表达手段，它已广泛地应用于通信理论的各个方面。本章叙述通信理论中常用的矩阵基础知识。

第一节 向 量

向量是矩阵的基础。我们先介绍有关向量的概念。

1.1 向量及其运算

如图 1.1.1 所示的电桥电路，当 a 、 c 两端与电源 E 相连接时，各个支路 ab ， bc ， da ， cd 及 bd 上都有电流流过，设它们分别为 i_1 ， i_2 ， i_3 ， i_4 ， i_5 （流向如图中所指，如果最后算得的结果为负值，表明该电流的实际流向应与图中所指的相反）。通常称 i_1 ， i_2 ， i_3 ， i_4 ， i_5 这一组有先后次序的数为该电路的支路电流向量。一般地有

定义 1.1 有序数组 x_1 ， x_2 ， $\dots$ ， x_n 称为向量，记为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

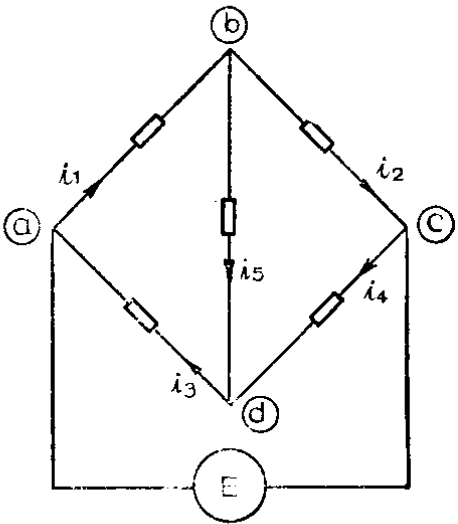


图 1.1.1

其中, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别称为向量 $\mathbf{x}$ 的第一、第二、 $\cdots$ 、第 n 分量, 数 n (即分量的个数) 称为向量 $\mathbf{x}$ 的维数。(1.1) 是一个维数等于 n 的向量, 简称 n 维向量。而称

$$[x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

为 $\mathbf{x}$ 的转置向量, 记为 $\mathbf{x}^T$ 。

显然, $n=2$ 时

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

是一个平面向量; $n=3$ 时

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

是一个空间向量。高于三维的向量无法给出几何表示, 但可以仿照二、三维向量定义它们的各种运算。

设 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ 都是 n 维向量:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

(1) 相等

如果向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 的对应分量分别相等, 即

$$x_i = y_i (i=1, 2, \cdots, n)$$

则称 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 相等, 记为 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$

(2) 加法

向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 的加法运算用符号“+”表示。定义

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

即 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ 的各个分量分别等于 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ 的对应分量相加。

由(1), (2)可见, 对于同维向量才有相等和加法可言。

(3) 数乘

$k\mathbf{x}$ (或者 $\mathbf{x}k$) 表示数 k 与向量 $\mathbf{x}$ 相乘 (简称数乘)。定义

$$k\mathbf{x} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{bmatrix}$$

由(2), (3)可知, 对于同维向量 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ 及数 k , l 有

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{y} + \mathbf{x} \\ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} &= \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \\ k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= k\mathbf{x} + k\mathbf{y} \\ (k + l)\mathbf{x} &= k\mathbf{x} + l\mathbf{x} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{y} + \mathbf{x} \\ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} &= \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \\ k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= k\mathbf{x} + k\mathbf{y} \\ (k + l)\mathbf{x} &= k\mathbf{x} + l\mathbf{x} \end{aligned}} \right\}$$

向量

$$\mathbf{0} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (n \text{ 个零})$$

称为 n 维零向量; 向量组

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(其中每个向量都是 n 维的)称为 n 维基本向量组。

根据上述向量运算的定义, 对于任意一个 n 维向量

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

可以表示成

$$\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n \boldsymbol{e}_n$$

1.2 向量组的线性相关性

按照向量运算的定义, 可以讨论若干个向量(即向量组)之间的相关性, 其中最主要的就是线性相关性。

定义 1.2 如果对一组 m 个同维向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 可以找到一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使得

$$k_1 \boldsymbol{x}_1 + k_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_m \boldsymbol{x}_m = \mathbf{0} \quad (1.2)$$

(右端的 $\mathbf{0}$ 是与 $\boldsymbol{x}_i, i=1, 2, \cdots, m$, 同维的零向量), 则称向量组 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 线性相关; 如果仅当

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$$

时(1.2)才能成立, 则称向量组 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 线性无关。

例 1.1 试证明向量组

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

线性相关。

解: 只要证明能够找到一组不全为零的数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1 \boldsymbol{x}_1 + k_2 \boldsymbol{x}_2 + k_3 \boldsymbol{x}_3 = \mathbf{0} \quad (1)$$

为此将 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 的具体表达式代入(1)得

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ 4k_2 + 2k_3 \\ 2k_2 + k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

于是由向量相等的定义得

$$\begin{cases} k_1 = 0 \\ 4k_2 + 2k_3 = 0 \\ 2k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

显然, $k_1=0$, $k_2=1$, $k_3=-2$ 是(2)的一组解。从而找到了一组不全为零的数 k_1 , k_2 , k_3 , 能使

$$k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 + k_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$$

因此, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ 是线性相关的。

例 1.2 试证明向量组

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(即三维基本向量组)是线性无关的。

解: 要证 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 线性无关, 只需证明仅当 $k_1=k_2=k_3=0$ 时, 才有

$$k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2 + k_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \quad (1)$$

为此将 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 的具体表达式代入(1)得

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

即 $k_1=k_2=k_3=0$ 。因此, 仅当 $k_1=k_2=k_3=0$ 时, (1)才成立, 从而证明了 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 线性无关。

用完全同样的方法可以证明 n 维基本向量组是线性无关的。

向量组线性相关和无关的概念总称线性相关性。

根据定义 1.2, 可以得到关于向量组线性相关性的几个性质。

性质 1 如果向量组 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 线性相关, 则组中必存在某一个向量(例如 $x_s, 1 \leq s \leq m$), 它可以用其余向量线性表示, 即

$$x_s = a_1 x_1 + \dots + a_{s-1} x_{s-1} + a_{s+1} x_{s+1} + \dots + a_m x_m$$

(其中, $a_1, \dots, a_{s-1}, a_{s+1}, \dots, a_m$ 都是常数); 反之亦然。

事实上, 由于向量组 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 线性相关, 一定可以找到一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得

$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_{s-1} x_{s-1} + k_s x_s + k_{s+1} x_{s+1} + \dots + k_m x_m = 0$ 。如果其中的 $k_s \neq 0$, 则

$$-k_s x_s = k_1 x_1 + \dots + k_{s-1} x_{s-1} + k_{s+1} x_{s+1} + \dots + k_m x_m$$

或者

$$x_s = \left(-\frac{k_1}{k_s}\right)x_1 + \dots + \left(-\frac{k_{s-1}}{k_s}\right)x_{s-1} + \left(-\frac{k_{s+1}}{k_s}\right)x_{s+1} + \dots + \left(-\frac{k_m}{k_s}\right)x_m$$

记

$$a_i = -\frac{k_i}{k_s}, \quad i=1, \dots, s-1, s+1, \dots, m$$

于是有

$$x_s = a_1 x_1 + \dots + a_{s-1} x_{s-1} + a_{s+1} x_{s+1} + \dots + a_m x_m$$

即 x_s 可以用组中的其余向量线性表示。

反之, 设 x_s 可以用组中的其余向量线性表示, 即

$$x_s = a_1 x_1 + \dots + a_{s-1} x_{s-1} + a_{s+1} x_{s+1} + \dots + a_m x_m$$

因此

$$a_1 x_1 + \dots + a_{s-1} x_{s-1} - x_s + a_{s+1} x_{s+1} + \dots + a_m x_m = 0$$

显然, $a_1, \dots, a_{s-1}, -1, a_{s+1}, \dots, a_m$ 是一组不全为零的数(至少 -1 不为零), 因此向量组 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 线性相关。

性质 2 如果向量组 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m$ 中有一部分, 例如 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_r (1 \leq r < m)$ 线性相关, 则向量组 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m$ 线性相关 (即“部分线性相关必然整体线性相关”)。

事实上, 因为 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_r$ 线性相关, 因此可以找到一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$, 使得

$$k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + k_r \mathbf{x}_r = \mathbf{0}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{m-r \text{ 个}}$

于是 $k_1, k_2, \cdots, k_r, 0, 0, \cdots, 0$ 也是一组不全为零的数, 且使

$$k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + k_r \mathbf{x}_r + 0 \cdot \mathbf{x}_{r+1} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{x}_m = \mathbf{0}$$

所以, 向量组 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m$ 线性相关。

性质 3 如果向量组 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m$ 线性无关, 则向量组中任一部分线性无关 (即“整体线性无关必然部分线性无关”)。

事实上, 如果结论不成立, 例如 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_r (1 \leq r < m)$ 线性相关, 则由性质 2 知向量组 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m$ 一定线性相关, 这与向量组 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m$ 线性无关的假设矛盾, 所以 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_r$ 一定线性无关。

1.3 向量组的秩

1.2 中性质 2 表明, 向量组部分线性相关, 必然整体线性相关。但是整体线性相关未必其任何一部分也线性相关, 例如线性相关的向量组

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

的一部分 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 恰是线性无关的 (读者可自行检验)。因此, 需要讨论线性相关向量组中线性无关向量的最大个数。

定义 1.3 向量组 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m$ 中线性无关向量的最大个数称为向量组的秩, 简记为 $\text{rank}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m)$ 。特别, 当 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 =$