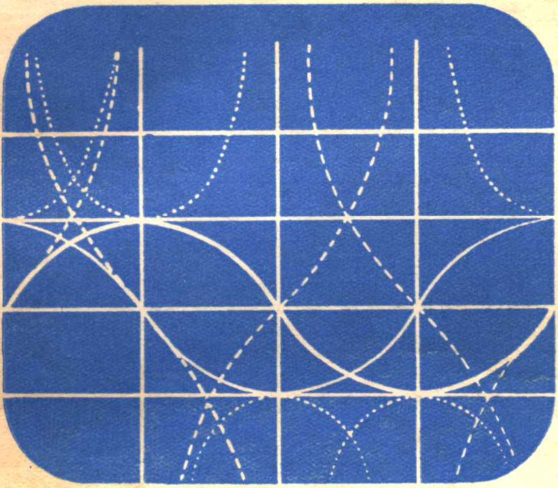
从正五边形谈起



严镇军

从正五边形谈起

上海教育出版社

从正五边形谈起

严　镇　军

上海教育出版社

从正五边形谈起

严 镇 军

上海教育出版社出版

（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　上海日历印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 2.5　字数 53,000

1980 年 3 月第 1 版　1980 年 3 月第 1 次印刷

印数 1—95,000 本

统一书号：7150·2171　　定价：0.19 元

前　言

1978年4月，全国部分省市中学生数学竞赛前夕，作者曾把这本小书中的一、三两节的部分内容，在安徽省几个城市对中学生作过讲演．讲演后有一些从事中学数学教学工作的同志和作者谈到，经常为中学生介绍一些课外知识，以开扩他们的眼界，对于提高他们学习数学的兴趣，加深对基础知识的掌握，培养独立思考的能力都是有好处的．这就促使作者把这个讲演稿扩充成这本小册子．

书中首先介绍了一些不常见于中学教材的关于正五边形的知识，然后引伸出几个有趣的数学问题．例如斐波那契数列与黄金分割的关系，数的几何中关于格点正多边形的存在性，图论中的地图着色问题等等．书末所选的习题，都有一定的难度，有的题曾经是国内外的数学竞赛题，希望读者能自己独立做出，并获得比书末所附解答更好的解法．

作者在准备讲演稿时，曾肯成同志提供了许多材料的线索，以后又多次和作者讨论本书的写作提纲．徐澄波、史济怀、常庚哲、陶懋颀、陈龙玄、熊金城、李炯生等同志有的细心地看过本书初稿的全文或部分内容，有的就某些内容作过多次的讨论，提出了不少有益的建议，在此表示衷心的感谢．

本书虽经数度易稿，但由于作者水平所限，错误和不妥之处，恐难避免，欢迎读者批评指正．

作　者

1979年3月

目　　录

一、正五边形和黄金分割法

“五星红旗迎风飘扬，胜利歌声多么嘹亮，歌唱我们亲爱的祖国，从今走向繁荣富强……”庄严美丽的国旗和国徽上的五角星，是革命和光明的象征. 它曾经照耀着革命先辈为着今天的幸福而流血战斗，也将照耀着我们青年一代，朝着更加美好的共产主义明天继续长征.

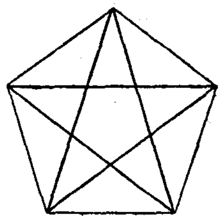


图 1

正五角星是一个非常有趣的几何图形. 把一个正五角星的各个顶点依次用直线连结起来，就得到了一个正五边形(图 1). 反过来，把任一正五边形的各条对角线连结起来，就可以得到一个正五角星，每一条这样的对角线，叫做正五角星的边. 从图 1 可见，正五角星的各边又交成一个更小的正五边形；正五边形的对角线与其对边是平行的. 以上这些性质，读者从中学几何课本中已经学过. 大家可曾想到，与正五边形(或者说正五角星)有关的，还有许多有趣的数学性质，由此还可以引伸出更深入一层的数学问题的讨论.

不过，我们还得先从正五边形说起.

1. 作　图

我们知道，任何正多边形必有一个外接圆，这个圆的圆心，叫做正多边形的中心. 如何作一个已知圆的内接正五边

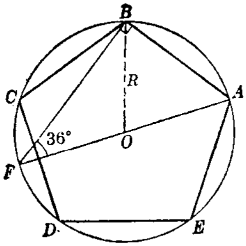


图 2

形呢？

为了得到这个问题的作图方法，我们先进行一些综合性的讨论．如图2所示，设圆 O 的半径为 R，$ABCDE$ 是它的内接正五边形，AF 是圆 O 的直径．因为圆心角

$$\angle AOB=\frac{360^\circ}{5}=72^\circ,$$

所以圆周角 $\angle AFB=36^\circ$，由直角 $\triangle AFB$ 得正五边形边长

$$AB=AF\sin 36^\circ=2R\sin 36^\circ. \tag{1}$$

因此，为了求得正五边形的边长，必须算出 $\sin 36^\circ$ 的值．我们先来计算 $\sin 18^\circ$ 的值．$\sin 18^\circ$ 的值，通常是利用三角学中的倍角公式计算的，下面介绍一种几何方法．

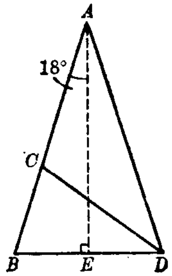


图 3

作一等腰 $\triangle ABD$（图 3），使 $AB=AD$，顶角 $\angle BAD=36^\circ$，$AE\perp BD$，那末 $\angle BAE=18^\circ$．

再作 $DC=BD$，由于 $\triangle ABD$ 和 $\triangle DCB$ 都是等腰三角形，且底角 $\angle B$ 公用，所以

$$\triangle ABD\backsim\triangle DCB,$$

于是

$$\frac{BD}{CB}=\frac{AB}{BD}. \tag{2}$$

又因为 $\angle BDC=\angle BAD=36^\circ$，

$$\angle BDC+\angle CDA=\angle BDA=\frac{180^\circ-\angle BAD}{2}=72^\circ,$$

即得 $\angle CDA=36^\circ=\angle DAC$，所以 $\triangle ADC$ 也是等腰三角形，

所以

$$AC=CD=BD.$$

设 $AB=l$, $AC=BD=x$, 那末 $BC=l-x$. 代入(2)式,得

$$\frac{x}{l-x}=\frac{l}{x},$$

$$x^2+lx-l^2=0.$$

解这个方程,得

$$x=\frac{-l\pm\sqrt{l^2+4l^2}}{2}=\frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}l.$$

因为 $x=BD>0$, 上式根号前应取正号,即得

$$BD=\frac{\sqrt{5}-1}{2}l,$$

$$BE=\frac{BD}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}l,$$

于是得 $\sin 18^\circ=\sin(\angle BAE)=\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}.$

有了 $\sin 18^\circ$ 的值,就可以利用三角公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 以及 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, 分别算出

$$\cos 18^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

$$\begin{aligned}\sin 36^\circ&=2\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}\times\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\\&=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\times\frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}\\&=\frac{1}{8}\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2\times2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}\\&=\frac{1}{8}\sqrt{8\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.\end{aligned}$$

将 $\sin 36^\circ$ 的值代入(1)式，便得到圆的内接正五边形的边长

$$AB=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}R.$$

下面，我们分析如何作出 AB. 如果已知线段 a、b，根据勾股定理，线段 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 是可以利用圆规和直尺作出的(以 a、b 为直角边的直角三角形的斜边). 在

$$AB=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}R$$

中，因为

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2}=1+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=1+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2,$$

所以

$$AB=\sqrt{R^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}R\right)^2}. \qquad (3)$$

而

$$\frac{\sqrt{5}}{2}R=\sqrt{\frac{5}{4}R^2}=\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{2}R\right)^2}, \qquad (4)$$

于是，由(4)式知道，$\frac{\sqrt{5}}{2}R$ 是以 R、$\frac{1}{2}R$ 为直角边的直角三角形的斜边，从而

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}R=\frac{\sqrt{5}}{2}R-\frac{1}{2}R$$

是可以作出的；那末，再由(3)式，AB 也可以利用直角三角形作出.

有了上面的分析，便可得到下面的作法.

作法 (1) 作已知圆 O 的两条互相垂直的直径 AOB、COD(图 4).

(2) 取半径 OC 的中点为 E.

(3) 以 E 为圆心，EA 为半径画弧，交 OD 于 F.

(4) 用 AF 将圆周五等分，即可作出圆 O 的内接正五边形.

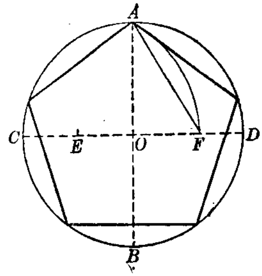


图 4

证明 因为 E 是 OC 的中点（作图步骤 2），所以 $OE=\frac{1}{2}R$. 由勾股定理，

$$EA^2=OE^2+OA^2=\frac{1}{4}R^2+R^2=\frac{5}{4}R^2,$$

$$EA=\frac{\sqrt{5}}{2}R.$$

而 $EF=EA=\frac{\sqrt{5}}{2}R$（作图步骤 3），于是

$$OF=EF-OE=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R.$$

所以

$$AF=\sqrt{OA^2+OF^2}=\sqrt{R^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}R\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}R.$$

这正是以 R 为半径的圆的内接正五边形的边长.

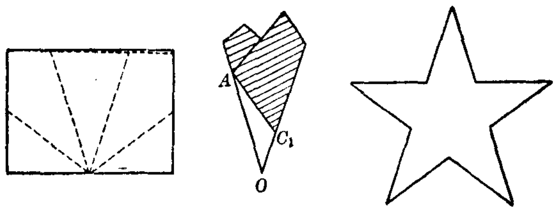
作出正五边形之后，把它的各条对角线连结起来，就得到一个正五角星.

2. 剪　　纸

节日前夕，常要制作许多五角金星. 如果按照上面的几

何作图方法来做，既费事又不易准确．心灵手巧的人并不采用这样的方法，而是用折纸方法，直接可以剪出一个五角星．

方法是这样的：拿一张长方形(或圆形)的纸，先对折，参见图 5(1)；再折成五等分，参见图 5(2)；在五等分的折线上，取点 A 和点 C_1，使 OC_1 比 $\frac{1}{3}OA$ 稍微长一点，沿斜线 AC_1 把图 5(2) 中阴影部分剪掉，然后把纸展开，就得到了一个正五角星，参见图 5(3)．



(1) (2) (3)

图 5

可以证明，这样剪出的图形，确实非常近似于一个正五角星．

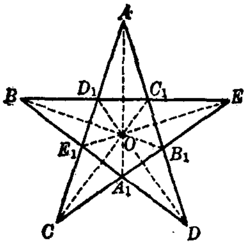


图 6

设 $ACEBD$ 是一正五角星，不难算出五个顶角都是 36°．把它的任一顶点 A 与中心连结起来，并延长至 A_1 (图 6)，则 AA_1 是五角星的一条对称轴(这相当于上述剪法中第一次把纸对折起来，折线即是对称轴)．再作 BOB_1、COC_1、DOD_1、EOE_1，这样我们就把正五角星分成了十个全等的小三角形 AOC_1、AOD_1、BOD_1、…、EOB_1、EOC_1，将这十个小三角形迭合起来(这相当于将纸对折后又折五次，共 10 迭，

剪纸线正是 AC_1、AD_1、…）. 现在以 $\triangle AOC_1$ 为例，分析 OC_1 与 OA 的数量关系（图 7）. 因正五边形的每个顶角为 36°，所以

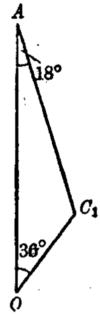


图 7

$$\angle OAC_1=18°,$$

而 $$\angle AOC_1=\frac{360°}{10}=36°,$$

所以 $$\angle AC_1O=126°.$$

由正弦定理，得

$$\frac{OC_1}{OA}=\frac{\sin 18°}{\sin 126°}=\frac{\sin 18°}{\sin 54°},$$

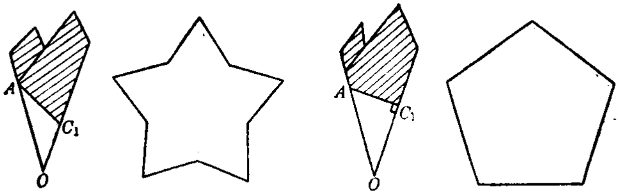
所以

$$OC_1=\frac{\sin 18°}{\sin(3\times 18°)}OA=\frac{\sin 18°}{3\sin 18°-4\sin^3 18°}OA$$

$$=\frac{1}{3-4\sin^2 18°}OA=\frac{OA}{3-4\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{3+\sqrt{5}}OA=\frac{3-\sqrt{5}}{2}OA\approx 0.382\,OA.$$

由此可见，前面所说的 OC_1 比 $\frac{1}{3}OA$ 稍为长一点的道理就在这里. 如果取 $OA=5\text{cm}$、$OC_1=1.9\text{cm}$，这样剪出的五角星就比较准了. 如果取 OC_1 比 $\frac{1}{3}OA$ 长得多 $\left(\text{例如 } OC_1=\frac{1}{2}OA\right)$，



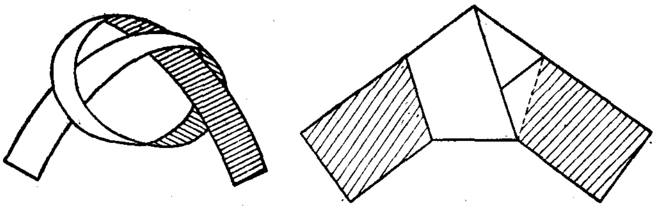
(1) (2) (3) (4)

图 8

这时剪出的五角星就不好看，它的五只角的边比较短，见图8(1)、(2)；当沿直角方向剪去，它的五只角完全没有了，而成了一个正五边形，见图8(3)、(4)．这里的道理，请读者自己说明．

3. 打　结

上面讲了用折纸法剪出一个正五角星或正五边形的方法，现在介绍一种用长方形纸条打结，得到一个正五边形的方法．结法是这样的：如图9(1)所示，先把纸条打好一个结，然后拉紧压平(注意不使它有皱纹)，再截去伸出的部分(图9(2)中的阴影部分)，便结成一个正五边形了．



(1)　　　　(2)

图　9

下面，我们来证明打结出来的图形是一个正五边形．阅读这个证明时，建议读者按图9作一实物对照．

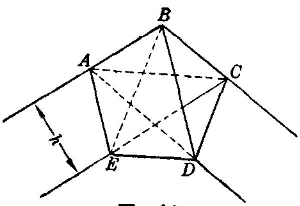


图　10

分析　容易看出，所结出来的图形是一个凸五边形．为了证明它是一个正五边形，需要证明它的五条边及五个角相等．要证明五条边及五个角相等，只要证明图10中的五个三角形：

$\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDE$, $\triangle DEA$, $\triangle EAB$ 是全等三角形就可以了.

证明 由于纸条的宽度各处是一样的(记作 h), 所以在 $\triangle AEB$ 中, AB 和 AE 上的高相等(都等于 h), 因此 $\triangle AEB$ 是等腰三角形, 即有

$$AB=AE.$$

同理, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 中,

$$AB=BC,\ BC=CD,$$

所以

$$AB=BC=CD=AE. \tag{1}$$

(注意: 不能用上面的方法证明 $\triangle CDE$ 是等腰三角形, 为什么?)

又, 根据同样的道理, $\triangle ADB$ 和 $\triangle BEC$ 都是等腰三角形, 所以

$$AD=BD,\ BE=CE. \tag{2}$$

因为纸条的边缘是平行的, 即 $AB\parallel EC$, $BC\parallel AD$, 由(1)式 $AE=BC$, $AB=CD$, 所以四边形 $EABC$ 和四边形 $ABCD$ 都是等腰梯形, 所以

$$BE=AC,\ BD=AC.$$

再由(2)式, 得

$$BE=AC=BD=AD=CE.$$

又 $AE\parallel BD$, $AD=BE$, 所以四边形 $ABDE$ 是等腰梯形, 故有 $AB=DE$, 结合(1)式, 即得

$$AB=BC=CD=DE=EA.$$

所以

$$\triangle EAB\cong\triangle ABC\cong\triangle BCD\cong\triangle CDE\cong\triangle DEA.$$

这就证得了 $ABCDE$ 是一个正五边形.

4. 黄金分割及其作图

先讲正五边形对角线的一个性质.

设 $ABCDE$ 为一正五边形(图 11), 对角线 AC 和 BE 相交于 F, 那末

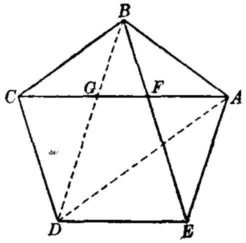


图 11

$$\frac{CF}{AC}=\frac{AF}{CF}, \qquad (1)$$

即

$$CF^2=AC\cdot AF. \qquad (2)$$

证明 因 $AC /\!/ DE$, $BE /\!/ CD$, 故 $FCDE$ 是一平行四边形. 即有

$$EF=CD=AE=ED=FC,$$

所以 $\triangle AEF$ 是一等腰三角形. 由 $\angle AFE=\angle ACD$, 得

$$\triangle ACD \backsim \triangle EAF.$$

所以
$$\frac{CD}{AC}=\frac{AF}{AE},$$

这就证得了
$$\frac{CF}{AC}=\frac{AF}{CF}.$$

利用同样的方法, 可以证明图 11 中点 G 分线段 FC 成类似的比例(或由后面的例题直接得到):

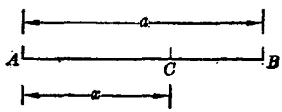


图 12

$$\frac{CG}{CF}=\frac{FG}{CG}.$$

一般地, 设已知线段 AB, 若 AB 上的点 C 将 AB 分成两段, 使大段为全段和小段的比例中项, 即

$$BC:AC=AC:AB,$$

或

$$AC^2 = AB \cdot BC, \tag{3}$$

则称点 C 内分线段 AB 成中外比.

据此,前面证明的性质可叙述为:正五边形的任意两条相交的对角线,互相内分成中外比.

下面介绍分线段 AB 成中外比的内分点的几何作图.

分析 设全段 $AB=a$, 大段 $AC=x$, 于是小段

$$BC=a-x.$$

由(3)式知 $x^2=a(a-x)$, 即 $x^2+ax-a^2=0$, 解这个方程,得

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4a^2}}{2}.$$

舍去负根,得

$$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a. \tag{4}$$

为便于作图,将(4)式改写为

$$AC=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}.$$

于是,由勾股定理,得内分点 C 的作图方法如下:

作法 (1) 过点 B, 作 $BD\perp AB$, 取 $BD=\frac{1}{2}AB$.

(2) 连结 AD, 则

$$AD=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

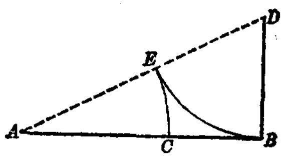


图 13

(3) 以 D 为圆心, DB 为半径画弧,交 AD 于 E, 则

$$AE=AD-BD=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}.$$

(4) 以 A 为圆心, AE 为半径画弧,交 AB 于 C, 点 C 就是所求的内分点.

请读者注意，(4)式所揭示的内分点的性质

$$\frac{\text{大段长}}{\text{全段长}}=\frac{\text{小段长}}{\text{大段长}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

在以后的讨论中将多次用到.

现在回到正五边形的讨论. 由(1)式可知

$$\frac{CF}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

且 $CF=CD$(图 11)，即 $\frac{CD}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 这就是说，正五边形边长与对角线之比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 这个事实在后面也要用到.

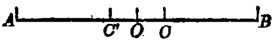


图 14

［例］ 设点 C 内分 AB 成中外比，则点 C 在 AB 上的对称点 C'，必内分大段 AC 成中外比(图 14).

证明 由对称性，可知 $AC'=BC$. 所以

$$\frac{AC'}{AC}=\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

即点 C' 内分 AC 成中外比.

内分已知线段成中外比的作图方法，也叫做**黄金分割法**. 它在二千多年前就由希腊数学家欧多克斯 (Eudoxos) 发现，由于这个方法在平面几何中具有重要的地位，所以人们给了它这个称号. 在下一小节中，将介绍它的一些应用.

5. 黄金分割的应用

黄金分割法在平面几何中有许多应用，下面举几个几何作图的例子.