经济应用数学基础(二)

线性代数

主编 苟玉玺

吉林大学出版社

参加本书编写的有(以姓氏笔划为序)：

孙育卿　李延敏　李　丽

陆　颖　荀玉玺　温　波

经济应用数学基础(二)

线　性　代　数

主编　荀玉玺

吉林大学出版社出版　　吉林大学出版社发行

(长春市东中华路29号)　长春电影制片厂印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32　　1990年9月第1版

印张：7.375　　1990年9月第1次印刷

字数：182千字　　印数：1—1000册

ISBN 7—5601—0589—0/O·68　　定价：4.30元

前　　言

本书是根据教学需要，在原有教材的基础上，结合我们的教学实践和体会编写的. 编写中力求概念准确、重点突出、由浅入深、通俗易懂、简明扼要，又有较强的科学性，同时注意了在经济学方面的应用.

全书共六章，内容包括了财经及经济管理各专业所必须的线性代数知识. 该书可作为财经类院校本科生试用教材或参考书，也可作为高等教育自学考试财经类《高等数学》(二)的教材或参考书，还可供有关经济工作者和报考经济类研究生人员参考.

在本书编写的过程中，参考了兄弟院校的有关教材，得到了吉林财贸学院领导、教务处、科研处的热情支持和鼓励，在此一并表示衷心的感谢.

限于水平，缺点和不当之处在所难免，希望读者和经济数学界同行多加批评指正.

编　　者

1990 年 4 月于长春

目　录

第一章　行列式 …………………………………………… (1)
§1.1　二阶与三阶行列式 ……………………………… (1)
§1.2　n阶行列式 ……………………………………… (6)
§1.3　行列式的基本性质 ……………………………… (15)
§1.4　行列式按行(列)展开 …………………………… (25)
§1.5　克莱姆(*Cramer*)法则 …………………………… (38)
习题一 ……………………………………………………… (44)
第二章　矩　阵 ……………………………………………… (49)
§2.1　矩阵的概念 ……………………………………… (49)
§2.2　矩阵的运算 ……………………………………… (51)
§2.3　逆矩阵 …………………………………………… (65)
§2.4　分块矩阵 ………………………………………… (74)
§2.5　矩阵的初等变换 ………………………………… (82)
§2.6　矩阵的秩 ………………………………………… (93)
习题二 ……………………………………………………… (100)
第三章　n维向量 ………………………………………… (108)
§3.1　n维向量及其运算 …………………………… (108)
§3.2　向量间的线性关系 ……………………………… (112)
§3.3　向量间线性关系的性质 ………………………… (120)
§3.4　极大线性无关组 ………………………………… (126)
习题三 ……………………………………………………… (135)
第四章　线性方程组 ……………………………………… (139)
§4.1　线性方程组的消元解法 ………………………… (139)
§4.2　线性方程组解的判定 …………………………… (150)

§ 4.3　线性方程组解的结构 …………………… (159)
习题四……………………………………… (170)
第五章　相似矩阵……………………………… (176)
§ 5.1　相似矩阵的概念 ……………………… (176)
§ 5.2　特征值与特征向量 …………………… (177)
§ 5.3　矩阵的相似对角化 …………………… (183)
§ 5.4　正交矩阵与对称矩阵的正交对角化 ……… (190)
习题五……………………………………… (198)
第六章　二次型………………………………… (200)
§ 6.1　二次型与对称矩阵 …………………… (200)
§ 6.2　二次型的标准形 ……………………… (203)
§ 6.3　实二次型的分类与判定………………… (212)
习题六……………………………………… (221)

第一章 行列式

行列式是线性代数中一个重要的概念，也是数学中特别是解一般线性方程组的最重要、最常用的一种工具．本章的主要内容就是介绍行列式的定义、性质、计算方法，以及利用行列式解线性方程组．

§1.1 二阶与三阶行列式

一、二阶行列式

我们先来看含有两个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

用加减消元法求解，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

因此，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1.1)的解一定具有下面的形式

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.2}$$

反过来，不难验证，由(1.2)式确定的 x_1 和 x_2 的值，也一定适合(1.1)，因此当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1.1)有唯一的解，并且其解由公式(1.2)给出．

为了便于记忆公式(1.2)，我们引进二阶行列式的概念

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

我们称(1.3)式为一个**二阶行列式**，表中横排称为行，竖排称为**列**，右边的 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 通常称为二阶行列式的**展开式**或**值**，于是方程组(1.1)的解便可用行列式唯一地表示为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\[2ex] x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases}$$

用 D 记 x_1 和 x_2 的分母行列式，分别用 D_1 和 D_2 记它们的分子的行列式，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

于是公式(1.2)便可简写成

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\[2ex] x_2 = \dfrac{D_2}{D} \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 D 叫做方程组(1.1)的**系数行列式**. 因此，当系数行列式 $D\neq0$ 时，方程组(1.1)的解可以表示成(1.4)的形式.

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases}$$

解 因为系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

故可应用公式(1.4)求解．又因为

$$D_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -19$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -11$$

所以，方程组的解是

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{19}{7} \\ x_2 = \dfrac{11}{7} \end{cases}$$

二、三阶行列式

我们再来看含有三个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

用加减消元法求解．以数 $a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$乘(1.5)的第一式；以数 $a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$乘(1.5)的第二式；以数 $a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$乘(1.5)的第三式，然后把这三个新的方程加起来，就可以使 x_2 与 x_3 的系数都等于零，得出

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ &= b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} \\ &\quad - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3 \end{aligned}$$

所以，当

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$$

时，就得到

$$x_1 = \frac{D_1}{D}$$

其中

$$D_1 = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32}$$
$$- b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3$$

用同样方法，可以求得

$$x_2 = \frac{D_2}{D}, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中

$$D_2 = a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3$$
$$- a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}$$
$$D_3 = a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}$$

因此，当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.5)的解一定是

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \\ x_3 = \dfrac{D_3}{D} \end{cases} \tag{1.6}$$

的形式.

反过来，不难验证，由(1.6)式确定的 x_1，x_2，x_3 的值一定适合(1.5)式. 所以，当 $D\neq 0$ 时，(1.5)有唯一解，这个解由(1.6)给出.

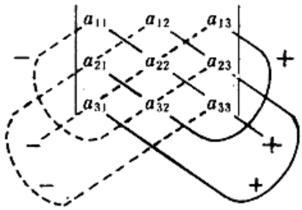
为了便于记忆(1.6)，我们仿照二阶行列式，给出三阶行列式的定义.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

叫做**三阶行列式**，其中 a_{ij}称为它的第 i 行、第 j 列**元素**. 右边叫做它的展开式或值. 三阶行列式展开式共有六项，每项都是位于不同行不同列的三个元素之积. 它有一个简单的计算规则，即：三阶行列式的对角线计算规则：



实线上三数的乘积取正号，虚线上三数的乘积取负号. 即

$$+ a_{11}a_{22}a_{33},\ + a_{13}a_{21}a_{32},\ + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31},\ - a_{11}a_{23}a_{32},\ - a_{12}a_{21}a_{33}$$

所以，

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

例如

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 2 \times (-2) + (-1) \times (-5) \times 1 + 1 \times 3 \times 3$$

$$- 1 \times 2 \times 1 - (-1) \times 3 \times (-2) - 2 \times (-5) \times 3$$

$$= -8 + 5 + 9 - 2 - 6 + 30 = 28$$

例 2 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 13$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 47$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

所以，方程组的解是

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{13}{28} \\ x_2 = \dfrac{47}{28} \\ x_3 = \dfrac{21}{28} \end{cases}$$

§1.2 n 阶行列式

我们不可能按上面引入二阶与三阶行列式的方法引入 n 阶行列式，因为当 n 很大时，用消元法从 n 个未知量中消去 $n-1$

个未知量是很难做到的．因此，我们采取另一种方法，就是详细研究一下二阶、三阶行列式的展开式的结构，找出它们的规律，依据这些规律合理地给出 n 阶行列式的定义，这就是本节的主要任务．

一、排列与逆序

定义 1.1 由数 1，2，…，n 组成的一个有序数组叫做一个 **n 级排列**．

例如，312 是一个 3 级排列，而 52314 是一个 5 级排列．

n 个数的 n 级排列共有 $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\cdot2\cdot1=n!$ 个．

例如，1,2,3 这三个数的 3 级排列共有 $3!=3\times2\times1=6$ 个，就是

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321$$

三个数的 3 级排列中，排列 123 是按从小到大的自然顺序排列的，称其为**标准排列**，而在其它排列中都可以找到一个较大的数排在一个较小的数的前面．例如 321 中 3 排在 2 和 1 前面，2 排在 1 前面．这样的排列顺序是与自然顺序相反的，我们称它为**逆序**．

定义 1.2 在一个排列中，如果有某一个较大的数排在某一较小的数前面，我们就称这两个数构成一个逆序．在一个排列里，所有逆序的总数叫做这个排列的**逆序数**．

例 1 求 4231 的逆序数．

解 在排列 4231 中，共有 42，43，41，21，31 五个逆序．所以排列 4231 的逆序数等于 5．

n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数用符号 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示．例如，排列 4231 的逆序数 $\tau(4231)=5$，而排列 4213 的逆序数 $\tau(4213)=4$．

例 2 求 $\tau(n\ (n-1)\ \cdots\ 2\ 1)$．

解 因为在排列 $n(n-1)\cdots2\ 1$ 中，n 与后面 $n-1$ 个数都组成逆序，$n-1$ 与后面的 $n-2$ 个数都组成逆序，…．一般地，

$k(k>1)$与它后面的 $k-1$ 个数都组成逆序. 所以

$$\tau(n\ (n-1)\ \cdots\ 2\ 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$$
$$=\frac{n(n-1)}{2}$$

逆序数为偶数的排列叫做**偶排列**；逆序数为奇数的排列叫做**奇排列**.

例如，对于排列 4213，因为 $\tau(4213)=4$，所以它是偶排列；对于排列 4231，因为 $\tau(4231)=5$，所以它为奇排列.

例 3 讨论排列 $n(n-1)\cdots21$ 的奇偶性.

解 因为

$$\tau(n\ (n-1)\ \cdots\ 2\ 1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

所以当 n 等于 $4k$ 或 $4k+1$ 时，这个排列是偶排列；而当 n 等于 $4k+2$ 或 $4k+3$ 时，这个排列是奇排列. 显然，标准排列是偶排列，因为 $\tau(1\ 2\ 3\ \cdots\ (n-1)\ n)=0$.

在一个排列中，任意两个数 i 与 j 交换位置，其余的数不动，就得到一个新的排列，这种变换称为一个**对换**，记作(i,j).

例如，对排列 4213 施行对换(1，3)得到新排列 4231；如果对排列 4231 再施行对换(3，1)，就又得到 4213.

不难看出，施行对换对排列的奇偶性是有影响的. 例如排列 4213，由于 $\tau(4213)=4$，它是偶排列；而排列 4231，由于 $\tau(4231)=5$，它是奇排列. 由此可见一个排列经过一次对换改变其奇偶性，这一事实不是偶然的，我们有如下定理.

定理 1.1 每一个对换都改变排列的奇偶性.

证明 首先讨论一种特殊情形，即对换的两个数是相邻的.

设原排列是

$$\cdots ij\cdots$$

这里"…"表示那些不变的数．对这个排列施行对换$(i,\ j)$得到一个新的排列

$$\cdots ji\cdots$$

我们比较这两个排列的逆序数．在这两个排列中，… 部分排列的逆序数不变．且数 i 与 j 和其余的数所成的逆序显然也没有变动．如果 i 与 j 在原来的排列中没有逆序(即 $i<j$)，那么在新排列中就构成一个逆序，即新排列较原排列增加了一个逆序．如果 i 与 j 在原来的排列中构成逆序(即 $i>j$)，那么在新排列中便失掉了这个逆序，即新排列较原排列减少了一个逆序．因此，不论那种情况，对换两个相邻数，排列的奇偶性一定改变．

其次讨论一般情形，即对换的两数 i 与 j 之间有 $s(>0)$个数．也就是原来的排列是

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots \tag{A}$$

施行对换$(i,\ j)$得到新的排列

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots \tag{B}$$

我们用下面的方法从排列(A)变换到排列(B)．由排列(A)起将 i 依次与后面 s 个数 k_1，k_2，…，k_s 作相邻两数对换，得到排列

$$\cdots k_1k_2\cdots k_sij\cdots \tag{C}$$

然后再由排列(C)起，将 j 依次与前面 $s+1$ 个数 i，k_s，k_{s-1}，…，k_2，k_1 作相邻两数对换，就得到排列(B)．这样，共经过了 $2s+1$ 次相邻两数的对换．排列的奇偶性改变了 $2s+1$ 次，所以新排列的奇偶性与原来排列的奇偶性一定相反．这就证明了定理．

定理 1.2 在全部 $n!$ 个 n 级排列中，奇、偶排列的个数相等，各有$\frac{1}{2}n!$ 个．

证明 假设在 $n!$ 个 n 级排列中有 k 个奇排列，t 个偶排列，

则 $k+t=n!$. 对于这 k 个奇排列施行同一个对换(i, j)，那么由定理 1.1，可得到 k 个偶排列，而且不同的奇排列经过同一个对换(i, j)后不能得到同一个偶排列. 故奇排列的个数 k 不会大于偶排列的个数 t，即 $k \leqslant t$. 同理亦可证得 $t \leqslant k$，所以，

$$k = t = \frac{1}{2}n!$$

二、n 阶行列式

现在来研究二阶、三阶行列式展开式的结构.

我们先看二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

它的展开式有以下特点：

1. 二阶行列式的展开式有 $2! = 2$ 项.

2. 每一项是位于不同行与不同列上的两个元素的乘积，并且所有这样的乘积都是行列式的项.

3. 每一项都带有符号. 当该项二个元素的行下标为标准排列时，如果列下标构成偶排列，那么该项带正号；如果列下标构成奇排列，那么该项带负号. 例如，项 $a_{11}a_{22}$的两个元素的列下标构成偶排列 12，所以它带正号. 而项 $a_{12}a_{21}$的两个元素的列的下标构成奇排列 21，所以它带负号.

我们再来看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

它的展开式有以下特点：

1. 三阶行列式的展开式有 $3! = 6$ 项.

2. 每一项是位于不同行与不同列上的三个元素的乘积，

并且所有这样的乘积都是行列式的项.

3. 每一项都带有符号. 当该项的三个元素的行下标为标准排列时，如果列下标构成偶排列，那么该项带正号；如果列下标构成奇排列，那么该项带负号. 例如，$a_{12}a_{23}a_{31}$的列下标构成偶排列 231，所以它带正号；又 $a_{11}a_{23}a_{32}$的列下标构成奇排列 132，所以它带负号.

现在根据上述规律，把二、三阶行列式概念推广到一般的 n 阶行列式.

定义 1.3 设有 n^2 个数 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, n)$，我们用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

表示 n 阶行列式，其中横排称为行，纵排称为列. 它是符合下列规则的一切可能的项的代数和：

1. 每一项都是位于不同行与不同列上的 n 个元素的乘积：

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{*}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是数 1，2，…，n 的一个 n 级排列.

2. 每一项都带有符号，并按下述原则确定：当行下标为标准排列时，如果列下标构成的排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列，项(*)带正号；如果列下标构成的排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列，项(*)带负号.

由定义可知，n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和，它的一般项可以表示为$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$.

这里 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数. 因此，n 阶行列式可以表示成

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}
$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和，等号右边称为 n 阶行列式(1.7)的展开式.

例4 根据 n 级行列式定义，二阶行列式

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}
$$

按定义，式中 $\sum\limits_{j_1 j_2}$ 表示对所有2级排列(即12与21)求和，因此得

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12)} a_{11} a_{22} + (-1)^{\tau(21)} a_{12} a_{21}
$$

$$
= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}
$$

例5 决定 i, j，使 $a_{1i} a_{23} a_{3j} a_{42} a_{54}$ 是5阶行列式

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}
\end{vmatrix}
$$

中带正号的项.

解 乘积 $a_{1i} a_{23} a_{3j} a_{42} a_{54}$ 的行下标为标准排列，它的列下标构成的排列为 $i3j24$. 所以，乘积 $a_{1i} a_{23} a_{3j} a_{42} a_{54}$ 要成为行列式的一项，5个元素不能同列，因此

$$
i = 1,\ j = 5 \qquad \text{或} \qquad i = 5,\ j = 1
$$

但是当 $i=1$，$j=5$ 时，排列13524是奇排列，乘积，$a_{11} a_{22} a_{35} a_{42} a_{54}$ 是带负号的项，而排列13524是偶排列，因此，只有在 $i=5$，j