天元研究生数学丛书

模形式讲义

陆洪文 李云峰 编著

北京大学出版社

天元研究生数学丛书

模形式讲义

陆洪文　李云峰　编著

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

模形式讲义/陆洪文,李云峰编著. —北京:北京大学出版社,1999.7

(天元研究生数学丛书)

ISBN 7-301-04045-8

Ⅰ. 模… Ⅱ. ①陆… ②李… Ⅲ. 模形式-研究生教育-教材 Ⅳ. 0156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 03733 号

书　　名:模形式讲义(天元研究生数学丛书)

著作责任者:陆洪文 李[redacted]峰[redacted]著

责 任 编 辑:刘 勇[redacted]

标 准 书 号:ISBN[redacted]045-[redacted]O·[redacted]9

出 版 者:北京[redacted]学出版[redacted]

地　　址:北京市海淀区[redacted]校内 100871

网　　址:http://cbs.[redacted]/cbs.htm

电　　话:出版部 62752015 发行部 62754140 编辑室 62752021

电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn

印 刷 者:北京大学印刷厂

发 行 者:北京大学出版社

经 销 者:新华书店

850×1168 32开本 11.5印张 290千字

1999年7月第一版 1999年7月第一次印刷

印　　数:0001—3000册

定　　价:20.00元

前　　言

我国实行学位制度以来，研究生教育有了很大的发展。人们逐渐认识到：拓宽研究生的知识面是时代发展的需要。许多数学硕士点和博士点都要求在研究生阶段设立专业基础课程，使得不同专业、不同专题方向的研究生能对本专题以外的重要的、带基础性的近代发展也有所了解。

开设这类研究生专业基础课程的教材，当然是要介绍该方面的基本概念和基本方法。但在涉及近代的发展上不应过于专门，要照顾到各个不同分支的需要；也不能过于拘泥在技术细节上的推导，而是要在总体上、思想方法上给读者对该学科的主要内容有一个清晰的了解。因此在编写这类教材时，在深与广、精与粗、全貌与专题等方面要掌握适度才能使大多数来自不同专题方向的学生受益。

国内过去出版的大量为本科生编写的教材，因其没有反映近代的内容，不能满足需要；就是许多为研究生编写的教材，因其过分专门而不适用。可喜的是最近几年，出现了一批经过一段教学实践检验后符合上述要求的研究生专业基础课讲义。出版《天元研究生数学丛书》就是为了推动这类教材的编写，促进我国数学研究生培养水平的提高，希望得到数学界同仁们共同的关心和支持。

张恭庆

1995 年 3 月于北京

序　　言

众所周知,Fermat 大定理是数学最引人注目的问题之一.最近一段时间,它成为全世界数学家关注的焦点.经过一番波折之后,英国数学家 A. Wiles 最终成功地证明了 Fermat 大定理.这一结果被誉为是数论发展的一个里程碑. Wiles 证明的本质是证明某一类椭圆曲线是模椭圆曲线,即一类同模形式有着某种联系的椭圆曲线.那么,什么是模形式呢?

很早就有了对模形式的研究,例如 Jacobi 对 theta 级数的讨论.尽管 Gauss 从没发表过有关模形式的文章,但是数学史料表明他已有一些这方面的概念.然而,直到上一世纪 60 年代,Poincaré 建立自守函数理论,作为这个一般理论的一部分,模形式才逐渐为人们所重视和研究.本世纪初,Hecke 等人开辟了模形式的算术理论的新途径,从而使得模形式成为一门完整的体系.自那以后,随着数学家们的不断努力,与数学其他分支的交叉,它与自守形式理论现已是当代数学中心领域之一,对当今数学的发展产生了巨大的影响.例如,读者可以从文献[63]看到模形式论的现代研究情况;在[60],[18],[19],[26],[46],[47]和[59]中则可看到它与表示论、算术几何的关系,在此需要说明的是,这些联系对现代数论的发展影响是巨大而深远的;[46],[50]和[53]指出了它与分析的联系;[44]中介绍了模形式在图论、算术等方面的三个应用;而在[62]和[53]中则可领略一点模形式在物理上的一些应用.当然,模形式的影响还远远不只这些,我们在这里只是挂一漏万地介绍一点.

历史上,人们关注模形式的一个重要原因是对二次型的研究,特别是对计算整数的平方和表示的表法个数问题的讨论.对自然数 m 和 n,记 $r_m(n)=\#\{x_1,\cdots,x_m\in\mathbf{Z}\mid x_1^2+\cdots+x_m^2=n\}$,其中 #

表示集合的势. 我们的问题是求 $r_m(n)$. Jacobi 首先注意到 $r_m(n)$ 同 theta 级数

$$\theta^m(q)=\sum_{n\geqslant 0}r_m(n)q^n=\sum_{x_1,\cdots,x_m\in\mathbf{Z}}q^{x_1^2+\cdots+x_m^2}=\left(\sum_n q^{n^2}\right)^m=\theta(q)^m$$

的联系. 命 $q=e^{\pi iz}$, 其中 $z\in\mathfrak{H}=\{z\in\boldsymbol{C}\mid\operatorname{Im}z>0\}$, 显然 $\theta(z+2)=\theta(z)$. 此外, 利用 Poisson 求和公式可以证明 $\theta(z)=(-iz)^{\frac{1}{2}}\times\theta\left(-\frac{1}{z}\right)$. 设 Γ_θ 是由 $z\to z+2$ 和 $z\to-\frac{1}{z}$ 生成的线性变换群. 为简单起见, 我们仅考虑 $m=8k$ 的情况. 这时

$$\theta^{8k}(\gamma z)=(cz+d)^{4k}\theta^{8k}(z),\quad\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma_\theta.$$

于是 θ^{8k} 是一个 Γ_θ 的权 $4k$ 的模形式. 求 $r_m(n)$ 就是求模形式 θ^{8k} 的 Fourier 系数.

粗略地讲, 对 $SL_2(\mathbf{Z})$ 的一个有限指数的子群 Γ 和 $\mathfrak{H}$ 上的一个全纯函数 f, 如果

$$f(\gamma z)=(cz+d)^k f(z),\quad\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma,$$

则我们称它为 Γ 的权 k 的模形式. 构造模形式的一个最简单的方法是作 Eisenstein 级数, 例如, 对 $\Gamma=SL_2(\mathbf{Z})$, $k\geqslant 4$, Eisenstein 级数

$$E_{2k}(z)=\sum_{c,d}{}'(cz+d)^{-2k}$$

是一个 $SL_2(\mathbf{Z})$ 的权 $2k$ 的模形式 $\left(\sum{}'\right.$ 表示求和时排除 $c=d=0$ 这一项$\left.\right)$, 其 Fourier 系数可以用初等方法精确地求得

$$E_{2k}(z)=2\zeta(2k)+2(-2\pi i)^{2k}\Gamma(2k)^{-1}\sum_{n>0}\sigma_{2k-1}(n)e^{2\pi inz},$$

其中 $\sigma_t(n)=\sum_{d\mid n}d^t$.

当群 Γ 和权固定时, 所有模形式构成了一个有限维线性空间. 特别地, 当权为 4 时, 关于 Γ_θ 的模形式均可用 Eisenstein 级数表示, 进而利用 Eisenstein 级数的 Fourier 系数我们可以给出

$r_8(n)$的精确表达式,例如当 n 为奇数时,$r_8(n)=16\sigma_3(n)$.

从这个例子我们希望读者能对模形式有一个最初步的认识.事实上,模形式所包含的内容还远远不只这些.在本书中,我们将完整地介绍模形式理论.本书旨在作为单变量模形式理论的一个入门教材,在尽可能初等的基础上,为读者勾画出单变量模形式论,介绍了经典模形式论的最主要的结论,它们对于更深入地学习和研究模形式都是必需的.通过本书的学习,读者既可以把握模形式论以用于其他研究领域,也有能力进一步学习和研究模形式论更深入的发展,例如自守表示,同算术几何的联系等等.

本书前身是第一位作者十多年前的同名讲义,内容到十三章为止.作者以它作为研究生教材在中国科技大学给五届研究生讲授过.最近又在同济大学使用过.在此基础上,两位作者不断加以修改和补充,最后共同修订完成了本书的写作.

本书的第一部分是 $SL_2(\mathbf{Z})$上的模形式理论,这是最简单的一种情况.借助于这种情况,我们在一个初等的基础上,介绍了模形式论的最基本的概念,如模形式、尖点形式、Poincaré 级数、Eisenstein 级数、Petersson 内积、Hecke 算子、theta 级数以及与整数的平方和表示问题的联系、Eichler-Selberg 迹公式等等.借此希望读者能对模形式有一个初步和比较完整的了解.除了在第二章和第三、四章的部分内容需要一些 Riemann 面的知识,其余部分对本科高年级的学生完全可以掌握.事实上,对不熟悉 Riemann 面内容的读者可以先忽略它们,这并不影响对其他内容的理解.

第二部分是对一般整权模形式的讨论,这是第一部分的推广.在第八章,我们讨论 Lie 群 $SL_2(\mathbf{R})$以及它的 Haar 测度、离散子群和算术子群等概念,为进一步学习和研究模形式或更一般的自守形式理论作好准备.这一章需要读者有一些 Lie 群、拓扑群的基础知识,不熟悉的读者可以参阅有关书籍,例如[42];在第九章,我们将把第一部分讨论的 $SL_2(\mathbf{Z})$上的模形式理论推广到一般的 Fuchs 群上的模形式理论;第十、十一、十二和十三章是所谓的 Hecke 理论,

这是模形式论的核心，首先，在第十章我们把第五章的有关 Hecke 算子讨论一般化，利用抽象 Hecke 环理论重新定义 Hecke 算子；在第十一章讨论了模形式与 Dirichlet 级数的关系，这对模形式如何应用于数论起着非常重要的作用，Hecke 与 Weil 的工作是本章的核心，我们将详细地加以解释，这里需要读者了解诸如 Dirichlet L-函数，特征等数论知识；在第十二章，我们讨论第十一章工作的加细，这是 Atkin，Lehner[4]建立和李文卿[33]等人发展的新形式、旧形式理论. 在第十三章，我们给出一般 Hecke 算子的迹公式，它是第七章 Eichler-Selberg 迹公式的推广，又可看作一般 Selberg 迹公式的一种特殊情况，后者在自守表示理论、群上的调和分析等领域扮演着重要的角色(参见[60]，[63]，[46]，[32]和[26]).

最后一章构成本书的第三部分，在这一章中，我们介绍半整权模形式的一些基本概念和结果，特别是志村五郎[48]的重要结果. 进一步，我们利用对同余数问题的讨论，介绍了有关模形式与椭圆曲线之间的一些重要结果，让读者对这个十分热门的分支有一个初步的了解，对模形式与椭圆曲线，算术等的联系有一个初步的认识.

作者衷心感谢张恭庆教授和冯克勤教授对本书出版的大力支持. 我们感谢熊金城教授和郭懋正教授的真诚帮助. 特别感谢裴定一教授和王学理博士非常认真地审阅了书稿，并提出了宝贵的意见. 书中的插图系计光恒所画，作者非常感谢. 由于作者的学识有限，书中难免有谬误之处，热诚欢迎读者批评指正.

作者还要感谢《天元研究生数学丛书》编委会的热忱支持，国家自然科学基金委员会的资助以及北京大学出版社尤其是刘勇先生的辛勤劳动.

陆洪文　李云峰

1998 年 12 月

符 号 说 明

$\boldsymbol{C}$ 复数域,或扩充复平面

$\boldsymbol{R}$ 实数域,$\boldsymbol{R}^*$(或 $\boldsymbol{R}^\times$)$=\boldsymbol{R}-\{0\}$

$\boldsymbol{Q}$ 有理数域

$\boldsymbol{Z}$ 有理整数环

$\boldsymbol{Z}_q$ mod q 整数环

$\boldsymbol{N}$ 全体正整数所成的集合

$\gcd(c,d)$ c,d 的最大公约数

$GL_2(\boldsymbol{R})$ $\boldsymbol{R}$ 上全体非奇异二阶方阵所组成的群

$SL_2(K)$ K 上全体行列式为 1 的二阶方阵所成的集合

$\mathfrak{H}$ 复数上半平面

Γ 全模群,见 § 3 的定义 1

$\mathscr{D}$ $\mathfrak{H}$ 在 Γ 下的一个基域,见 § 3 的定理 1,§ 24 的定理 1,以及 § 25 的定理 3

Γ' 即 $SL_2(\boldsymbol{Z})$

Γ'_q Γ'的 level 为 q 的主同余子群,见 § 4 的定义 1

Γ_q Γ'_q 所诱导的辛变换群,称为 Γ 的主同余子群,见 § 4 的练习

$\Gamma'_0(q)$与 $\Gamma'_1(q)$ 见 § 4 的练习

$\overline{\mathfrak{H}/G}$ Riemann 面,g 为其亏格,见 § 5 定理 2

(n_i,n_ρ,n_∞) G 的分歧类型,见 § 5 定理 3

$J_T(z):=\dfrac{\mathrm{d}Tz}{\mathrm{d}z}$ 其中 T 是由$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{C})$决定的线性变换

$$T: z\to\frac{az+b}{cz+d}$$

ϕ_v Poincaré 级数,见 § 8

$G_{2k}^{*}(z;\gamma,\delta;q)$, $G_{2k}(z;\gamma,\delta;q)$, $G_{2k}(z)$　　Eisenstein 级数，见 § 9

$E_{2k}(z)$　　Eisenstein 级数，见 § 10.

$\Delta(z)$　　见 § 10

$\tau(n)$　　Ramanujan 函数，见 § 10

$\eta(z)$　　Dedekind η 函数，见 § 10

$\mathscr{M}_{2k}(G)$　　群 G 的权 $2k$ 的模形式空间，见 § 11

$\mathscr{S}_{2k}(G)$　　群 G 的权 $2k$ 的尖点模形式空间，见 § 12

$J(z)$　　见 § 14

T_n　　Hecke 算子，见 § 15

$D(s,f)$, $D(s,f,\chi)$, $L(s,f,\chi)$　　由 Fourier 级数 $f(z)=\sum a_n e^{2\pi i n z}$ 决定的 Dirichlet 级数，见 § 17

$\theta_A(z)$　　由二次型 A 决定的 theta 级数，见 § 18

$\mathsf{T}(m)$　　即 Hecke 算子 T_m，见 § 15，§ 20，§ 31 与 § 32

$R_g(z,t)$　　见 § 20 的公式(22)

$n(u)$, $a(v)$, $k(\theta)$　　见 § 21 公式 (2)

N,A,K,B 与 Iwasawa 分解　　见 § 21 公式(12)，(13)以及以上部分

$\mathrm{d}g=2v^{-3}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}\theta$　　$SL_2(\boldsymbol{R})$的 Haar 测度，见 § 22

$\nu(A)$　　可测集 A 的测度，见 § 24 定义 1 之上

$\{n_1,\cdots,n_s,\underbrace{\infty,\cdots,\infty}_{t\text{个}}\}$　　Γ 的符号分布，见 § 24 定理 8 之上

$\Gamma(N)$　　$SL_2(\boldsymbol{Z})$的 level 为 N 的主同余子群，见 § 25 定理 2 之上

$\mu(\mathscr{D}(N))$　　$\mathscr{D}(N)$的面积，见 § 25 定理 5

$\mathscr{M}(m,\chi,\Gamma)$　　(m,χ,Γ)型模形式空间，见 § 26 定义 2

$\mathscr{S}(m,\chi,\Gamma)$　　(m,χ,Γ)型尖点形式空间，见 § 26 定义 2

$R(\Gamma,\Delta)$　　Hecke 代数，见 § 29 定理 1

$R(\Gamma,\widetilde{\Gamma})$　　Hecke 代数，见 § 30 开头

$[\,]_m$　　$\mathscr{M}(m,\Gamma)$上的 Hecke 算子，见 § 30 定理 1 之前

$\mathrm{T}(m,n)$　　见§31 定理 1 之前与§32 定理 3 之前

$f|[g]_m$　　见§30 开头的定义

$f|[T(\cdots)]_m$　　见§30 引理 1

$f|[T(\cdots)]_{m,\chi}$　　见§32 定理 3 附记之后的说明

$\mathscr{E}(m,N)$　　见§32 引理 9 之前的定义

$\mathscr{M}_k(N,\chi),\mathscr{S}_k(N,\chi)$　　见§35 定理 1 推论的脚注

$\mathscr{M}(\lambda,k,C)$　　见§34 引理 3 之前的定义

f_ψ　　f 的 ψ 扭曲，见§35 引理 1 之前的(1)

$\Phi_N(s,f,\psi)$　　见§35 引理 1 之前的(1)

$\Phi_N(s,f)$　　见§35 定理 1 的条件(B)

C_ψ　　一个只与 ψ 有关的常数，见§35 引理 1，定理 3，定理 4

$\mathscr{S}_k^0(N,\chi)$　　新形式空间，见§36 定义 2

$\mathscr{S}_k^1(N,\chi)$　　旧形式空间，见§36 定义 2

$\mathscr{H},\mathscr{T}$　　Hecke 代数，见§15

τ　　二阶方阵的对合，见§30 定理 2 之前

$(a,b)\equiv(a',b')(\bmod N)$或$\{a,b\}\equiv\{a',b'\}(\bmod N)$　　表示 $a\equiv a'(\bmod N)$与 $b\equiv b'(\bmod N)$同时成立，散见各处

$SL_2(\boldsymbol{R})=NAK$ 或 BK　　$SL_2(\boldsymbol{R})$的 Iwasawa 分解，见§21

D　　单位圆盘，即 $D=\{w\in\boldsymbol{C}\,|\,|w|<1\}$，见§39

Γ_ξ　　见§38 定义 2 的(iii)

内 容 简 介

模形式是研究在某种变换群下具有某种不变性质的解析函数。它从 19 世纪中叶至今的发生与发展，反映了经典数论向现代数论的演变，特别是最近在 Fermat 大定理的 A. Wiles 证明中起着不可替代的作用，并且它在其他数学分支以及实际应用中显示了愈来愈大的前途。全书分三部分，共 14 章。第一部分讲述 $SL_2(\mathbf{Z})$的模形式；第二部分讲述一般的整权模形式；第三部分讲述半整权模形式。本书由浅入深和比较全面地阐述了模形式的基本理论。内容包括：辛几何，基域，维数公式，Hecke 理论，Weil 定理，迹公式和半整权的模形式等内容。

本书的第一部分可作为大学数学系高年级大学生和有关方向硕士研究生课程的教材，而第二、三部分可作为有关方向博士研究生课程的教材。全书也可作[redacted]

目　录

第一部分　$SL_2(\mathbf{Z})$的模形式

第二部分　一般的整权模形式

第三部分 半整权模形式

第一部分　$SL_2(\mathbf{Z})$的模形式

这一部分的主要目的是在一个较为初等的水平上向读者介绍$SL_2(\boldsymbol{Z})$的模形式这种最简单的情况，使读者对模形式理论所研究的对象及基本概念和结果有一个初步了解。

第一章　辛　几　何

在本章中，我们讨论最简单的辛几何，即复上半平面的 Lobachevsky 几何. 更一般的讨论可以参阅有关文献，我们在此推荐 Siegel 的书[50].

§1　辛　变　换

首先我们介绍一些本书中常用的符号：$\boldsymbol{C}$ 表复数域，几何上则称为复平面，上面赋以通常意义下的拓扑；$\boldsymbol{R}$ 表实数域；$\boldsymbol{Q}$ 表有理数域；$\boldsymbol{Z}$ 表有理整数环；$\boldsymbol{N}$ 表自然数集；$\mathfrak{H}=\{z\,|\,z\in\boldsymbol{C},\mathrm{Im}z>0\}$称为上半平面，也称 Poincaré 上半平面；$\boldsymbol{C}\bigcup\{\infty\}$ 称为扩充复平面，它是 $\boldsymbol{C}$ 的单点紧化，我们也用 $\boldsymbol{C}$ 来记它，细心的读者是不会混淆的；“$:=$”表示式子左边的项由式子右边的项来定义，例如：

$$\mathfrak{H}:=\{z\,|\,z\in\boldsymbol{C},\mathrm{Im}z>0\}.$$

今后我们在使用这些记号时，除非有别的意义，将不再一一指明.

在复分析中我们已经知道，分式线性变换

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}, \qquad a,b,c,d \in \boldsymbol{C}, ad-bc \neq 0 \tag{1}$$

把整个扩充复平面 $\boldsymbol{C}$ 一一地和保角地映为它自己，且把圆映为圆(这里把直线视为半径无穷大的圆). 在本书中，我们将仅考虑 a, $b,c,d\in\boldsymbol{R}$ 且 $ad-bc=1$ 这种情况.

练习 在变换(1)中，限制 $a,b,c,d\in\boldsymbol{R}$ 且 $ad-bc=1$. 设 S_1, S_2 为二个这样的变换，定义它们的合成为

$$(S_1\cdot S_2)(z):=S_1(S_2z), \qquad z\in\boldsymbol{C}.$$

试证明 (1) $S_1\cdot S_2$ 仍是一个满足限制条件的线性变换；

(2) 满足限制条件的线性变换全体关于上述合成运算构成一个群，我们称之为**辛变换群**.

对于环 $K(=\boldsymbol{R},\boldsymbol{Q}$ 或 $\boldsymbol{Z})$，定义

$$SL_2(K):=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\middle| a,b,c,d\in K, ad-bc=1\right\}.$$

每一个方阵 $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{R})$诱导出一个辛变换

$$z\to M\langle z\rangle := \frac{az+b}{cz+d}. \tag{2}$$

练习 对于(2)式定义的辛变换，当 $z\in\mathfrak{H}$ 时，证明：

$$\operatorname{Im} M\langle z\rangle = |cz+d|^{-2}\operatorname{Im}z.$$

进而证明每一个辛变换把 $\mathfrak{H}$ 上的点映为 $\mathfrak{H}$ 上的点，把实轴映为实轴(包括∞点).

对于任意非零实数 r 和 $SL_2(\boldsymbol{R})$中的任一方阵 M，容易看出：M 与 rM 所诱导的辛变换是一样的，从而可以证明辛变换群同构于 $SL_2(\boldsymbol{R})/\boldsymbol{R}^*$，此处 $\boldsymbol{R}^*$ 是 R 的乘法群，即非零实数全体.

练习 证明任何由(2)定义的辛变换都是下面三种类型变换之一：

(a) **椭圆变换**：这种变换有两个不动点 ζ 和 $\bar{\zeta}$，其中 $\zeta\in\mathfrak{H}$，变换可以写成下面形式