SMP 英国中学数学教科书

Y册

英国中学数学教科书

SMP

Y 册

上海师范大学数学系翻译组译

上 海 教 育 出 版 社

The School Mathematics Project

Book Y

Cambridge University Press

英国中学数学教科书

SMP

Y 册

上海师范大学数学系翻译组译

上海教育出版社出版
(上 海 永 福 路 123 号)
新华书店上海发行所发行　上海新华印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 8.75　字数 191,000
1978 年 9 月第 1 版　1978 年 9 月第 1 次印刷
统一书号：7150·1891　　定价：0.69 元
内 部 发 行

序

这是 X、Y、Z 三册中的第二册. 这三册书是为学完A到H册后准备参加普通水平考试的学生编写的, 内容和G册衔接, 包含准备参加"SMP 数学"普通水平考试的最后一部分课程. 这三册书也适用于正在进行一年普通水平复习课程的学生和已参加过 CSE 考试的学生.

在A到G各册中介绍过的许多问题在 X、Y、Z 三册中进一步得到引伸, 而且有些新问题也在这里作了介绍. Z 册还包含有关于整个普通水平课程的复习章节.

本册第一章对变化率进行了几何的和代数的探讨. 这种两重探讨的方法在"联立方程"和"二次函数"两章中也用到. "坐标"这一章引伸了X册中三维问题的内容, 并且复习了极坐标. 在"找逆元素"、"数集"和"找函数"这几章中, 在一定深度上涉及到了代数结构. "计算尺"这一章中介绍了一个检验有序集之间比例关系的方法, 这个方法在"找函数"一章中也被应用.

"平面图和立视图"与"线性规划"这两章达到了教学大纲对这些内容的全部要求, 而"正切"这一章则为普通水平提供了所需要的三角知识.

在"再谈面积和体积"一章中建立了四面体的体积公式, 并且它被用来导出其他一些立体的体积.

本册中有三章插曲: "关联矩阵"、"圆的一些性质"与"单位和量纲". 它们必须看作是本课程的有机组成部分.

目　　录

1. 变化率

1. 事物变化的方式

(a) 当一根金属棒受热时，它就会膨胀，以致它的长度增加. 图 1 中的箭头图表示一次实验的结果. 在这个实验中，对于不同温度测定了金属棒的长度.

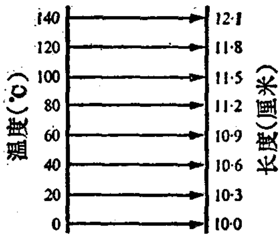


图 1

假定这根金属棒由 40°C加热到 100°C，从图 1 查得相应的长度变化是 0.9 厘米.

我们说，长度关于温度的变化率是

$$\frac{11.5-10.6}{100-40}=\frac{0.9}{60}=0.015\text{ 厘米/°C}.$$

注意，变化率是有单位的，在这种情况下，它的单位是厘米/°C.

(b) 假定我们把这根棒从 20°C 加热到 40°C. 在这个区间上，长度关于温度的变化率是多少？在你自己另外选择的几个区间上求变化率. 你注意到些什么？

(c) 如果我们把图 1 表示的关系画成图象，就得到如图

2 所示的直线.

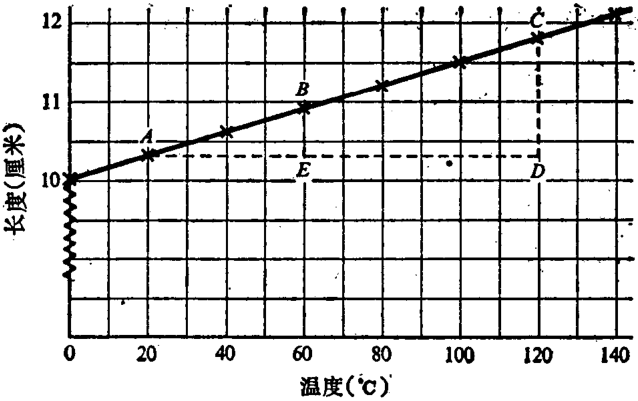


图 2

继续考虑长度关于温度的变化率.

在图 2 中,距离 AE 表示温度变化了 40℃,而 BE 则表示长度变化了 0.6 厘米. 因此,在这个区间上,变化率可用$\frac{BE}{AE}$来度量.

现在看三角形 ACD. 此时变化率可以用$\frac{CD}{AD}$来度量.

关于三角形 ABE 和 ACD,你能说些什么?

你是否同意$\frac{BE}{AE}=\frac{CD}{AD}$?

这两个区间上的变化率相等. 如果再选取一个不同的区间,你将得到相同的变化率吗?

(d) 你应从(b)和(c)中发现: 长度关于温度的变化率是一个常数,且等于 0.015 厘米/℃.

如果一个关系的图象是一条直线,那末,其中一个量关于

另一个量的变化率一定是常数.

练习 A

1.

x	0	2	4	6	8
y	1	7	13	19	25

在下列三个区间上，求出 y 关于 x 的变化率:

(i) $x=0$ 到 $x=6$; (ii) $x=2$ 到 $x=4$; (iii) $x=4$ 到 $x=8$.

2.

x	-3	0	3	6	9
y	-4	1	6	11	16

在下列三个区间上，求出 y 关于 x 的变化率:

(i) $x=-3$ 到 $x=3$; (ii) $x=0$ 到 $x=6$;

(iii) $x=3$ 到 $x=9$.

3. 一辆汽车在不同时刻驶离出发点的距离如下表所示. 在你自行选取的三个区间上，求出距离关于时间的变化率. 画出距离对时间的图形.

时间(秒)	0	5	10	15	20	25	30
距离(米)	0	$7\frac{1}{2}$	15	$22\frac{1}{2}$	30	$37\frac{1}{2}$	45

4. 测量受热的油在各个不同时刻的温度，其结果如下表所示.

时间(秒)	0	10	20	30	40	50	60
温度(℃)	10	12.1	14.3	16	17.7	19.2	20

求出温度关于时间在三个区间上的变化率，并讨论你所得的结果.

5. 某工程公司对一些螺栓进行试验，看它们在给定的负载下伸长了多少. 下表列出了一次特定试验的结果.

负载(牛顿)	0	8	16	24	42
长度(毫米)	500	502.5	505	507.5	510

在你自己选取的三个区间上，求出长度关于负载的变化率．画出这个表的图象，以验证变化率在整个范围内是一个常数．

6．(a)

x	0	1	2	3	4	5
y	1	3	5	7	9	11

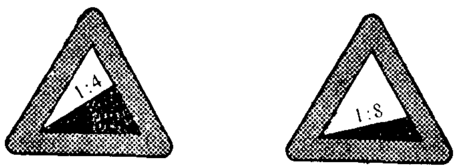
计算 y 关于 x 的变化率，并画出图象．

(b) 对下表重复(a)的要求：

x	0	1	2	3	4	5
y	9.5	8	6.5	5	3.5	2

上面两个表的图象区别在哪里？这个区别在变化率上是怎样反映的？

2．斜率



(a) (b)

图 3

(a) 图 3 中的两个路标告诉你什么？哪一座小山更陡些？

我们说，图 3(a)表示的小山的斜率是 1 比 4，这就是说，在水平方向上每隔 4 米，道路就升高 1 米．

对一条每走 500 米升高 100 米的公路来说，路标应怎样标记？

斜率用来度量一条道路的陡度，它是驱车上山时垂直上升的距离对相应走过的水平距离之比.

(b) 在图 4 中从 A 走到 B 时垂直上升的距离是多少？走过的水平距离是多少？写出这个斜率，并用最简单的形式表示它。

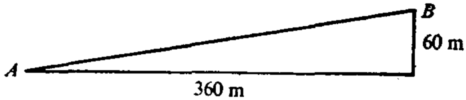


图 4

(c) 观察图 5 中三条直线的图象.

假定我们想要测量图 5(a)中这条直线的斜率.

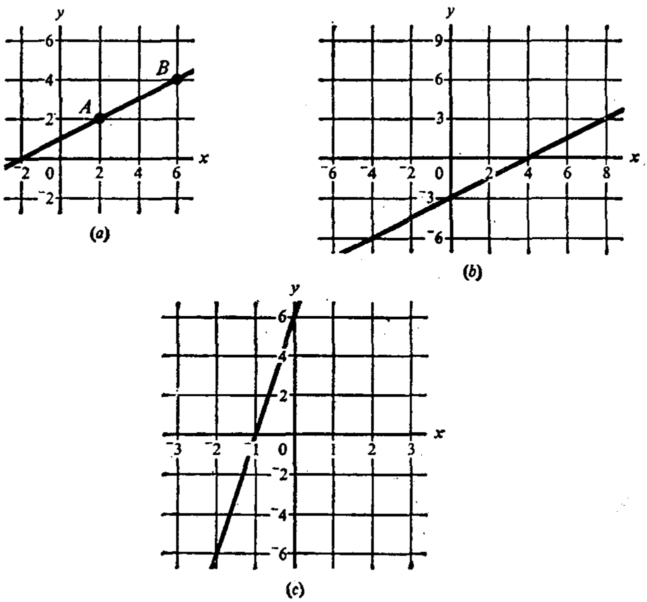


图 5

从A到B的水平距离是多少?

从A到B的垂直距离是多少?

你是否同意这条直线的斜率是1比2?

直线的斜率通常写成分数形式,因此,我们可以把这条直线的斜率写成$\frac{1}{2}$.

现在来求图5(b)和(c)中两条直线的斜率,并用分数形式给出你的答案.

(d) 考察图6所示的图象. 从A到B的水平距离是-2,垂直距离是4.

因此,这条直线的斜率是$\frac{4}{-2}=-2$.

图6中这条直线的斜率和图5中三条直线的斜率有什么区别?这个区别怎样表现在斜率的数值上?

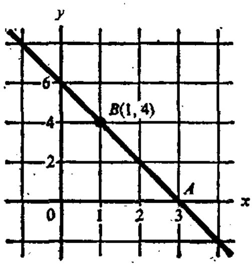


图 6

3. 斜率和变化率

考虑下面的关系:

距离(米)	0	3	6	9
时间(秒)	0	1	2	3

当时间区间为1秒到3秒时，距离关于时间的变化率是多少？

画出这个关系的图象.

这个图象的斜率是多少？

直线的斜率和变化率之间有什么联系？

上面表明，一个关系的变化率是它的图象的斜率加上适当的单位.

小结

1. 直线的斜率是垂直位移与相应的水平位移之比.

2. 如果一条直线和 x 轴正向的夹角大于 90°，那末这条直线的斜率为负值.

3. 一个关系的变化率等于它的图象的斜率加上适当的单位.

练习 B

1. 分别画出斜率为(a)2；(b)$\frac{3}{5}$；(c)$-\frac{1}{4}$；(d)0 的直线的图象.

2. 写出连结下列各对点的直线的斜率，并用草图来验证你的答案.

(a) $(3,1)$和$(-1,-2)$；　(b) $(1,-1)$和$(3,1)$；

(c) $(-4,-3)$和$(-2,5)$；　(d) $(4,1)$和$(2,5)$；

(e) $(4,1)$和$(0,6)$；　(f) $(3,-2)$和$(-2,3)$；

(g) $(6,-5)$和$(0,0)$；　(h) $(-1,-2)$和$(-6,8)$；

(i) $(4,2)$和$(6,2)$；　(j) $(4,2)$和$(4,8)$.

3.

x	0	3	5	8	9
y	10	14	$16\frac{2}{3}$	$20\frac{2}{3}$	22

(i) 求出 y 关于 x 的变化率；

(ii) 画出这个关系的图象，并求出它的斜率.

4. 对下列每一个表，重复问题 3 的要求：

(a)

x	-2	0	1	3	6
y	6	5	$4\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	2

(b)

x	-2	-1	1	5
y	7	$4\frac{2}{3}$	0	$-9\frac{1}{3}$

5. 对下列每一个表，重复问题 3 的要求：

(a)

长度(厘米)	10	25	30	40
质量(克)	7	$17\frac{1}{2}$	21	28

(b)

原价(镑)	10	15	20	25
售价(镑)	12	18	24	30

(c)

长度(厘米)	1	2	3	4
面积(厘米)^2	0.5	2	4.5	8

4. 代数函数的斜率

(a) 考虑如图 7 所示的 $f: x \to 2x+5$ 图象的斜率.

求出 $f(4)$ 和 $f(6)$.

你是得到 13 和 17 吗?

你能否说明，为什么这条直线的斜率是 $\frac{17-13}{6-4}=\frac{4}{2}=2$?

用这样的方法求出下列各函数的图象的斜率：

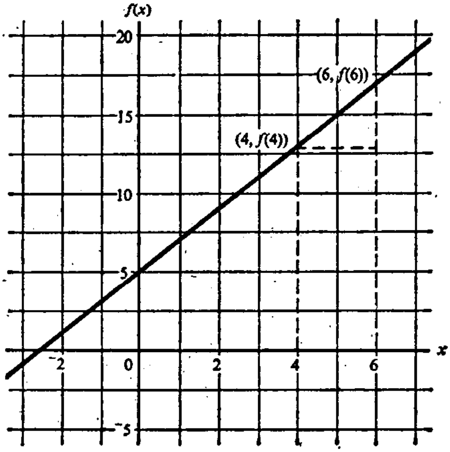


图 7

(i) $f: x \to \frac{1}{2}x + 1$;

(ii) $f: x \to 3x - 2$;

(iii) $f: x \to 2x + 3$.

你注意到什么？再求出一些同样类型的函数的斜率．它们能证实你的发现吗？

你一定已经发现，形如 $f: x \to mx + c$ 的函数具有斜率 m．我们说，m 是 $mx+c$ 中 x 的系数．(i)，(ii)，(iii) 中的斜率分别是 $\frac{1}{2}$，3 和 -2．

(b) 图 8 表示线性函数 $f: x \to f(x)$ 的图象．

如果 $OD = a$，那末 $AD = f(a)$．

如果 $OE = b$，那末 $BE = f(b)$．

BC 的长是什么？AC 的长是什么？

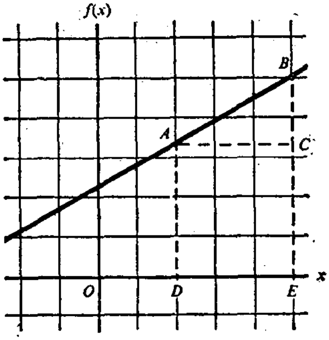


图 8

直线的斜率是$\frac{BC}{AC}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

因为一个关系的变化率是用其图象的斜率来度量的，所以我们可以说，$f(x)$ 关于 x 的变化率也是$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

注意：这里 x 和$f(x)$都是数，因而这个表达式只是一个比，而不带有任何单位. 但是，譬如说，这里 x 代表以秒为单位的时间，$f(x)$代表以米为单位的距离，那末这个表达式就是一个速率，它的单位米/秒，是必须加以说明的.

(c) 下表是由形如 $y=mx+c$ 的方程给出的几组值：

x	1	2	3	4	5
y	5	7	9	11	13

y 关于 x 的变化率是多少？

你是否同意这个关系的图象的斜率是 2？

因此我们现在能写出 $y=2x+c$.

又当 $x=1$ 时，$y=5$，所以我们能求出 c 的值.

你是否同意 $y=2x+3$？

练习 C

1. 画出表示函数 $f: x \to 3x+1$ 的图象，并求出它的斜率。

2. 计算直线 $y=1+\frac{3}{4}x$ 的斜率.

3. 写出下列各函数的斜率：

   (a) $x \to 3x+4$;　　(b) $z \to 2+5z$;

   (c) $x \to 3-8x$;　　(d) $t \to \frac{2}{3}t-7$.

4. 写出下列各直线的斜率：

   (a) $y=4x-3$;　　(b) $2y=3x+4$;

   (c) $\frac{1}{3}y=3-\frac{1}{3}x$;　　(d) $\frac{3}{4}y=7x-1$.

5. 对下列各表，把 y 表示成形如 $y=mx+c$ 的 x 的函数：

(a)

x	1	2	3	4
y	2	8	14	20

(b)

x	-5	-3	-1	1
y	0	-4	-8	-12

(c)

x	6	12	18	24
y	5	9	13	17

6. 下表给出了一段金属丝在挂有不同质量时的长度：

质量 m(公斤)	5	10	20	25
长度 l(厘米)	51.5	53	56	57.5

把 l 表示成形如 $l=am+b$ 的函数. 用你的表达式来求出(a)当 $m=28$ 时 l 的值和(b)金属丝在没有形变时的长度(这就是，当 $m=0$ 时 l 的值).