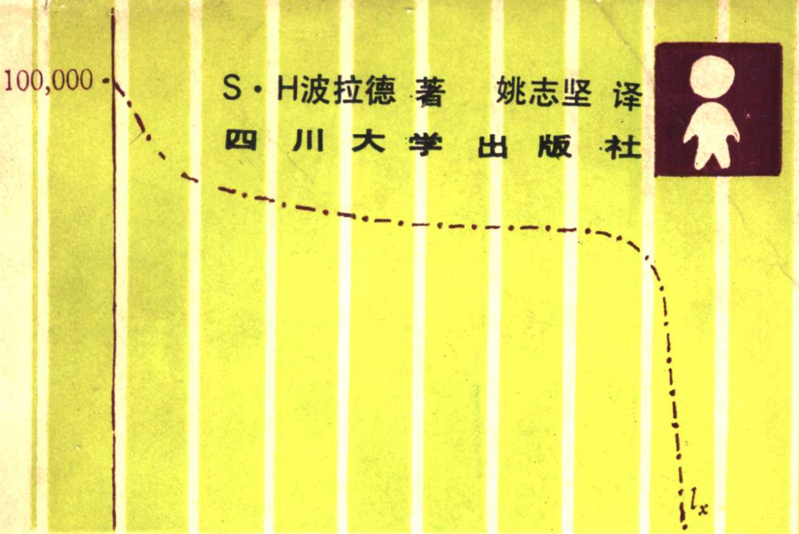
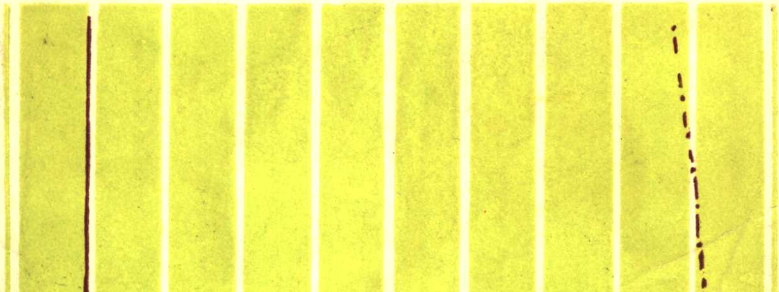


S·H波拉德 著　姚志坚 译

四 川 大 学 出 版 社

人口增长的数学模型



人口增长的数学模型

[美] J.H.波拉德 著

姚志坚 译

四川大学出版社

1988·成都

内 容 简 介

本书系人口数学的经典名著。全书内容广泛，涉及十七世纪以来至二十世纪七十年代中期各种人口学的数学问题，共十一章，除首章导论及末章结论外，从生命表，生命表函数及多重减量表的论述到用大量篇幅讨论各种不同的数学模型（多数较复杂的模型来源于近年各国杂志的论文），重点讨论随机模型。

本书除讨论人口问题外，还研究了动物群体在各种不同条件下繁殖及死亡概率，包括最终灭绝概率；特别讨论了分层模型。

本书可作为人口统计专业，概率及统计专业，以及有关统计专业研究生的教材，也可作有关统计研究人员，生物、医学研究人员的参考。

J.H.Pollard
MATHEMATICAL MODELS FOR THE GROWTH OF HUMAN POPULATIONS
Cambridge University Press, 1975

人口增长的数学模型
[英] J.H.波拉德 著
姚志坚 译
责任编辑：马佑国
封面设计：李 玫
四川大学出版社出版（四川大学内）
四川省新华书店发行
百花潭中学印刷厂印刷
开本：787×1092毫米1/32 印张：9.43 字数：198千
1988年12月第一版 1988年12月第一次印刷
印数：0001—2000册
ISBN 7-5614-0104-3/O·21 定价：1.88元

原著者波拉德（J.H.Pollard）教授
为中译本序言

近几十年来中华人民共和国人口的变化曾引起全世界学者极大的兴趣和注视。特别显著的是，作为人口政策的直接结果，迅速地降低了出生率，并极大地下降了死亡率。在这个世界人口最多的国家从事的巨型工程——1982年人口普查取得了成功。这使人民共和国国内外对中国人口状况的关注也增高了。现在中国从事人口研究之学者的人数已是可观的了。

我很感荣幸的是，所著《人口增长的数学模型》一书已由姚志坚教授译成中文。我感谢他的工作。谨祝我的中国同事们在未来的研究和学术上取得好的成就。

波 拉 德 John Pollard

麦夸里大学（Macguare University），悉尼，澳大利亚，1988年4月。

译 者 的 话

1980年冬应我校人口研究所之约，根据英国剑桥大学出版社1975年版本，我开始翻译国际著名学者波拉德（J.H. Pollard）所著《人口增长的数学模型》一书。1981年人口研究所编印之《人口研究译文》第一期曾刊出译文的前二章，后因多种原因未能续行刊出。年前承我校数学系及人口研究所有关领导的关注，和四川大学出版社同仁的鼎力协助，使译本终于顺利出版，我在此谨表谢忱。

在中文译本出版之前，承波拉德教授和剑桥大学出版社的允诺，并蒙波拉德教授为译本写了序言，特此一并致谢。

限于水平，译文中错误及缺点在所难免，希广大读者批评指正。

姚志坚于四川大学桃林村

1988年5月

序　　言

本书讲述一些业经应用于研究人口增长的数学模型，并着重于随机模型，即依照概率定律变化的体系。其中少数模型已见述于其它教本，但许多较复杂的模型则仅见于各种杂志的原文中。1968年春季为芝加哥大学统计系研究生备课而编的讲义就是本书的初稿。先后又在芝加哥大学及麦考里大学取得经验，作了大量修改和增补，才写成最初的教本。

为了尽可能使本书达到自身完满的目的，所用数学技能尽力保持在基础水平。它们主要地是大学标准课程中的微积分，矩阵代数和基本统计学。在少数实例中需用某些较复杂的方法，或运用某些不为一般人所熟知的技能，书中均详予阐释。本题目中一个重要方面，即生命表上的数值估计，未加讨论（除了边缘上的）。书中常应用各种专门的实际技能，而数值方法则在其它有关地方予以描述。

首先，我们拟将此书作为人口统计研究工作者的参考著作，但当大学最后一年的数学班或人口统计研究生具有坚强的数学根底时，也可作为他们的教本。

某些节上加了星号，表示它们所含材料对以后各章的了解并非需要，从而可以省略，至少初读时可予漏掉。每章之末给有习题，在求解这些问题时，学生应熟练掌握所含各基本数学模型。各习题的解答要点附于按章、节参考文献之后。

本题目之历史的片断见于此教本本文，并引述了某些有

趣的历史参考文献。参考文献载于本书正文之后。

我将感谢内森·凯菲茨（Nathan Keyfitz），1967年他邀请我到芝加哥大学，并予我鼓励。我感激海德（C.C.Heyde）和森尼塔（E.Seneta）两博士，他们告知我关于1845年宾内姆（Bienayme′）氏在简单分支方法上的著作，并允许我阅读他们的文章的手稿。库珀（C.D.Cooper）博士欣然地审阅了第四章的初稿，并帮助消除了四章三节中一个重要错误；他还建议了在该章最后习题中的矩阵。承简·布拉克斯兰（Jane Blaxland）及海伦·奈特（Helen Knight）两小姐多次打印手稿，贝蒂·索恩（Betty Thorne）小姐绘制图形，一并致谢。

最后，我愿感谢我的妻子，她在我为此书而忙碌的许多夜晚总是耐心地予以帮助。

J.H.波拉德

1973年1月于悉尼，麦夸里大学

1975年版本注：自本书初版以来，已发现某些错误。这些错误现均改正，并感谢格雷厄姆·波拉德（Graham Pollard）提示初版中的若干错误。我也感激兰开斯特（H.O.Lancaster）教授引起我对伦哈德·欧拉（Leonhard Euler 1707—83）著作的关注。

J.H.波拉德

目　　录

第一章　导　论

大多数文明国家的领导人和政府都搜集过关于他们人民的统计情报。例如，五千年前苏美尔（Sumer）人为课税而计算他们的人口。其后，罗马人根据人口计算而征兵。经历了许多世纪，基督教会以教区记事录形式编辑了一部巨大数量的人口统计资料①。今天，甚至在某些发展中的国家，关于当今人口之有用数据的数量都是非常大的。

仅仅在十七世纪，人们纯从科学的观点才对他们的人口数字发生兴趣。英国人约翰·格伦特（John Graunt 1620—74）大概是第一个这样的人物，他的工作很全面，且达高水平（约翰·格伦特，1662②；萨瑟兰I.Sutherland，1963）。他创造出第一个生命表，并且相当详细地研究了伦敦的人口。另外许多人都模仿他。

我们首先要考虑的是关于人口的各种数学模型。早在1767③年伦哈德·欧拉创制了这样一个模型，托马斯·马尔萨斯（Thomas Malthus，1798②)的人口分析可称为一种数学模型的定式。不过，近世人口理论约始于洛特卡（A. J. Lotka，1907）和夏普（F. R. Sharpe)及洛特卡（1911）二氏之确定性理论。

第二章讲述生命表及其应用。其余八章专门讨论各种不同的数学模型，它们业经用于分析人口的增长。这些模型在他们的复杂性和数学解释上变化颇大。

第一章注：

① 现代有若干团体研究来自教区记事录中的有用数据。位于意大利北部帕维亚（Pavia）的遗传研究所人员对获自巴马（Pavma——意大利北部一城市——译者注）山谷教区记录中遗传学的数据饶有兴趣（卡瓦里—斯福查L. L. Cavalli—Sfarza，1958）。对于人口历史和社会结构，剑桥团体的主要兴趣在于来自英格兰的前工业人口的统计结果（里格利E. A. Wrigley，1966；里格利和斯科菲尔德R. S. Schorield，1968）。在法国完成了这方面的一些较著名的工作（古伯特P. Goubert，1960）。

② 这些参考资料是极为有趣的（并且有时引人发笑的）读物。

③ "人类死亡率与增殖通考"，见《皇家科学文艺学会史》，1760年，144—64页，柏林普鲁士科学院版。出版年代为1767年。又见托德亨特（I. Todhunter，1865）著《概率的数学理论史》，240—1页。（纽约，乔瑟Chelsea出版公司1965年重印本。）

第二章　生　命　表

§2.1 引　言

考虑n_0个年龄确满〇岁的生命（婴儿），n_0是一个很大的数。x年后，这些生命中将有一部分死去，留存下来的只有n_x个，这n_x个都年满x岁。显然，当x增大时，n_x形成一个整数的单调非增数列。假如n_x是个大的数字，从x岁至$x+t$岁之尚存者的概率记为${}_tp_x$，它将近似地等于n_{x+t}/n_x。即

$$ {}_tp_x \doteq n_{x+t}/n_x \tag{2.1.1} $$

这是人口统计工作者首先用以发展生命表的重要理论概念的论证典型。在第一章已提过，1662年约翰·格伦特编制了第一个生命表。公认这是他的杰作。下面引述来自他的原书：

"9．就我们获知情况而论，100个活胎在年满6岁之前死去36个，大概只一人活过76岁。在6与76之间有七个十年，6岁时存活者64人，76岁时存活者一人，在64与1之间我们找得出六个比例中项的数。我们获得的下列数据，实际上是充分接近真实的；因为人们的死亡并非准确地按照一些比例数，也不按照一些分数：从那里（指调查并获得数据之处——译者注）产生下表。

即，100个活胎在头6年之内死亡	36
其次十年内死亡	24
第二个十年内死亡	15

第三个十年内死亡	9
第四个十年内死亡	6
第五个十年内死亡	4
第六个十年内死亡	3
第七个十年内死亡	2
第八个十年内死亡	1"

"10. 由上述推知，100个活胎在

头 6 年之末尚存者	64
在16年之末尚存者	40
在26年之末尚存者	25
在36年之末尚存者	16
在46年之末尚存者	10
在56年之末尚存者	6
在66年之末尚存者	3
在76年之末尚存者	1
在80年之末尚存者	0"

尽管这种原始生命表相当简陋，但近世的生命表却是一个精细的理论工具。我们定义一个效果良好的，连续的单调减函数l_x，使得从确龄x岁至确龄$x+t$岁时尚存者的概率${}_tp_x$等于l_{x+t}/l_x。通常任取某一值如10,000或100,000为l_0，这个取定的l_0的值称为基数。

虽然l_x是连续的，并且对大于零的所有x的值都有定义，但它是一个经验函数，而且难得有一个明显的数学表达式。通常用表格法来表示l_x，按x的整数值把相应的函数l_x的值列之成表，并且用内插法找出那些中间值（如果需要）。差l_x-l_{x+1}代表死亡人数，这些人是从年达确龄x岁的l_x个人

中活过最后x岁生日未达$x+1$岁而死去，并用d_x表此死亡人数。

关于1961年澳大利亚男性生命表在书末《习题解答》后给出。

§2.2 死亡率计算

利用生命表，我们可以计算包括死亡率在内的各种概率。例如，考虑一个现年30岁的生命。此生命在确龄40与确龄50之间将死去的概率是多少？

按照l_x的定义，一个年达30的生命直至确龄40时还活着的概率是l_{40}/l_{30}，并且一个年达40的生命将在其确龄50之前死亡的概率为$1-(l_{50}/l_{40})$。我们假设个人在不同年龄的死亡率期望值是相互独立的，因此推出此年达30的生命在40与50之间将死去的概率是$(l_{40}/l_{30})(1-l_{50}/l_{40})$。简化后，此概率为$(l_{40}-l_{50})/l_{30}$，并且在1961年澳大利亚（男性）生命表上此概率等于$(92,859-88,473)/94,726=0.046$。

§2.3 死亡力

在§2.2节给出一个用生命表上函数l_x去计算死亡率的例子。现在考虑一个年达x岁的生命。这一生命在其确龄$x+t$与确龄$x+t+dt$之间将死去的概率是什么？类似于§2.2所指出的论证，此概率为$(l_{x+t}-l_{x+t+dt})/l_x$。l_x是一个效果

良好的函数，因此在点$x+t$的附近可以把l_{x+t+dt}展成一个泰勒级数。于是得

$$\frac{l_{x+t}-l_{x+t+dt}}{l_x}=\frac{l_{x+t}}{l_x}\left\{-\frac{1}{l_{x+t}}\frac{d}{dt}(l_{x+t})dt\right\}+0(dt)$$

$$={}_tp_x\mu_{x+t}dt+0(dt),\qquad(2.3.1)$$

在这里

$$\mu_x=-\frac{1}{l_x}\frac{d}{dx}l_x=-\frac{d}{dx}\log l_x\qquad(2.3.2)$$

在公式（2.3.1）中应注意：${}_tp_x$是一个生命从x岁至$x+t$岁时还活着的概率，而$\mu_{x+t}dt$是一个年达$x+t$岁的生命将在时间元素dt内死亡的概率。由方程（2.3.2）所定义的，死亡率函数μ_x通常称之为**在x岁时的死亡力**。它具有很大的理论重要性。

§2.4　死亡力之数值计算

我们常常需要μ_x的各种数值。但通常函数l_x是一个经验函数，所以需用数值微分去定出μ_x。下面的公式经常为编制生命表的人员所使用，并且假如在点x的邻近l_x是一个四次多项式，此公式就一定准确：

$$\mu_x=\frac{8(l_{x-1}-l_{x+1})-(l_{x-2}-l_{x+2})}{12l_x}\qquad(2.4.1)$$

上式可由在点x的附近展开l_{x-2}，l_{x-1}，l_{x+1}及l_{x+2}为泰勒级数，并消去其中包含l_x的二阶，三阶及四阶导数的各项直接得出。

用公式(2.4.1)不能算出μ_0和μ_1（因$x=0$，$l_{x-1}=l_{-1}$