线性代数

（修订版）

●主编 王锋 陈林珠

哈尔滨工程大学出版社

线 性 代 数

（修订版）

主　审　唐向浦
主　编　王　锋　陈林珠
副主编　卜长江　沈　艳

哈尔滨工程大学出版社

内 容 简 介

全书共分五章：n 阶行列式、矩阵、线性方程组、向量组的线性相关性及相似矩阵和二次型，并附有习题参考答案或提示。本书内容结构严谨、逻辑清晰、例题和习题较多，便于教学。

本书可作为工科院校各专业的教材，也可供有关科技人员参考。

线性代数

XIAN XING DAI SHU

主编 王[illegible] 陈林珠

责任编辑 宋旭东

哈尔滨工程大学出版社出版发行

哈尔滨市南通街145号 哈工程大学11号楼

发行部电话(0451)2519328 邮编：150001

新华书店经销

哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本 850mm×1 168mm 1/32 印张 6 字数 151 千字

1998 年 6 月第 1 版 2001 年 1 月第 2 版

2001 年 1 月第 1 次印刷

印数：8001～17000 册

ISBN 7－81007－871－2

O·60 定价：8.00 元

前　　言

本书是根据国家教委审定的高等工业学校《线性代数课程教学基本要求》编写的。编写过程中,我们总结了多年的教学经验,认真听取了数学教研室广大教师提出的宝贵意见,从教学角度出发进行仔细推敲,使内容安排更加合理,逻辑清晰,通俗浅显,简明流畅,并配置了大量的例题和习题,便于教与学。

本书由哈尔滨工程大学数力系代数学专家唐向浦教授主审,在此我们表示衷心感谢!

由于我们水平有限,书中难免有不妥之处,恳请广大读者批评指正。

编者

1998 年 6 月

第二版前言

本版是在第一版的基础上修改而成。这次修改广泛吸取了使用本书的教师所提出的意见,从教学角度出发进行仔细推敲,改写了一些重要概念的论述,更换了部分例题和习题,对书中一些不妥之处和错误,作了改正,使内容和系统更加完整,便于教学。

本书第一章和第二章由王锋修改,第三章和第四章由卜长江修改,第五章由沈艳修改。

本次修改得到哈尔滨工程大学数学系全体同志的帮助,在此我们表示衷心地感谢。

2000 年 12 月

目　　录

第一章　n 阶行列式

本章主要讨论以下三个问题：

1. n 阶行列式的概念；
2. 行列式的性质及计算方法；
3. 克莱姆(Cramer)法则.

基本要求：掌握以上三个方面的基本概念；熟练地掌握行列式的计算方法和 Cramer 法则.

§1.1　二、三阶行列式

一、二阶行列式

引例　解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

解　$(1)\times b_2-(2)\times b_1$ 得 $(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1$

$(1)\times a_2-(2)\times a_1$ 得 $(a_1b_2-a_2b_1)y=c_2a_1-c_1a_2$

把式中 x 或 y 的系数 $a_1b_2-a_2b_1$ 叫二阶行列式，记为

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

同理

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

若 $D\neq 0$,可得到

$$x=\frac{D_1}{D},\quad y=\frac{D_2}{D}\tag{3}$$

把(3)式的 x、y 代入方程组,可以验证它是满足方程组的,这就是二元线性方程组的唯一的一组解.

定义 二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 定义为 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$为二阶行列式的第 i 行第 j 列的元素.

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x+4y=1 \\ x+3y=2 \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2\times 3-4\times 1=2$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-5,\qquad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3$$

所以

$$x=\frac{D_1}{D}=-\frac{5}{2},\quad y=\frac{D_2}{D}=\frac{3}{2}$$

二、三阶行列式

引例 解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=k_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=k_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=k_3 \end{cases}$$

解 如前面的方法,先从第一、第二两个方程中消去 z,再从

第一、第三两个方程中消去 z,最后从所得的两个方程中消去 y. 就得到

$$(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1)x$$
$$= k_1b_2c_3 - k_1b_3c_2 + k_2b_3c_1 - k_2b_1c_3 + k_3b_1c_2 - k_3b_2c_1 \quad (4)$$

把 x 的系数叫三阶行列式,记为

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

显然(4)式右边是 D 中的 a_1, a_2, a_3 分别换成 k_1, k_2, k_3 而得到的结果,所以右边是

$$D_1 = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(4)式可以写成 $Dx = D_1$. 同理可以得到 $Dy = D_2$, $Dz = D_3$,这里 D_2 是 D 中的 b_1, b_2, b_3 分别换成 k_1, k_2, k_3 所得到的行列式, D_3 是 D 中的 c_1, c_2, c_3 分别换成 k_1, k_2, k_3 所得到的行列式.

若 $D \neq 0$,则可得到

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D}, \quad z = \frac{D_3}{D} \quad (5)$$

把(5)式代入方程组可以验证它们是方程组的解,所以(5)式是三元线性方程组的唯一的一组解.

定义 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3$$
$$- c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1b_3c_2$$

为了便于记忆,可以依下列方法计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

取在实线上的三个元素作乘积,冠以“+”号,则得三项

$$+a_1b_2c_3,\ +b_1c_2a_3,\ +c_1a_2b_3$$

又取在虚线上的三个元素作乘积,冠以“-”号,则得三项

$$-c_1b_2a_3,\ -b_1a_2c_3,\ -a_1b_3c_2$$

于是行列式 $D=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3$

$$-c_1b_2a_3-b_1a_2c_3-a_1b_3c_2$$

这种作法叫对角线法则.

例 2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

解 由对角线法则得

$$\begin{aligned} D &= 1\times2\times2+(-2)\times1\times3+3\times2\times0 \\ &\quad -3\times2\times3-(-2)\times2\times2-1\times0\times1 \\ &= 4-6+0-18+8-0 \\ &= -12 \end{aligned}$$

例 3 解方程组

$$\begin{cases} 2x-4y+z=1 \\ x-5y+3z=2 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-8\neq0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

所以方程组的解为

$$x = \frac{D_1}{D} = -\frac{11}{8}, \quad y = \frac{D_2}{D} = -\frac{9}{8}, \quad z = \frac{D_3}{D} = -\frac{3}{4}$$

习题 1.1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$　　(6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ m & n & e \end{vmatrix}$

2. 利用行列式解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_3 = 6 \end{cases}$

3. 验证下列等式成立：

(1) $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} a+a_1 & b \\ c+c_1 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$

(5) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1+ka_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+ka_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+ka_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

§1.2 排　　列

一、全排列及其逆序数

n 元排列：由自然数 1,2,…,n 构成的不重复的全排列称为 n 元排列，排列中的每个数称排列中的元素，一切 n 元排列的集合记为 A_n，A_n 中含有 $n!$ 个排列.

例如自然数 1,2,3 的一切全排列为 123、132、231、312、213、321，所以 $A_3=\{123,132,213,231,312,321\}$，$A_3$ 中含有 3! 个排

列.

在 n 元排列中规定 $123\cdots(n-1)n$ 为标准排列,即按递增的顺序排列起来的,在 A_n 中的其它排列中,当某两个元素的先后次序与标准次序不同时,就说有一个逆序,一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数,逆序数为奇数的排列叫奇排列,逆序数为偶数的排列叫偶排列.

逆序数的求法:设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为一个 n 元排列,考察数 $p_i(i=1,2,\cdots n)$,如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的数有 t_i 个,说 p_i 这个数的逆序数是 t_i,则排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数

$$t(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i$$

例 1 求排列 451326 的逆序数

解 在排列 451326 中,4 排在首位,逆序数 $t_1=0$;

5 的前面比 5 大的数没有,其逆序数 $t_2=0$;

1 的前面比 1 大的数有 4 和 5,其逆序数 $t_3=2$;

3 的前面比 3 大的数有 4 和 5,其逆序数 $t_4=2$;

2 的前面比 2 大的数有 4,5,3,其逆序数 $t_5=3$;

6 是最大的数,逆序数 $t_6=0$;

于是此排列的逆序数 $t(451326)=0+0+2+2+3+0=7$. 此排列为奇排列.

例 2 求排列 $n(n-1)\cdots21$ 的逆序数.

解 元素 $n,n-1,\cdots2,1$ 的逆序数依次为 $t_1=0,t_2=1,t_3=2,\cdots,t_{n-1}=n-2,t_n=n-1$. 所以 $t[n(n-1)\cdots21]=0+1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$

二、对换

对换:把一个排列中某两个数的位置互换,而其余的数不动,这种产生新排列的变换叫做对换. 将相邻两个元素对换,叫相邻对换.

定理 1 对换改变排列的奇偶性.

证 先证相邻对换的情形

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$,对换 a 与 b,变为

$$a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$$

显然,$a_1,\cdots,a_l;b_1,\cdots,b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变,而 a、b 两元素的逆序数改变为:当 $a>b$ 时,经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1,当 $a<b$ 时,经对换 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变。所以排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$,把它作 m 次相邻对换,调成 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$,再作 $m+1$ 次相邻对换,调成

$$a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$$

总之,经 $2m+1$ 次相邻对换,排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 调成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$,所以这两个排列的奇偶性相反.

推论 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证 由定理 1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数,而标准排列是偶排列(逆序数为 0),因此知推论成立.

习题 1.2

1. 求下列排列的逆序数,从而决定其奇偶性:

(1) 53124　　　　(2) 13572468

(3) 987654321　　　　(4) $246\cdots(2n)135\cdots(2n-1)$

2. 选择 i 和 j 使

(1) $1274i56j9$ 为奇排列;

(2) $1i25j4897$ 为偶排列.

§1.3 n 阶行列式

一、n 阶行列式的定义

由三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (1)$$

看出:

1.(1)式右边的每一项都恰是三个元素的乘积,这三个元素位于不同的行、不同的列.因此(1)式右端的任意项除正负号外,可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$.这里第一个下标(称行标)排成标准排列 123,而第二个下标(称列标)排成 $p_1p_2p_3$,它是 1,2,3 三个数的某个全排列.这样的排列共有 6 种,对应(1)式右端共含 6 项.

2. 各项的正负号与列标的排列对照:

带正号的三项列标排列是:123,231,312;

带负号的三项列标排列是:132,213,321.

计算知前三个排列都是偶排列,而后三个排列都是奇排列.因此各项所带的正负号可以表示为$(-1)^t$,其中 t 为列标排列的逆序数.

总之,三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3 \in A_3} (-1)^{t(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中 $t(p_1p_2p_3)$是列标排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数,Σ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和.

仿此,可以把三阶行列式推广到 n 阶行列式.

定义 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n \in A_n} (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

n 阶行列式简记为$\Delta(a_{ij})$,数 a_{ij} 称为行列式$\Delta(a_{ij})$的第 i 行第 j 列的元素.

按此定义的二阶、三阶行列式,与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式是一致的.当 $n=1$ 时,$|a|=a$,不要与绝对值记号相混淆.

定义表明,为了计算 n 阶行列式,首先作所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积;把构成这些乘积的元素按行标排成自然顺序,然后由列标所成的排列的奇偶性来决定这一项的符号;一共有 $n!$ 项.

例 1 证明**对角行列式**(对角线上的元素是 λ_i,未写出的元素都是 0)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n ;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

证 n 阶行列式的一般项为$(-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$,由于行列式中出现很多的零,所以不等于零的项数就大大减少了,先看看哪些项不为零,然后再来决定它们的符号.显然若 $p_1 \neq 1$,则 $a_{1p_1}=0$,从而相应项就等于零,因此只须考虑 $p_1=1$ 的那些项;同理,只须考虑 $p_2=2, p_3=3, \cdots, p_n=n$ 这些列标的项,即行列式不