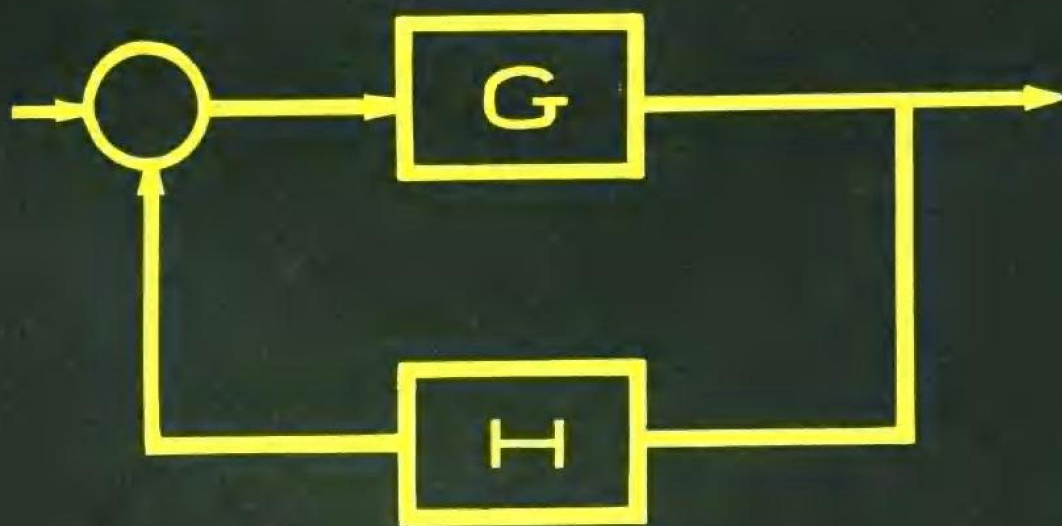


控制理论及 电液控制系统

顾瑞龙 编著



机械工业出版社

控制理论及电液控制系统

顾瑞龙 编著



机械工业出版社

目 录

第一章 概述	1
一、历史与回顾	1
二、系统的名词解释和分类	2
第二章 数学基础和系统的数学描述	7
一、线性化	7
二、线性系统微分方程	8
三、复变量和 s 平面	9
四、拉普拉斯变换	10
五、系统的两种数学描述法	16
第三章 传递函数和它的运算	26
一、传递函数	26
二、工程中各种典型的机、电、液系统的传递函数	27
三、传递函数的运算	36
第四章 系统的频率响应与博德图	42
一、频率响应的概念与计算	43
二、奈魁斯特图	45
三、博德图及典型环节的博德图	48
四、系统的博德图绘制举例	55
五、闭环频率响应	58
第五章 典型的电液控制元件与系统	63
一、阀控制液压缸与阀控制液压马达	63
二、泵控制液压缸	67
三、液压力矩放大器	69
四、液压仿形刀架	70
五、力反馈电液伺服阀	71
第六章 控制系统的性能准则	74
一、性能准则的提出	74
二、灵敏度	74
三、瞬态响应	77
四、频率响应	78
五、稳态精度(稳态误差)——在输出端对稳态误差的讨论	79
六、性能指标	91
七、控制系统的性能准则一览	93
第七章 稳定性分析	94
一、用劳斯-霍维茨判据判定稳定性	95
二、用奈魁斯特判据判定稳定性	96

三、 博德图上的奈魁斯特判据	93
四、 液压系统稳定性分析举例	99
五、 奈魁斯特稳定判据	102
第八章 根轨迹法	104
一、 根轨迹法的基本概念	104
二、 闭环极点和瞬态响应	107
三、 极点位置的选择	112
四、 根轨迹的作图法	117
五、 一个电液控制系统的根轨迹作图示例	126
六、 按瞬态响应要求用根轨迹法设计电液控制系统	129
第九章 位置控制系统	132
一、 位置控制系统的特点	132
二、 电流负反馈放大器的分析	135
三、 双电位器位置控制系统	138
四、 伺服阀-液压缸系统	142
五、 伺服阀-液压马达系统	146
六、 数控机床中的高增益系统和低增益系统	150
第十章 速度控制系统	152
一、 速度控制回路中加补偿的必然性	152
二、 速度控制系统设计举例	156
三、 速度环和位置环控制速度的比较	161
四、 出现于位置环内的速度环	164
五、 速度环的阻尼作用	167
第十一章 力控制系统	169
一、 力控制系统中阀的选用	169
二、 力环中液压缸的传递函数	170
三、 材料试验机的力控制系统	176
四、 轧机液压压下系统	181
五、 力环的阻尼作用	187
第十二章 控制系统的设计和补偿	189
一、 设计中的几种补偿方法	190
二、 用频率法分析补偿装置	192
三、 用频率法分析顺馈补偿	198
四、 用频率法分析反馈微分补偿	201
五、 用根轨迹法分析顺馈补偿	203
第十三章 现代控制理论中的状态空间概念	206
一、 矩阵理论中的一些定义	207
二、 矩阵代数	212
三、 状态空间的概念	220
四、 状态空间的矩阵表示法	222
五、 状态转移矩阵——矩阵方程求解的工具	225
六、 状态转移方程——线性非齐次状态方程求解	227

七、状态方程和高阶微分方程的关系	231
八、传递函数和状态方程的关系	233
九、特征方程、特征值和特征根的不变性	242
十、一个电液控制系统用频率法、根轨迹法和状态空间法的分析和比较	246
第十四章 最优控制理论和应用	252
一、最优控制系统和性能指标	252
二、可控性和可观测性	254
三、给定权因子求优法——最优控制系统的分析设计法之一	258
四、限制控制量求优法——最优控制系统的分析设计法之二	265
五、参数最优系统的设计	270
六、用状态可观测性的概念来设计有指定特征值的系统	277
七、状态观测器的设计	279
八、带观测器的闭环控制系统	285
九、最优控制问题和线性二次型问题（调节器问题、跟踪器问题）	290
十、计算机辅助设计最优位置控制系统举例	301
第十五章 系统辨识简介	310
一、辨识问题的组成和分类	310
二、参数估计方法和最小二乘法	311
三、直接的曲线拟合	315
参考文献	320

第一章 概 述

一、历史与回顾

近代技术的发展,使设备的自动化程度大大提高。不仅飞机、宇宙飞船的控制,就是许多地面设备,例如数控机床、材料试验机、轧钢机等设备的控制也不可能直接用手动控制,而是通过这些装备中的自动调节装置进行的。“控制工程”就是指这些自动调节装置的设计。

最早期的、在工业中起重要作用的第一个自动调节装置是1784年瓦特(J. Watt)发明的蒸汽机中的调速器。当蒸汽机速度增加时,杠杆上的飞球升高,使和它联结在一起的汽阀开口减少,从而使蒸汽机的速度下降。但是后来发现,汽阀的速度调节并不完善,一些参数处理不好时会使蒸汽机产生剧烈的振荡。这就迫使一些数学家思考并解决这些问题,1868年马克斯威尔(Maxwell)从描述系统的微分方程的解中是否有增长指数函数项来判断稳定性。1895年,劳斯(Routh)和赫尔维茨(Hurwitz)导出了著名的稳定性判据。第一次和第二次世界大战中武器的进展促使很多装备的自动调节装置有了飞跃的发展,在这期间由于通信的需要发明了负反馈放大器,这时劳斯-赫尔维茨的理论的实际意义又不大了,因为描述放大器的微分方程阶次太高,而用“频率响应”及图解形式处理更实际。奈魁斯特(H. Nyquist)于1932年创立了稳定判据及“稳定裕量”的概念。在此基础上,博德(H. W. Bode)于1945年提出用图解法来分析和综合线性反馈控制系统的方法,这就是频率法。与此同时,依万斯(W. R. Evans)于1948年创立了“根轨迹法”,对用微分方程模型来研究问题提供了一个简单而有效的方法。在某些情况下,它比频率法更简单,更直接。到此,“古典控制理论”已比较完善,并在各行业中广泛地应用这些理论,促进了控制工程的进展。1948年,美国数学家维纳(N. Wiener)首创了控制论(Cybernetics)这个名词,他认为,到那时为止,反馈理论已可以解决许多生物控制机理、经济发展过程等问题。事实证明,从那以后控制理论又有了新的发展,跨入了“现代控制理论”的阶段。

六十年代初,美国执行“阿波罗”计划时,由于客观发展的需要比较明确地形成了所谓“现代控制理论”。古典控制理论的主要缺点是:①所研究的系统限于线性时不变系统,即其部件可用常系数线性微分方程描述的系统;②研究的系统只能是单回路的;③只提供分析的方法,然后改进系统再进行尝试,不能提供最好的设计。这些问题的存在促使现代控制理论的迅速发展,1956年苏联庞特略金(Понтрягин)提出的最优控制,1957年美国贝尔曼(Bellman)提出的动态规划理论,和1960年美国卡尔曼(Kalman)提出的最优过滤理论形成了现代控制理论的基础。状态空间概念的引入,计算机的发展及普及对现代控制理论起了极重要的推动作用。下表对古典和现代控制理论的特点作一简略的比较:

	古 典 控 制 理 论	现 代 控 制 理 论
基本数学描述方法	传递函数(输入输出描述)	向量空间(状态空间描述)
研究方法	根轨迹法和频率法	状态空间法
研究目标	研究系统的稳定性,在给定输入和给定指标情况下研究系统的综合	揭示系统的内在规律,实现在一定意义下的最优化

必须指出,在实际工程中,古典控制理论仍是极为重要的。相当多的问题用它来解决仍是非常有效的。而且现代理论是从古典理论蜕变出来的,因此,本书将用较多的篇幅介绍古典理论。还要指出,现代控制理论仍处于发展之中,每个领域中仍有许多有待解决的问题。

本书将控制理论和工程实践紧密结合起来,把电液控制系统作为研究对象,探讨用理论指导系统的设计问题。除个别章节外,本书内容对电控制系统、气动控制系统也同样适用。

二、系统的名词解释和分类

控制理论的研究对象是各种系统,下面定义一些名词,并对系统进行分类。

系统 将一些装置或计划进行组合,使它能达到某一目的的,都叫做系统。这个定义的含义是非常广泛的。它不仅包括用电机、电气元件或伺服阀、液压缸这样的元件组成的物理系统,而且包括一些抽象的动态现象,如在经济学、人口学中遇到的一些现象。也就是说,经济的运行,人口的变迁都各自组成系统。

开环系统 在开环系统中,动作信号是预先确定、不会变化的。例如通常的洗衣机就是这种系统的一个例子(图1-1)。当洗衣时间确定后,不管衣服洗得干净与否,到指定时间即自动停机。所以说,这个系统是开环的。

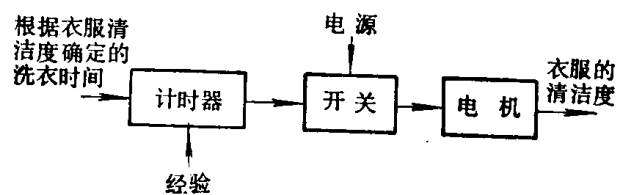


图1-1 简单洗衣机的原理图

闭环系统(反馈控制系统) 在闭环系统中,动作信号是所希望信号的函数,或者是实际输出量的函数。譬如图1-2所示的水箱水面控制装置就是一个闭环系统的例子。当水面达到一定高度时,杠杆机构就自动关闭阀的出口。这个系统具备一个闭环系统所必需的全部组件。和一般闭环系统一样,它也有稳定性、稳态误差、瞬态过程等问题。只是因为系统的要求不严,参数又是经过考验的,所以应用中很少出问题。

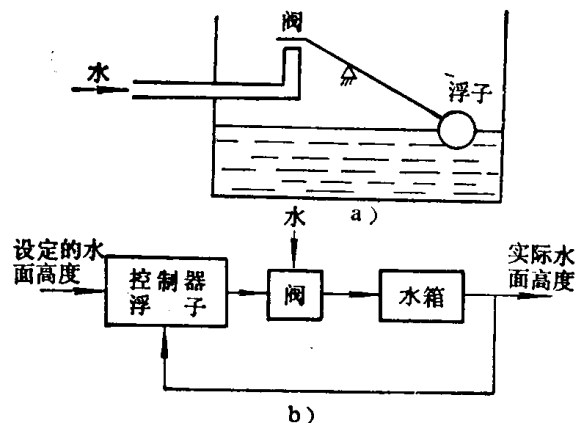


图1-2 水箱水面控制原理图

又如数控机床的工作台受纸带信息的控制,使它以一定的速度运行。其工作原理见图1-3。很明显,这也是一个闭环系统。在很多现代化的装置中,闭环控制系统是必不可少的。例如核发电厂的发电过程是一个较复

杂的闭环系统(见图1-4)。为了将蒸汽的压力和温度保持在某一水平上,由一个控制系统调节控制杆的位置。另一个控制系统调节发电机电压,使它保持在某一电平上。另外该发电站还有蒸汽轮机轴的速度调节、锅炉的水面调节等控制系统。从以上这些例子可见,闭环系统的应用是非常普遍的,而且一个设计得好的闭环系统的性能要比开环系统的性能好得多。通常按被控量的不同情况,又可将闭环控制系统分为三类:

① **伺服系统** 伺服系统的被控量是指位置、速度之类的机械量,并要求这些量和输入

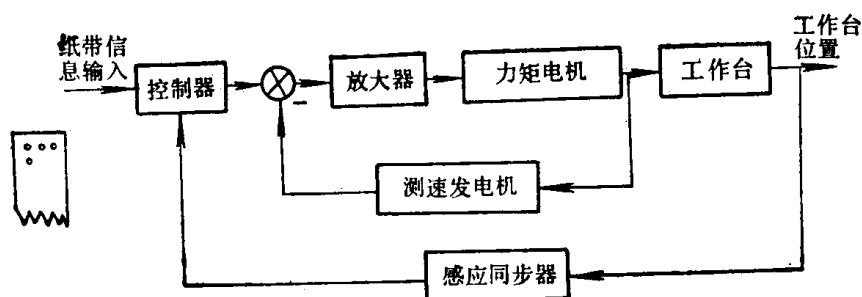


图1-3 数控机床原理图

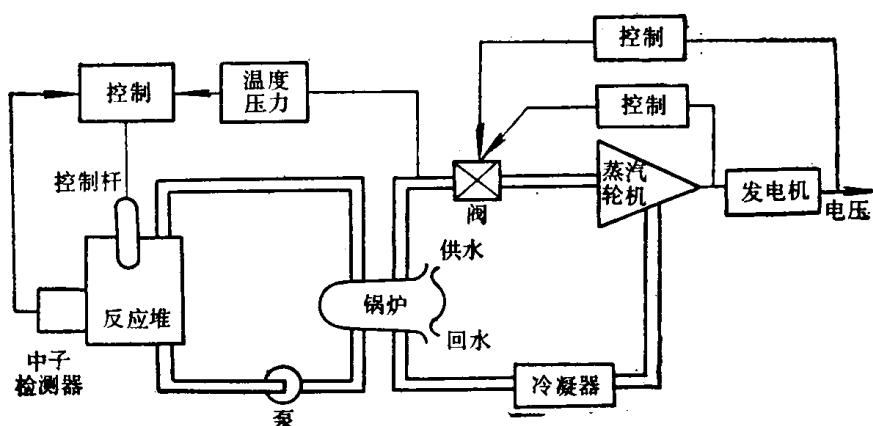


图1-4 核电站原理图

量有一个函数关系。现在通常把力控制系统也划归这一类系统。图1-3所示就是伺服系统的一个例子。

② 自动调整系统 是指输出量为常量，或随时间变化得很慢的系统。这类系统的主要任务是在受到干扰时保持输出量为希望值。被控量通常为电压、电流、转速、力矩等物理量。图1-4所示系统就是自动调整系统的一个例子。

③ 过程控制系统 是指输出量按已知的时间函数变化的系统。这类系统都用于化工、冶炼、造纸等工业中，被控量通常为温度、压力、液面、浓度、功率等。伺服系统往往作为一个组成部分出现在这种系统中。

还有一些其他的分类法如：

① 线性控制系统和非线性控制系统 凡是元件特性呈线性、即符合叠加性原理的系统叫线性系统，否则就是非线性系统。必须指出，线性控制系统仅仅是理论分析者为了简化分析工作量而假设的理想模型，严格地说线性系统实际上是不存在的，只有当控制系统中信号幅度限制在某一范围内时，系统元件才可能有线性特性，这时的系统可认为基本是线性的。

② 时不变系统和时变系统 当控制系统在工作时其参数不随时间而变的系统叫时不变系统，否则就是时变系统。运行中的宇宙飞船由于燃料损耗的变化、卷纸装备中滚筒上纸卷直径（质量）的变化，都使这些系统成为时变系统。时变系统的分析远较时不变系统的复杂。

③ 连续数据控制系统 若一个控制系统各部分的信号是连续时间变量 t 的函数，则这个系统就叫做连续数据控制系统或叫连续系统。这种系统中的信号又可分为交流信号和直流

信号两种,交流控制系统通常指系统中的交流信号是用某种方式调制过的,而直流控制系统并不是指系统中所有信号都是直流的,而是指所用信号是没有调制过的。交流控制系统的常用元件有同步机、交流放大器、交流电机、加速度计、陀螺仪等。直流控制系统的常用元件有电位器、直流放大器、直流电机和直流测速发电机等。实际上,有时系统是用各种元件混合组成的,采用相应的调制、解调以适应系统各点的需要。

④ 采样数据控制系统和数字控制系统 这两种系统和连续数据控制系统的不同是,在系统的一点或某几点,信号的形式是脉冲串或数码。通常采样数据系统是指信号为脉冲数据形式的系统,而数字控制系统是指系统中有数字计算机或控制机的系统。“离散数据控制系统”泛指这两种系统。

⑤ 集中参数系统 有有限数量的状态变量的系统。

⑥ 确定性系统 没有噪声的系统。

本书将研究线性、时不变、连续数据控制、集中参数和确定性系统,而且以电液控制系统为实例进行讨论。被研究的系统应该具有最初的方案,即执行元件根据静态计算为已知,被控对象为已知,所以可将被研究的基本问题归结成图 1-5。

在结束本章之前,再看一个电液伺服系统的实例,并从这个典型系统中对一些元件的名词作一解释。

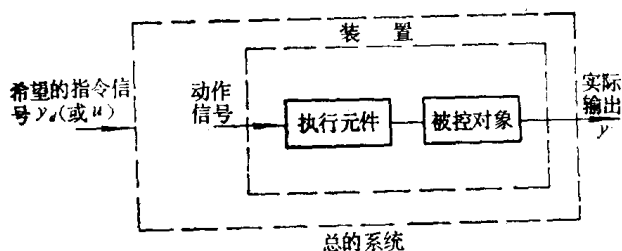


图1-5 被研究的基本问题

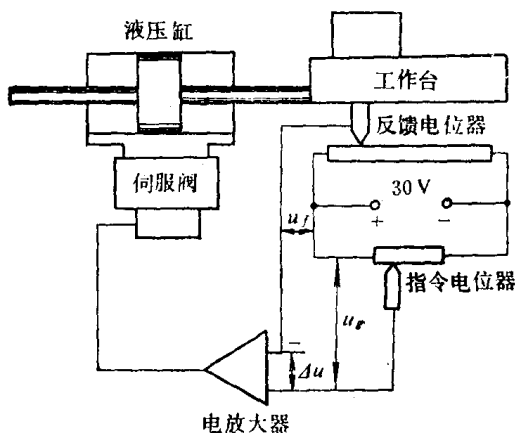


图1-6 双电位器位置控制电液伺服系统

图 1-6 为双电位器电液伺服系统的原理图,该系统的被控对象是工作台,被控量是它的位置,执行元件是液压缸。操作者移动指令电位器滑臂,滑臂位置转换成电压 u_g 。被控制的工作台位置由反馈电位器检测,转换成电压 u_f 。两个电位器接成桥式电路,该电桥的输出为 $\Delta u = u_g - u_f$ 。如果在开始时指令电位器和反馈电位器的滑臂都处于左端位置,此时 $u_g = 0$, $u_f = 0$, $\Delta u = u_g - u_f = 0$ 没有偏差信号,若突然将指令电位器滑臂移到中间位置,则 $u_g = 15$ 伏,而在工作台改变位置之前反馈电压 $u_f = 0$,所以 $\Delta u = 15 \text{ 伏} - 0 = 15 \text{ 伏}$ 。该偏差电压经放大后变为电流信号去控制伺服阀,使它输出流量,由液压缸推动工作台移动,直到反馈电位器滑臂达到中间位置时, $u_f = 15 \text{ 伏}$, $\Delta u = 15 \text{ 伏} - 15 \text{ 伏} = 0$,伺服阀恢复零点而不再输出流量,液压缸活塞停止。如果指令电位器滑臂位置不断改变,则工作台位置也跟随着变化。

从这个伺服系统可以看出,被控制量(工作台位置)是用传感器(反馈电位器)进行检测的。把测得的输出信号引回输入端,与指令信号进行比较,这就是反馈。用通过比较得到的偏差信号来进行控制,以便消除偏差。

为了便于研究伺服系统的工作原理,通常把系统用方块图画出。图 1-7 就是上述双电位

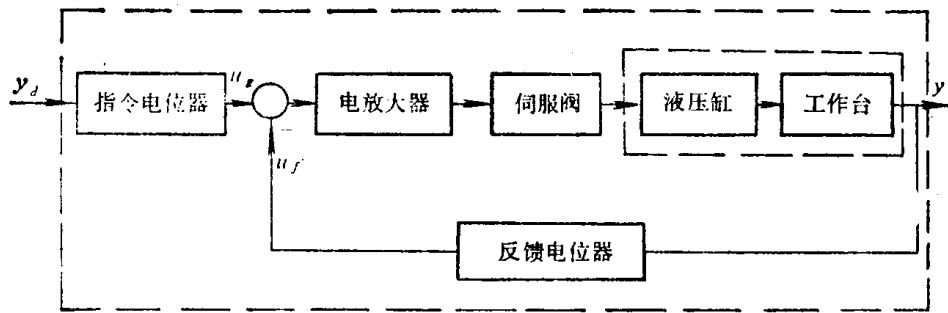


图1-7 双电位器位置控制电液伺服系统的方块图

器位置控制电液伺服系统的方块图（和图 1-5 比较）。图中每个方块表示组成系统的一个元件或环节，方块之间的线条表示信号，箭头指出信号传递的方向。圆圈表示比较元件或加法点，加法点的含意如图 1-8 所示。

无论多么复杂的反馈控制系统，都是由一些基本元件所组成的。图 1-9 表示组成反馈控制系统的基本元件，其中包括控制元件、反馈元件、比较元件、放大变换元件、执行元件、被控对象。

控制元件 控制元件的作用是产生控制信号，如图 1-6 中的指令电位器。

反馈元件 它产生与被控量有一定函数关系的反馈信号，如图 1-6 中的反馈电位器。

比较元件 它产生偏差信号，该信号反映控制信号与反馈信号的差值，如图 1-6 中的电位器电桥。

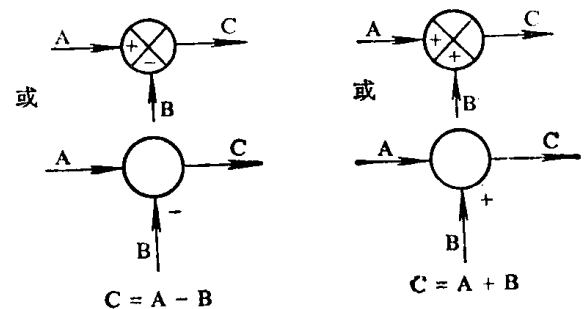


图1-8 加法点的含意

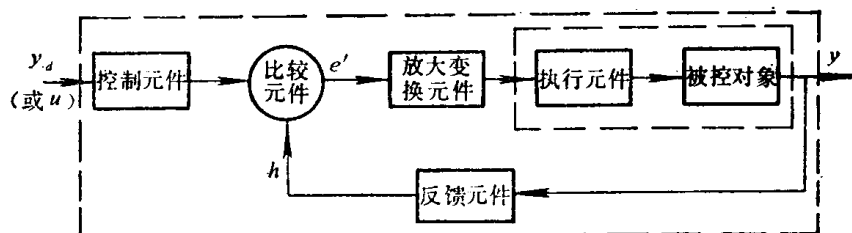


图1-9 反馈控制系的组成

放大变换元件 把偏差信号放大并对信号的能量形式（电气、机械、液压等）进行变换的元件，如图 1-6 中的电放大器和伺服阀。

执行元件 直接对被控对象进行控制的元件，如图 1-6 中的液压缸。

被控对象 就是控制系统进行控制的对象，它的输出量即为系统的被控制量，例如图 1-6 中的工作台。

反馈控制系统中的各种信号:

控制信号 (或输入量) 它是控制输出量变化的信号, 用 y_d 或 u 表示。

被控信号 (或输出量) 它的变化规律是要加以控制的。应保持它与控制信号之间有一定的函数关系, 用 y 表示。

偏差信号 (或偏差) 它是控制信号与主反馈信号之差, 用 e' 表示。

误差信号 (或误差) 它是输出量的实际值与希望值之差, 用 e 表示。

干扰信号 (或干扰) 除控制信号外, 对系统输出量产生影响的因素都叫干扰, 用 f 表示。

反馈信号 (或反馈) 从系统 (或元件) 的输出端取出信号, 经过变换后再加到系统 (或元件) 的输入端, 这就是反馈信号, 用 h 表示。当它与系统 (或元件) 的输入信号符号相同时叫正反馈, 符号相反时叫负反馈。直接取自系统的最终输出端的反馈叫主反馈, 主反馈一定是负反馈, 否则偏差会越来越大, 直到使系统完全失去控制。除了主反馈外, 有的系统还有局部反馈, 这往往是为了对系统进行补偿、线性化而设的, 有些局部反馈是元件所固有的。

第二章 数学基础和系统的数学描述

在线性、时不变、连续、集中参数和确定性系统的设计中涉及的数学工具有复变函数、拉普拉斯变换、矩阵代数等。这里将根据工程设计结合实例进行叙述。本章先简单介绍线性化算法、线性微分方程，再介绍复变函数和拉普拉斯变换。矩阵代数将在十三章中介绍。本章末将介绍控制系统的几种数学描述方法。

一、线性化

控制系统的行为可以用联系系统变量的方程来描述。可以用线性方程来描述的系统叫线性系统。本文只讨论线性系统。但是纯粹的线性系统实际上是不存在的。为了利用线性理论来分析和设计系统，必须对系统运动方程进行线性化。线性化有两种方法：一种方法是忽略那些比较次要的非线性因素，如小的死区、磁滞、干摩擦等；另一种是切线法，即将工作点附近的小变化量之间的关系用线性方程来近似地表达，称为该工作点的增量方程。把非线性函数在工作点展开成台劳级数，取台劳级数的一阶近似式，即可得到增量方程。台劳级数的一阶近似式为：

$$F(x) = F(x_0) + \left(\frac{dF}{dx} \right)_0 \Delta x \quad (2-1)$$

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 \Delta y \quad (2-2)$$

$$F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_0 \Delta z \quad (2-3)$$

在液压伺服系统的分析中，经常采用这种方法。例如，滑阀节流口的流量公式为：

$$q = cw x_v \sqrt{\frac{2p}{\rho}} \quad (2-4)$$

式中 c ——流量系数；
 w ——滑阀的面积梯度；
 x_v ——阀芯位移量；
 p ——节流口压降；
 ρ ——油液密度。

流量 q 取决于 x_v 和 p 两个变量。运用台劳公式 (2-2)，得

$$q = cw x_{v0} \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}} + cw \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}} \Delta x_v + cw x_{v0} \sqrt{\frac{2}{\rho}} \frac{1}{2\sqrt{p_0}} \Delta p \quad (2-5)$$

$$q - q_0 = cw \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}} \Delta x_v + cw x_{v0} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\rho p_0}} \Delta p \quad (2-6)$$

$$\Delta q = cw \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}} \Delta x_v + \frac{cw x_{v0}}{2} \sqrt{\frac{2}{\rho p_0}} \Delta p \quad (2-7)$$

式中, q_0 、 x_{v0} 、 p_0 分别为某一工作点处的流量、阀芯位移量(开口)和压降。这些值都是常数, 所以式(2-7)可写为

$$\Delta q = K_q \Delta x_v + K_c \Delta p \quad (2-8)$$

式中

$$K_q = cw \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}$$

$$K_c = \frac{cw x_{v0}}{2} \sqrt{\frac{2}{\rho p_0}}$$

显然, 流量增益 Δq 与阀芯位移增量 Δx_v 、压降 Δp 之间的关系为线性关系, 而不再是式(2-4)那样的非线性关系了。式(2-8)表明: 在某个工作点附近, 滑阀节流口的流量随着阀芯位移的增加而成比例地增加, 并随着节流口压降的增加而成比例地增加。

二、线性系统微分方程

前面讲过, 能用线性方程描述其行为的系统叫做线性系统。描述系统稳态特性的方程通常是代数方程, 描述系统瞬态特性的方程通常是微分方程。描述线性系统的常系数线性微分方程有如下形式:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \quad (2-9)$$

式中 t —— 自变量, 即时间;

x —— 未知函数, 即系统的输出量;

u —— 已知函数, 即系统的输入量;

a_i —— 取决于系统参数的系数, $i = 0 \sim n$;

b_k —— 取决于输入量函数的系数, $k = 0 \sim m$ 。

写成算子形式则为

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0) x = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0) u \quad (2-10)$$

式中 $p = \frac{d}{dt}$ —— 微分算子。

微分方程的解是以自变量的显函数的形式给出的关系式, 把它代入微分方程可以使之成为恒等式。系统微分方程的解就是以时间函数形式给出的输出量。常系数线性微分方程的解由互不相关的两部分组成: 一部分叫补函数, 它是对应的齐次方程 $(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0) x = 0$ 的通解; 另一部分叫特积分, 特积分也叫稳态解, 它是输出量中的受迫分量。补函数也叫瞬态解, 它是输出量中的自由分量。

图 2-1 是某个系统的输入量与输出量, 输入信号 $u(t)$ 是一个阶跃信号。输出量 $x(t)$ 由两部分组成, 即 $x = x_1 + x_2$ 。 x_1 是受迫分量, 它是系统微分方程的特积分。 x_2 是自由分量,

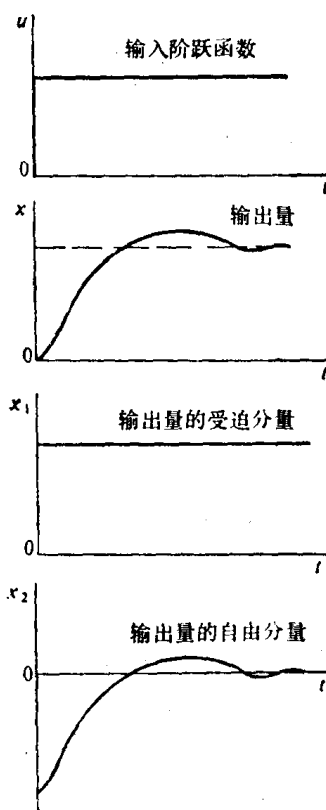


图2-1 输出量的两个组成部分

它是对应齐次方程的通解，只取决于系统本身的条件而与输入信号无关。明确这一点是非常重要的，在研究系统的动态特性时，我们应该把注意力集中到对应的齐次方程上。

三、复变量和 s 平面

在复变函数理论中，复变量 s 是由实部 σ 和虚部 ω 组成的，即 $s = \sigma + j\omega$ 。若在复变函数

$$F(s) = 3 + s$$

中，设 $s_1 = 1 + j3$

则

$$\sigma = 1$$

$$\omega = 3$$

$$F(s_1) = 4 + j3$$

复变量 s_1 在 s 平面中的表示见图 2-2，复变函数 $F(s_1)$ 在 $F(s)$ 平面中的表示见图 2-3。

在 s 平面内，通常用 σ 表示水平坐标轴，用 ω 表示垂直坐标轴。一个任意函数 $F(s)$ ，若每一个 s 值至少对应一个 $F(s)$ 值，则 $F(s)$ 是复变量 s 的函数。如果每一个 s 值仅有一个 $F(s)$ 值与之对应，则函数 $F(s)$ 就叫单值函数。线性系统中经常遇见的复变函数 $F(s)$ 是 s 的单值函数，若 s 的每一个值，在 $F(s)$ 平面上对应多个点，那么函数 $F(s)$ 就是多值函数。

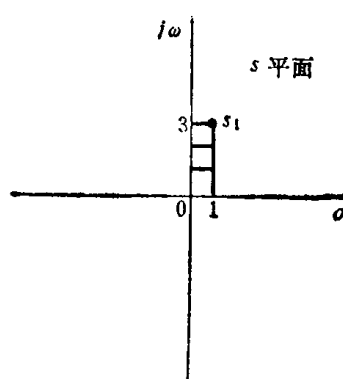


图2-2 s 平面和其上的一个点 s_1

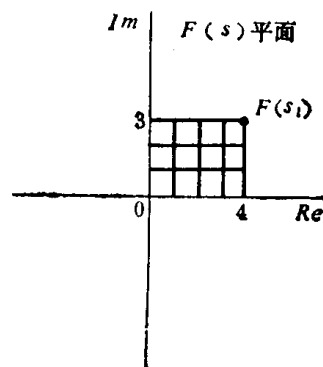


图2-3 复平面上与点 s_1 相应的点 $F(s_1)$

下面介绍复变函数理论中的几个基本概念。

① 解析函数 如果有一个复变函数 $F(s)$ 和它的所有导数在那个区域都存在，那么这个函数在此区域内是解析的。如

$$F(s) = \frac{1}{s+3}$$

除 $s = -3$ 点以外，在 s 平面内每一点都是解析的。

② 奇点 在 s 平面内函数或它的导数均不存在的点。

③ 极点 是奇点的一个重要特例，如在奇点上函数 $F(s)$ 或它的导数趋于无穷大，则这个点就叫极点。如函数

$$F(s) = \frac{10(s+2)(s+3)^2}{s(s+7)(s+10)^3}$$

其极点为 $s = 0$ ， $s = -7$ ， $s = -10$ ，而且 $s = -10$ 为 3 阶极点。

④ 零点 在 s 平面内函数 $F(s)$ 为零的点叫零点。上例中 $s = -2$ 为一阶零点， $s = -3$ 为二阶零点。

⑤ 普通点 s 平面上不是奇点, 不是零点的点叫普通点。

四、拉普拉斯变换

拉普拉斯变换(以下简称拉氏变换)是控制理论中有力的数学工具。它的基本概念是: 将一个以时间 t 为变量的函数的积分运算转变为对复变量 s 的运算。这种运算是可逆的, 即在复数域中每个函数唯一地对应于时域中一个函数。对一个时间函数作变换, 并在复数域中进行各种运算, 要比在时域中做同样的运算更为容易。特别是对微分方程, 因它能将微分方程转变为复数域的代数方程, 使求解明显地简单了。事实上, 经拉氏变换后在复数域进行运算, 就可无须求解系统微分方程, 而仅根据由微分方程引伸出来的频率特性即可推断系统的瞬态响应。

如果当 $t \geq 0$ 时, 实函数 $f(t)$ 的积分

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

有意义, 并且当 $t < 0$ 时, $f(t) = 0$, 则称 $f(t)$ 为可以进行拉氏变换的函数, 并把该积分定义为 $f(t)$ 的拉氏变换式或象函数, 用 $F(s)$ 或 $L[f(t)]$ 表示,

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2-11)$$

式中 s ——拉氏算子, 为复数, $s = \sigma + j\omega$ 。

拉氏反变换为

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (2-12)$$

式中 $j = \sqrt{-1}$ ——虚数单位;

c ——实常数, 选得比 $F(s)$ 的所有奇点的实部都要大。

$f(t)$ 称为 $F(s)$ 的原函数。

例如, 单位阶跃函数

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \text{ 时} \\ 0 & t < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

的拉氏变换为

$$L[f(t)] = L[1] = \int_0^{\infty} 1 \times e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

再如, 函数

$$f(t) = e^{-at}$$

的拉氏变换为

$$L[f(t)] = L[e^{-at}] = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \frac{-1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

从以上例子可以看出, 拉氏变换能把时间 t 的函数变成复数 s 的函数。表 2-1 为常用函

表2-1 常用函数的拉氏变换

	原 函 数 $f(t)$	象 函 数 $F(s)$
1	冲激函数 $\delta(t)$	1
2	单位阶跃函数 $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	Ae^{-at}	$\frac{A}{s+a}$
7	$t^n e^{-at} (n=1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
8	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
9	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
10	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
11	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
12	$\frac{1}{ab} \left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
13	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
14	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
15	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
16	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$
17	$\frac{-1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi), \phi = \lg^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$
18	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi), \phi = \lg^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2)}$
19	$A(1 - e^{-t/T})$	$\frac{A}{(Ts+1)s}$

数的拉氏变换表。表 2-2 是拉氏变换的规则与定理。通过拉氏变换可以把微分方程简化成代数方程。对该代数方程求解后，再运用拉氏反变换，即可求得微分方程的解。下面将举例说明如何用拉氏变换求解微分方程。

在举例说明如何用拉氏变换求解微分方程以前，先讨论利用反变换时要用的部分分式展开法。

上面已经讲过，函数 $F(s)$ 的反变换用如下符号

$$L^{-1}F(s) = f(t)$$

表2-2 拉氏变换的规则和定理

	名 称	内 容
1	系 数	$L[Af(t)] = AF(s)$
2	线 性	$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3	一阶导数	$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$
4	二阶导数	$L\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
5	n 阶导数	$L\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$
6	一重积分	$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\left[\int_0^t f(t)dt\right]_{t=0}}{s}$
7	二重积分	$L\left[\int_0^t \int_0^t f(t)dt dt\right] = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{\left[\int_0^t f(t)dt\right]_{t=0}}{s} + \frac{\left[\int_0^t \int_0^t f(t)dt dt\right]_{t=0}}{s}$
8	n 重积分	$L\left[\int_0^t \cdots \int_0^t f(t)(dt)^n\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{s^{n-k+1}} \left[\int_0^t \cdots \int_0^t f(t)(dt)^k\right]_{t=0}$
9	位 移	$L[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$
10	滞 后	$L[f(t-a)1(t-a)] = e^{-as}F(s)$
11	终 值	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
12	初 值	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
13	相 似	$L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(as)$ $L[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
14	复数积分	$L\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_s^\infty F(s)ds$

但 $F(s)$ 须分解成一连串的简单项之和, 才可按简单项在表 2-1 中找到相应的反变换。在应用中, $F(s)$ 通常为有理函数的形式, 即

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (2-13)$$

当 $n = m$ 时, 必须利用长除法化 $F(s)$ 为真分式, 然后再用部分分式法展开。展开后

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) + \cdots + F_n(s) \quad (2-14)$$

再查表 2-1 便可得

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \cdots + f_n(t) \quad (2-15)$$

下面讨论如何具体地进行部分分式展开。

1) 没有重极点时

设

$$F(s) = \frac{As + B}{(s + C)(s + D)} \quad (2-16)$$