DAVID CHILLINGWORTH

王明淑　罗定军 译　杨信安 校

应用观点下的微分拓扑

高等教育出版社

应用观点下的微分拓扑

[英] David Chillingworth 著

王明淑　罗定军 译

杨信安 校

高等教育出版社

应用观点下的微分拓扑

[英] David Chillingworth 著

王明淑 罗定军 译

杨信安 校

*

高等教育出版社 出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.25 字数 173,000

1989 年 4 月第 1 版 1989 年11月第 1 次印刷

印数 0001—1 630

ISBN 7-04-000244-2/O·277

定价 2.50 元

出版前言

本书根据 Pitman Publishing 1976 年出版的 D. R. J. Chillingworth 所著 'Differential topology with a view to applications' 译出. 此书介绍了拓扑、微分拓扑及微分流形等方面的基础知识，作为一个重要应用特别描述了动力系统理论的研究内容与方法. 它可作为高等学校数学系高年级学生、研究生及教师的教学参考书，也可作为许多应用学科领域的广大师生、研究人员的有益的读物.

引　言

由于微分拓扑的术语和方法在实际问题中的应用日益增广，物理、生物和社会科学等方面的许多研究人员都渴望学习这一领域的某些内容，但由于缺乏既不太偏重于纯理论、水平又不太高深的自成体系的书籍而受到了挫折．很少人有时间和精力去从事他们自身以外的领域的系统研究，因此写这本书的目的是希望使微分拓扑成为应用科学家们的易于接受的工具．在某些研究生致力于某一方面的较透彻的研究以前本书也可作为他们进入这一主题的入门响导．这本书阅读起来也许比教科书更具有小说的风格(有一兀长的结尾)．

特定的目标是研究**动力系统的大范围定性性态**，虽然其中还有一些次要和偏离主题的内容．动力系统是跟随时间而演化的某些体系(经济的、物理的、生物的等等)．给定一初始点，系统依照已知的或假定的规律在所允许的状态范围内运动，这些规律性：局部地用'无限小'的演化公式，即微分方程来描述．**大范围**理论则是关于由一切容许的初始状态作所有可能的演化以及这些状态彼此适应、相互联系的方式的理论．**定性**理论与研究恒定(平衡)状态、周期的和回归的性态以及长期性态的存在性有关，也涉及到系统的局部与全局稳定性问题．主要起源于 H. Poincaré(1854—1912)的研究工作的大范围定性方法是很重要的，这一方面由于精确数量的理论解一般说是得不到的，另一方面也由于在任何情况下定性模式是可靠地写实的基础，没有它而进行机械计算是很危险的．

一个动力系统的自然的演化范围常常是一**微分流形**；演化本

身则是流形上的流，而描述无限小演化的微分方程则成为定义于流形上的向量场. 本书的前三章就涉及这些术语的定义与解释，第四章详细讨论流形上的流的定性理论，作为该章的结尾，介绍一点分枝理论. 此外还有关于集合论中的基本术语与记号的一个附录.

当然还有一些内容应包括进去或须进一步扩充，但那样将可使这本书的篇幅增加一倍. 微分形式几乎没有提到，奇点理论只接触到一点点，微分方程的一般分枝理论中引人入胜的部分，包括中心流形定理(微分拓扑的少数几个实际应用之一)则大部分没有涉及到. 欲知这些内容的读者可查阅所附的参考文献.

所须的预备知识保持在最低限度. 要用到的拓扑与线代数概念大部分从基本原理讲起，因此基本要求只要熟悉初等微积分中导数与偏导数的内容——尽管本书也给出这些内容. 例外的是复数，我们假定它是有数学修养的科学家所熟知的，而矩阵的行列式与特征值这些内容有些人可能不够熟悉，但对另一些人则是一种常识了. 对于这种逻辑上的不一致性，我只能以限于篇幅来辨解，从而划定以下原则：我觉得对于在其上可以建立其它结构的线性空间细致地讨论有关它的一些基本概念，这比描述那些已为许多人熟悉且在任何情况下都是很易掌握的计算技巧要重要得多. 在前三章中复数主要是在例子中阐述，但在第四章中它们作为特征值时则成为主要角色了.

作为动力系统定性理论的全面的参考文献，现推荐 Smale 的当代历史上著名的综述性文章[125]以及随后 Markus 的很值得一读的讲义[73]. Arnold 的[11]及 Hirsch 与 Smale 所著的[55]这两本微分方程的优秀读本都是针对流形上的流的定性理论而写的. 关于微分拓扑基础知识新近而又吸引人的，有 Guillemin 与 Pollack 的书[48]以及即将出版的 Hirsch 的书[52]*. 在流体力

* 注：译者极力推荐.

学与相对论的应用方面引人入胜而获得高度评价的有 Marsden Ebin 和 Fisher 的文章[75](也见同一论文集中 Stamm 的微分拓扑引论一文).

这本书的基础是1973/74年间在南安普敦大学对纯粹和应用数学、工程、物理与经济学方面的各种听众的一系列授课讲义. 经过一些同事的鼓励我把这些讲义扩展整理成一本书. 感谢这些同事以及帮助评注和校订的人. 我要特别感谢和北威尔斯(Bangor)大学的 Peter Stefan, 他们仔细地阅读了原稿并提出了许多详细的改进意见, 由于这些帮助使我免去不少错误. 我也感谢 U. Masco 教授和 N. Kuiper 教授分别在罗马大学数学研究所和法国高等研究院的殷勤接待, 在那儿访问时我写了许多笔记. 感谢 Pitman 出版社重视此书, 及在出版工作中的耐心细致. 感谢我的妻子 Ann 的耐心帮助, 特别也感谢 C. Saint 和 J. Medley 花许多时间精心打字. 最后还要感谢 L. Lander 为本书绘图, 并在短期内出色地完成.

D. Chillingworth
1976年8月于南安普敦(英国)

感谢 M. Irwin, M. Mostow 和我父亲 H. R. Chillingworth 诚恳地指出印刷中的错误以使我在二版时能加以纠正. 也借此机会提醒读者对附录的注意, 它阐述了集合论的术语、记号, 这在正文中已未加解释地加以应用了.

D. R. J. C. 1977年5月

目　录

第一章　基本拓扑概念

1.1　函数概念

通常用图象来描绘单个实变量的实值函数.

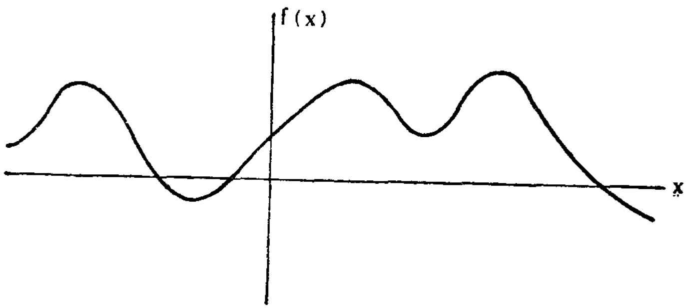

图　1

对给定的数 x(即 $x\in R$) 函数 f 确定另一实数 $f(x)$. 其图象是由坐标平面上满足 $y=f(x)$ 的所有点 (x, y) 组成的，或表为如下形式

$$\operatorname{graph}(f)=\{(x, y)\in R\times R \mid y=f(x)\}.$$

函数的另一种'图形'如下(但比上述图象用处少些):

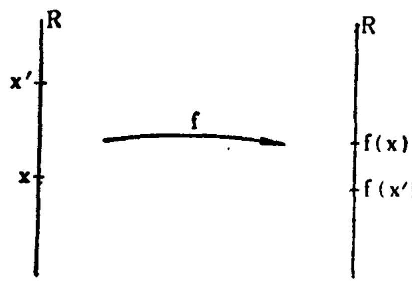

图　2

两个实变量 (x_1, x_2) 的实值函数 f 的图象可看成是一幅图形，它以 (x_1, x_2) 为'水平'平面上的坐标，$f(x_1, x_2)$ 为'铅直'坐标. 用

式子来表示，即$(x_1, x_2)\in R\times R=R^2$, $f(x_1, x_2)\in R$ 且

$$\text{graph}(f)=\{((x_1, x_2), y)\in R^2\times R=R^3 | y=f(x_1, x_2)\}.$$

换句话说，可用‘源与目标’的图形描绘如下：

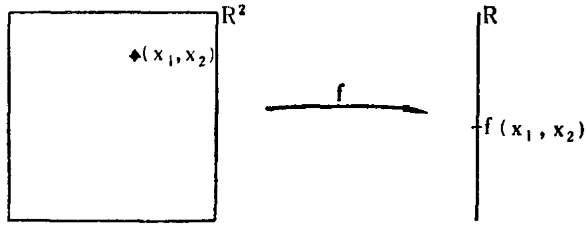

图 3

现设有两个实变量(x_1, x_2)的两个函数f_1, f_2, 可把两者结合起来考虑写成：

$$f(x_1, x_2)=(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))\in R\times R=R^2,$$

从而得到 R^2 到 R^2 的函数 f.

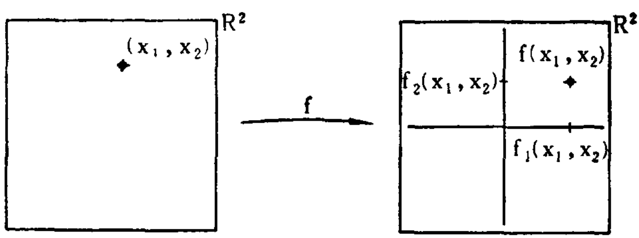

图 4

这时图象就难以在通常的三维空间里描绘了，因为依先前的定义类推有

$$\text{graph}(f)=\{((x_1, x_2), (y_1, y_2))\in R^2\times R^2 | y_i =f_i(x_1, x_2), i=1, 2\},$$

故图象成为 $R^2\times R^2=R^4$ 内的一个子集了.

同理，如给出 n 个变量的 k 个函数，将它们结合起来考虑可得

到从 R^n 到 R^k 的一个对应函数. 记 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 令 $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x))$, 并考虑到图形:

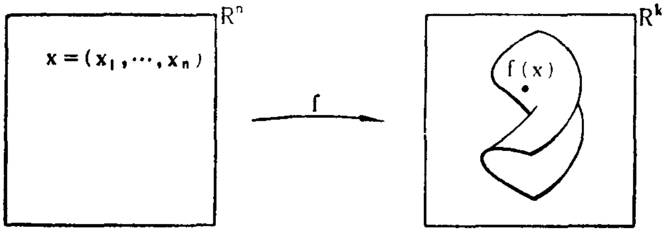

图 5

用式子来表达, 可写成 $f: R^n \to R^k$. f 的图象为 $R^n \times R^k = R^{n+k}$ 的子集, 它是难以描绘的, 且一般来说, 它不能提供由图 5 通过考察 f 使 R^n 在 R^k 中产生折迭与扭曲的方式所得到的关于 f 性态的更多直观信息. 分析这种'折迭与扭曲'的方法是将拓扑与微积分相结合的方法, 或称为**微分拓扑**. 从而已可看出, 研究了微分拓扑就可更有效地洞察一般情形与特殊情形下 n 个变量的 k 个函数间相互作用的方式. 前两章的主要目标就是阐述这些基本方法.

注

1. 常常须要考察这样的函数, 它们并非对变量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的所有值有定义, 而只是对 R^n 的某一子集 U 中的 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 有定义. 这时自然就记为

$$f: U \to R^k$$

2. '**函数**'一词通常仅指**实值函数**, 即具有形式

$$f: (\text{某集合}) \to R.$$

在其它情形(即对 $f: U \to R^k$, $k>1$)我们倾向于用**映射**一词来表示.

1.2 连续性

粗略地说，如给输入(即自变量)一个微小扰动，仅得到输出(即因变量)的微小变化，则称此映射为连续. 显然这是一个很含糊的定义. 例如由 $g(x)=10^{23}x$ 所定义的函数 $g: R\to R$ 是连续的(实际上它的图象是一直线)，但可以看出 x 的微小变化却能引起 $g(x)$ 的很大的变化. 函数 $f: R\to R$ 的连续性的精确定义如下:

(*a*) **在点 x_0 处的连续性.** 称具有下述性质的函数 f 在点 x_0 是连续的，即: 如对给定的任意正数 ε（认为是输出所容许的误差范围)，总可找到另一正数 δ，使得 x_0 的扰动小于 δ 时引起 $f(x_0)$ 的变化小于 ε. 或用符号表示为:

当 $|x-x_0|<\delta$ 时必有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

(*b*) **连续性** 设 f 在 R 的某个子集 U 上有定义，假如 f 在 U 上每一点 x_0 处连续，则称 f 在 U 上连续. 如果 U 是整个 R 或从上下文来看 U 是很了然的情形，则简称 f 是连续的.

注意上例中的函数 g 是连续的，因为对任何 x_0 与任意 ε，可取 $\delta=10^{-23}\varepsilon$.

注

1. 人们可能很想将(*a*)，(*b*)合并而(希望)称: f 在 U 上连续，假如任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使对 U 上所有 x, y，只要 $|x-y|<\delta$ 时就有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 但这和先前的定义不一样了. 例如由 $f(x)=x^2$ 所定义的函数 f: $R\to R$，它依(*a*)，(*b*)都是连续的，但它不满足所'希望'的定义. 关键在于连续性的真正定义中，应允许 δ 依赖于 x_0(当然也依赖于 ε)，如果不是这样，而要求同一个 δ 处处都适用(对给定的 ε)，则得出的是一致连续性，事实上它在用一些函数逼近已给函数的领域中，例如在某些数值分析的方法中是一个很重要的概念.

2. 易于证明，所有‘标准的’函数，如多项式、指数函数、$\sin x$ 等等，在有定义的范围内都是连续的．而在把这些函数任意组合时，仅当用作除式的函数在某点处为零时，连续性才会遭到破坏．

易见，只须在 R^n 或 R^k 中用从原点量起的欧氏距离来代替模，就可给出函数 $f: R^n \to R^k$ 的连续性的定义(见下面例 3)．而在输入与输出比数或 n 元数组更为复杂的场合，例如它们可以是微分方程或函数集，就须研究‘输入的微小变化引起输出微小变化，的问题，因此须要推广连续性的定义，使得它适用于映射 $f: A \to B$，其中 A, B 是异于 R^n 或 R^n 的子集的集，为此必须在集 A, B 中引进距离的概念，有了它就可简单地说：

(a) $f: A \to B$ 在 $x_0 \in A$ 连续，如果给定 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得当 x 到 x_0 的距离(在 A 内的)小于 δ 时，则 $f(x)$ 到 $f(x_0)$ 的距离(在 B 内的)就小于 ε；

(b) $f: A \to B$ 是连续的，如果它在 A 内每一点连续．为了充分反映出欧氏空间距离的基本关系，在集合 S 上一个‘距离函数，d 所须具备的最少性质为：

(1) $d(s, s') \geqslant 0$ 当且仅当 $s = s'$ 时等号才成立；

(2) 对 S 中所有 s, s' 有 $d(s, s') = d(s', s)$．

(3) 对 S 中所有的 s、s' 与 s'' 有

$$d(s, s'') \leqslant d(s, s') + d(s', s'').$$

(最后的关系式即为熟知的三角不等式)满足(1)、(2)与(3)的函数称为度量．

定义 满足上述性质 (1)、(2) 与 (3) 的函数 d 称为 S 上的一个度量．集 S 连同它的一个特定度量称为度量空间．

注意，实际上 d 是 $S \times S$ 到 R 的一个函数，并非 S 上的一个函数．d 的像包含在非负实数集 R_0^+ 内(由(1))，故可写为 $d: S \times S$

$\to R_0^+$.

度量空间的例

1. $S=R$, $d(x, y)=|x-y|$(范例)

2. $S=R^2$, $d(x, y)=[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2]^{\frac{1}{2}}$.

3. $S=R^n$, $d(x, y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

例 1 和 2 是例 3 的特殊情形，且均为熟知的 R^n 内的欧氏度量或通常度量.

4. $S=\{$有界函数 f: $[a, b]\to R\}$, $d(f, g)=\sup\limits_{a<x<b}|f(x)-g(x)|$.

5. $S=\{$具有界导数的可微函数 f: $[a, b]\to R\}$,

$$d(f,g)=\sup_{a<x<b}|f(x)-g(x)|+\sup_{a<x<b}|f'(x)-g'(x)|.$$

例 4 和 5 是函数空间的简单例子，即空间的元素本身是定义在其它空间上的函数或映射. 例 6 也是函数空间的一种类型.

6. $S=\{$定义在 R^2 上的微分方程组

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=f_1(x_1, x_2)\\ \dot{x}_2&=f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\quad (F)$$

其中 f_1, f_2 是有界连续函数$\}$,

$$d(F, G)=\sup_{(x_1,x_2)\in R^2}[(f_1(x_1, x_2)-g_1(x_1, x_2))^2+(f_2(x_1, x_2)-g_2(x_1, x_2))^2]^{\frac{1}{2}}, ^{*)}$$

其中 F, G 分别由相应的 f, g 所确定.

下面是两类重要的例子.

7. 令 S 是任一集，T 是 S 的一个子集. 设 S 具有度量 d，则由 d 自然地导出 T 的一个度量，称为诱导度量. 形式地如果我们记 d: $S\times S\to R_0^+$，则诱导度量就是限制 $d|T\times T$.

*) 译者注：原书此处用|　|改为[　]较妥。

8. 令 S 为任一集，且 d 定义为

$$\left.\begin{array}{l} d(x, x)=0, \text{ 对所有 } x\in S \\ d(x, y)=1, \text{ 对任何 } x\neq y. \end{array}\right\}$$

容易验证，d 满足距离的法则(1)，(2)，(3)．通常称为 S 上的**离散度量**．注意并未假设 S 是有限集．

现可在度量空间的范围内给出连续性的精确定义如下：

定义 设 A, B 是度量空间，分别具有度量 d_A, d_B，且 f: $A\to B$ 为一映射．

(a) 称 f 在 $x_0\in A$ 处连续，假如对给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得 $d_A(x, x_0)<\delta$ 时有 $d_B(f(x), f(x_0))<\varepsilon$.

(b) 称 f 是连续的，假如它在每一点 $x_0\in A$ 处是连续的．

1.3 更一般观点下的连续性

关于度量空间之间的映射的连续性，已经给出的定义自然依赖于特殊度量的选择，而另一方面，一个给定映射的连续与否又不能太严格地依赖于度量的精确选择，因为如果用某些无害的方法变动度量，例如用常数因子乘所有距离（对应于测量单位的改变）显然是不要紧的．为了进一步研究连续性及其对度量的特殊选择的独立性，必然导致拓扑的概念．

现重新考虑连续性的定义．在具有度量 d 的度量空间 S 内任给一点 x，以 $B_\alpha(x)$ 表示 S 内与 x 距离小于 α 的所有点的集合，即

$$B_\alpha(x)=\{x'\in S\,|\,d(x, x')<\alpha\}.$$

类似于 3 维欧氏空间的情形，称 $B_\alpha(x)$ 是围绕 x 的开 α-球．前已定义两个度量空间 A, B（已知其度量）之间的映射 f: $A\to B$ 在 $x_0\in A$ 为连续的，当且仅当给定 $\varepsilon>0$ 时，存在 $\delta>0$，使得

$$f(B_\delta(x_0))\subset B_\varepsilon(y_0), \qquad (*)$$

其中 $y_0=f(x_0)\in B$．(*)可改写为

$$B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(y_0)),$$

这说明一个事实，即不仅 x_0 在 $f^{-1}(B_\varepsilon(y_0))$ 内（由于 $f(x_0)=y_0$，因此是显然的），且围绕 x_0 的整个 δ-球也在 A 的子集 $f^{-1}(B_\varepsilon(y_0))$ 内．见图 6.

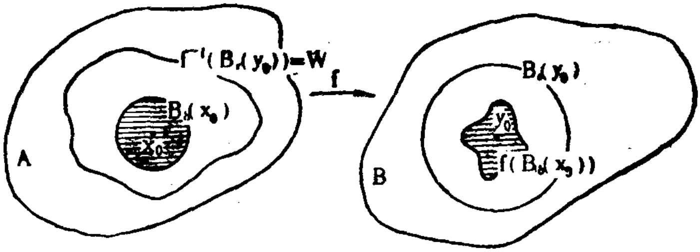

图 6

进一步考察集合 $f^{-1}(B_\varepsilon(y_0))$，将它记为 W，取 W 内另一点 $x_1 \neq x_0$，假设 f 在 x_1 也连续，则可找到围绕 x_1 的某个 δ'-球整个包含在 W 内．这一点的证明是很简单的：只须指出对某个 δ' 有 $f(B_{\delta'}(x_1)) \subset B_\varepsilon(y_0)$。令 $f(x_1)=y_1$．因为 $x_1 \in W$ 故有 $y_1 \in B_\varepsilon(y_0)$，因而 $d(y_1, y_0)<\varepsilon$．取 $\varepsilon'=\varepsilon-d(y_1, y_0)$，并选 $\delta'>0$，使得 $f(B_{\delta'}(x_1)) \subset B_{\varepsilon'}(y_1)$，由于 f 在 x_1 连续，这个 δ' 是存在的．由三角不等式立刻可得 $B_{\varepsilon'}(y_1) \subset B_\varepsilon(y_0)$．这就完成了证明．因此，如果 f 是处处连续的，则 W 具有以下性质：在 W 内任意给定点 x，存在某一 $\delta>0$，使得球 $B_\delta(x)$ 包含在 W 内．由此导致一般的定义：

定义 设 S 为一度量空间，W 为 S 的子集，如果在 W 内任意给定 x，存在某一 $\delta>0$，使得 $B_\delta(x)$ 包含在 W 内，则称 W 为开集．

例如，区间 $\{x|2<x<3\}$ 是实轴 R 上的一个开集，而区间 $\{x|2<x\leqslant 3\}$ 则不是（因为 $x=3$ 不在含于此区间的任何 δ-球内）．注意，线段 $\{(x, y)|2<x<3, y=0\}$ 在 R^2 内不是开集，因为每一个