JING JI GUAN LI
SHU XUE
JING JI GUAN LI SHU XUE
JING JI GUAN LI SHU XUE

经济管理数学

（下册）

黄在中 余介正 主编

湖南科学技术出版社

湘新登字 004 号

经济管理数学
（下册）
黄在中　佘介正主编
责任编辑：胡海清
*
湖南科学技术出版社出版发行
（长沙市展览馆路 3 号）
湖南省新华印刷二厂印刷
（印装质量问题请直接与本厂联系）
*
1994 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
开本：787×1092 毫米　1/32　印张：9.25　字数：211.000
印数：1—6.100
ISBN 7—5357—1572—9
O·125　定价：8.30 元
地科 155—054

目　　录

第二篇　线性代数

第一章　行列式与矩阵

线性代数是经济管理数学的重要组成部分，而矩阵论则是线性代数的主要内容之一。矩阵，作为重要的数学工具，不仅在数学中的地位十分重要，而且在现代经济学和经济管理学中都得到广泛的应用。行列式是研究线性代数的一个重要工具，我们在研究线性方程组、矩阵和二次型时，都要用到行列式。因此，学习行列式和矩阵的有关知识，对于经济工作者来说是十分必要的。本章从二、三阶行列式出发，引出 n 阶行列式的概念，讨论行列式的性质，给出用行列式解线性方程组的克莱姆法则，然后介绍矩阵的基本概念与运算。

§1.1　二阶和三阶行列式

（一）二阶行列式

对于二元二式线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases} \tag{1.1}$$

我们可用加减消元法求解如下：

（1）式$\times a_{22}-$（2）式$\times a_{12}$，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\ x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2.$$

（2）式$\times a_{11}-$（1）式$\times a_{21}$，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\ x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

于是，当$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\neq 0$，时，方程组(1.1)有唯一一组解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为了便于记忆，我们采用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，并把这个记号称为**二阶行列式**，即二阶行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.3}$$

其中横排称为行，竖排称为列；数a_{ij}（i，$j=1$，2）称为这个二阶行列式的第i行第j列元素；从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**，从右上角到左下角的对角线称为行列式的**次对角线**；（1.3）式的右边称为**二阶行列式的展开式**。（1.3）式告诉我们，二阶行列式的展开式等于其主对角线上两元素的乘积减去次对角线上两元素的乘积。

用二阶行列式的记号，可以把（1.2）式表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}.$$

其中D由方程组（1.1）的系数按它们在方程组中的次序构成，称为（1.1）的**系数行列式**；D_1、D_2是分别用（1.1）的常数项置换D中的第1列、第2列元素得到的。

例1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2=8, \\ 3x_1+7x_2=-11. \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=23, \qquad D_1=\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -11 & 7 \end{vmatrix}=23,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 3 & -11\end{vmatrix}=-46$$

所以 $x_1=D_1/D=1$，$x_2=D_2/D=-2$.

（二）三阶行列式

三元三式线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, & (1)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, & (2)\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. & (3)\end{cases}\tag{1.4}$$

类似于求解二元二式线性方程组，我们可用加减消元法求解（1.4）如下：

(1) 式 $\times a_{23}-$ (2) 式 $\times a_{13}$，　(1) 式 $\times a_{33}-$ (3) 式 $\times a_{13}$

得 $$\begin{cases}(a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13})x_1+(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})x_2=b_1a_{23}-b_2a_{13},\\ (a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13})x_1+(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})x_2=b_1a_{33}-b_3a_{13}.\end{cases}$$

解这个二元二式线性方程组，可以求出 x_1、x_2 的值，再将 x_1、x_2 的值代入（1—4）的第（1）个方程，可求得 x_3 的值，其结果如下：

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},\\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},\\ x_3=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}\end{cases}\tag{1.5}$$

其中　$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$.

这就是方程组（1.4）的解. 显然，公式（1.5）繁锁难记。为了便于记忆，引进记号

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.\tag{1.6}$$

称为三阶行列式. 数 a_{ij}（i，$j=1$，2，3）称为这个三阶行列式的第 i 行第 j 列元素. 主、次对角线的意义和二阶行列式相同.

(1.6) 式的右边称为**三阶行列式的展开式**，对它可以通过图形进行记忆：在图 1.1 中，各实线上三元素的乘积减去各虚线上三元素的乘积，即为三阶行列式的展开式. 按图 1.1 展开三阶行列式的方法称为**对角线法则**.

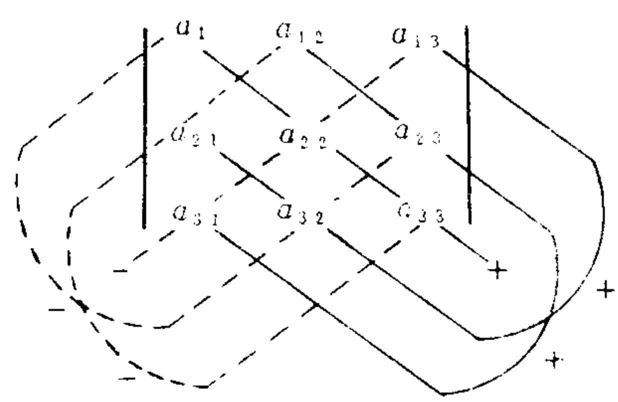

图 1.1

用三阶行列式可以表示线性方程组 (1.4) 的解

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix},$$

当 $D\neq 0$ 时，$x_1=D_1/D$，$x_2=D_2/D$，$x_3=D_3/D$. 式中分母 D 是方程组 (1.4) 的系数按它们在方程组中的次序构成的，称为方程组 (1.4) 的系数行列式. 分子 D_j ($j=1, 2, 3$) 是用常数项置换系数行列式 D 中第 j 列元素得到的.

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x-3y+4z=13,\\ x+y+2z=4,\\ 3x+5y-z=-4.\end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & 5 & -1\end{vmatrix}=-35$, $D_1=\begin{vmatrix} 13 & -3 & 4\\ 4 & 1 & 2\\ -4 & 5 & -1\end{vmatrix}=-35$,

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 13 & 4\\1 & 4 & 2\\3 & -4 & -1\end{vmatrix}=35,\quad D_3=\begin{vmatrix}2 & -3 & 13\\1 & 1 & 4\\3 & 5 & -4\end{vmatrix}=-70.$$

所以 $x=\dfrac{D_1}{D}=1$，$y=\dfrac{D_2}{D}=-1$，$z=\dfrac{D_3}{D}=2$.

§1.2 行列式的定义

本节我们将通过分析二、三阶行列式的特点，给出 n 阶行列式的一般定义. 在此之前先介绍行列式定义中要用到的排列及其逆序的概念.

（一）**排列与逆序** 由数码 1，2，…，n 组成的任一个全排列都称为一个 **n 元排列**，常记为 $j_1j_2\cdots j_n$.

例如，1 3 2 是一个 3 元排列，1 5 4 3 2 是一个 5 元排列，由于 n 个元素的全排列数为 $n!$，故 n 元排列共有 $n!$ 个.

在一个 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，如果有较大的数排在较小的数的前面，则称这两个数构成一个**逆序**. 一个 n 元排列中逆序的总数称为它的**逆序数**，记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$. 如果排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 是奇数，则称此排列为奇排列；如果 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 是偶数，则称此排列为偶排.

例如，排列 2 1 3 5 4 中，2 在 1 前面，5 在 4 前面，共有 2 个逆序，即 τ（2 1 3 5 4）$=2$，故 2 1 3 5 4 为偶排列.

自然顺序排列 1 2…n 的逆序数是零，它是偶排列. 在表1.1中，列出了 $3!=6$ 个 3 元排列及其奇偶性.

由表 1.1 可见，奇、偶排列各占一半，这个结论对于任何 n 元排列都是正确的.

（二）n 阶行列式的定义 考察三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

表 1.1

排列	逆序数	排列的奇偶性
123	0	偶排列
132	1	奇排列
213	1	奇排列
231	2	偶排列
312	2	偶排列
321	3	奇排列

我们发现：

（1）三阶行列式展开式的每一项都是取自不同行且不同列的 3 个元素的乘积，每一项除符号外可表示为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$. 其中行标形成 3 元自然顺序排列 123，列标形成 3 元排列 $j_1j_2j_3$. 当 $j_1j_2j_3$ 取遍所有 3 元排列（见表 1.1）时，便得到三阶行列式的所有项（不包含符号），共有 3! =6 项.

（2）每一项的符号规律是：当这一项元素的行标按自然顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号. 例如，由于 $\tau(2\ 3\ 1)=2$，所以 $a_{12}a_{23}a_{31}$ 前取正号，可记为 $(-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31}$；由于 $\tau(213)=1$，故 $a_{12}a_{21}a_{33}$ 前取负号，可记为 $(-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33}$.

基于上述规律，可给出 n 阶行列式定义如下：

定义 1.1 设有 n^2 个数 a_{ij} $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots n)$，把它们排成 n 行 n 列，记成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**，其中横排称为行，纵排称为列. 它表示所有可能取自不同的行不同的列的 n 个元素乘积的代数和，各项的符号是：当这一项中元素的行标按自然顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号. 用式子表示，就是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1.7)$$

(1.7) 式称为 n 阶行列式的**表达式**，其右端称为 n 阶行列式的**展开式**. a_{ij} (i，$j=1$，2，$\cdots n$) 称为行列式第 i 行第 j 列的元素. 行列式中从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**.

由于 n 个元素的全部 n 元排列共有 $n!$ 个，故 n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项，其中带正号的和带负号的各占一半.

当 $n=2$，3 时，(1.7) 式分别表示二、三阶行列式. 我们还规定，由一个元素 a 构成的一阶行列式 $|a|=a$.

例如，四阶行列式的展开式中共有 $4!=24$ 项，$-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 是其中的一项. 这是因为行标排列为 1 2 3 4，这 4 个数码互不相同，表示 a_{14}，a_{23}，a_{31}，a_{42} 取自不同的行，且分别取自第 1，2，3，4 行；列标排列为 4 3 1 2，表示 a_{14}，a_{23}，a_{31}，a_{42} 分别取自 4，3，1，2 列；逆序数 τ (4 3 1 2) $=5$，即 4 3 1 2 为奇排列，所以在乘积 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前冠以负号. 同理，$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 为四阶行列式的一项，但 $-a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 不是四阶行列式的项.

例 1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

解 根据定义，该行列式表示所有可能取自不同的行不同的列的 4 个元素乘积的代数和. 因为行列式中有许多元素为零，这表明在代数和中有许多项应等于零，我们只要把不为零的项求出来就行了. 显然，在一般项

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

中，只有当 $j_1=2$，$j_2=4$，$j_3=1$，$j=4=3$ 时，$a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} \neq 0$. 其他项中都含有零元素，因此它们都为零.

又因为 $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$ 的列标排列 2 4 1 3 的逆序数为 3，故该项前取负号，即取系数 $(-1)^3=-1$. 得 $D=-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$.

例 2 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

解 根据定义在 D 的一般项

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}.$$

中，因为行列式第 4 行除元素都 a_{44} 外，其他元素都是零，所以，只有当 $j_4=4$ 时，有乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{44}$；又因为第 3 行除元素 a_{33}，a_{34} 外，其他两个元素都是零，按定义要求每项的元素要取自不同的列，因此 j_3 不能取 4，而只能 $j_3=3$，故有乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{33}a_{44}$. 同理可知，$j_2$ 只能取 2，j_1 只能取 1，所以只有一项 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 不为零，其余各项都等于零，而且这一项的行标是自然顺序排列，列标构成的排列也是自然顺序排列，其逆序数为零，故该项前取正号，也就是乘以序数 $(-1)^{\tau(1234)}=(-1)^0=1$. 于是 $D=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$

我们把主对角线下方的元素全为零的行列式称为**上三角形行列式**，把主对角线上方的元素全为零的行列式称为**下三角形行列式**，上、下三角形行列式统称为三角形行列式. 由例 2 可知，四阶上三角形行列式的值等于其主对角线上各元素之乘积. 可以证明，这一结论对于任意阶上、下三角形行列式都是成立的. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

显然，对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是三角形行列式的特殊形式，因此，它的值也等于 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 由此可见，在计算一个高阶行列式 的值时，如果先把它化成三角形行列式，计算起来会更加简便.

由行列式定义不难得出，在一个行列式中若有一行（或一列）元素全为零，则此行列式必为零.

§1.3 行列式的性质与计算

我们已经知道，直接用定义去计算行列式的工作量是比较大的，计算一个 n 阶行列式的值，我们必须计算 $n!$ 项 n 个元素乘积的代数和. 例如，计算一个五阶行列式，就必须计算 $5! = 120$ 项，而且每一项又都是 5 个数字的乘积. 为此，我们必须寻求定义以外的计算行列式的方法. 学习了行列式的性质以后，就可以使我们达到这个目的，并为应用行列式奠定理论基础. 为此，我们在这一节学习行列式的性质.

将 n 阶行列式 D 的第 i 行作为第 i 列（$i=1, 2\cdots n$）所得到

的行列式，称为 D 的**转置行列式**，记作 D^T 或 D'. 即如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad 则\ D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1 将行列式 D 转置，则行列式不变，即 $D=D^T$.

本性质证明从略，仅以三阶行列式为例加以验证.

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23} \\ -a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=D.$$

这个性质说明，行列式中行与列的地位是相同的，所以，凡对行成立的性质，对列也同样成立.

性质 2 将行列式任意两行（列）互换，行列式反号.

对于二阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 而言，交换相邻两行后得到 $D^*=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$，显然

$$D^*=a_{21}a_{12}-a_{22}a_{11}=-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=-D.$$

推论 如果行列式中有两行（列）对应元素相等（又称此两行（列）相同），则 $D=0$.

事实上，将 D 中相同两行互换以后，其结果仍然是 D. 但根据性质 2，经交换两行后的行列式应为 $-D$. 因此有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 3 用数 K 乘行列式 D 的某一行(列)，等于用数 K 乘整个行列式. 即，如果设 $D=|a_{ij}|$，则

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=K\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=KD.$$

证 因为行列式 D_1 的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$
$$=K[(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}].$$

上面等号右端括号内是 D 的一般项，所以 $D_1=KD$.

性质 3 也可以叙述为，行列式中任一行（列）的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 若行列式中有两行（列）对应元素成比例，则此行列式为零.

由性质 3 可将行列式中这两行（列）的比例系数提到行列式外面，则余下的行列式有两行（列）对应元素相等，由性质 2 的推论可知此行列式等于零，所以原行列式等于零.

性质 4 如果将行列式 D 中的某一行（列）的每一元素都写成两个数的和，现设第 i 行的元素

$$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij},(j=1,2,\cdots n)$$

则此行列式可以写成两个行列式的和，这两个行列式的第 i 行的元素分别是 b_{i1}，$b_{i2}\cdots b_{in}$和 c_{i1}，$c_{i2}\cdots$，c_{in}，其他各行的元素与 D 相同. 即如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$