定光桂 著

次加泛函引论

广西人民出版社

次加泛函引论

定光桂　著

广西人民出版社

次加泛函引论

定光桂 著

☆

广西人民出版社出版

（南宁市河堤路14号）

广西新华书店发行　广西民族印刷厂印刷

*

开本 850×1168　1/32　4.125 印张　98 千字

1986年6月第1版　1986年6月第1次印刷

印　数 1—1,100 册

书号：7113·763　定价：1.05 元

前　　言

在凸体理论，微分方程的唯一性理论，连续模的理论，半群理论和线性泛函的扩张理论中，次可加泛函都起着重要的作用。因此，对它进行系统的研究是有意义的，本书给出笔者在这方面做的一点工作。对于涉及到的较偏的知识，笔者均附带介绍了其相应命题。因此，读者仅需具有一般泛函分析的基本知识，就不难看懂各节内容。

一个泛函，如果满足 $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$，就称之为**次加泛函**。§1将给出有关次加泛函（更一般的，有关 γ-**拟次加泛函**p，即对一正常数γ，均有$p(x+y) \leqslant \gamma[p(x)+p(y)]$）的一些基本性质，特别给出有关距离线性空间（由〔31〕§1.5（三）之引理2，知其等价于一个赋准范空间）为**有穷维**时的特征命题（定理1.1）。而且，我们也将指出，在每一个群内之含零元θ的任一对称集上，将不会存在着（在其上定义的）任意非正的次加泛函，和具有零点的非正的拟次加泛函。

§2将给出作为以后讨论之基础的一个重要的引理，它指出了在什么条件下，一个拟次加泛函在以零元θ为心的球内是数值有界的。

§3将给出涉及到γ-拟次加泛函$p(x)$取$-\infty$值的一些结论，特别地将给出$p(x)$取有限值、取$+\infty$、及取$-\infty$的点的分布状态（定理3.5）。

§4对于在赋范线性空间E上定义的γ-拟次加泛函$p(x)$，我们将给出有关半模$\Sigma=\{x \mid p(x)<+\infty,\ x \in E\}$之结构的两个定理。

§5 将给出对于“广义”按范 γ- 拟次加算子族〔即：如果 $\{A\iota|\iota\in I\}$ 为从 E 到 $E\iota(\iota\in I)$ 内的一族算子（这里 E、$E\iota(\iota\in I)$ 均为赋 β- 范空间），满足下面条件：存在一常数 $\gamma>0$，使得对任意的 $\iota\in I$，存在 $\iota'\in I$，均有 $\|A\iota(x+y)\|_*\leqslant\gamma\{\|A\iota'(x)\|_*+\|A\iota'(y)\|_*\}$，其中 $x,y\in E$（这里 $\|x\|_*$ 表示各相应空间的 β- 范数）.〕的四个**共鸣定理**.

在 §6中，借助于 §5类似的方法，将给出在上述赋 β-范空间中定义的凸泛函族的两个共鸣定理，和由此导出有关凸泛函极小值问题的推广命题（定理6.3和注5，注6）.

§7将举出一些反例，从而证明 §6中的极小值命题，以及关于在自反空间中线性连续泛函的有关极大值命题，对于某一些类型的次加泛函是可能失效的. 特别地，例7.1给出定义在 $(l^p)(1<p<+\infty)$ 空间（自反的空间）上的一个连续次加绝对齐性泛函，它在空间的单位闭球上都不能达到其上确界；而例7.6给出定义在（l^2）空间上的一个连续的$\frac{1}{2}$-绝对齐性泛函，它在空间的任何有界闭凸集上均不能达到其下确界.

§8将定义一类非线性泛函，即**次增泛函**（也即有 $q(x+y)\geqslant\min(q(x),\ q(y))$），与$\gamma$-**拟次增泛函**（也即有一常数$0<\gamma<1$，使得$q(x+y)\geqslant\gamma\min(q(x),\ q(y))$），以及关于它们的极小值定理.

在 §9中，借助于前面 §5的命题，将给出某一类赋范（准范）线性空间在包含关系（按代数同构的意义）下**纲**的特性.

§10将给出一个定理，它指出：在空间 $L^\beta[a,b]$（$0<\beta<1$）上，将不存在任何非平凡的α**绝对齐性**（$\alpha>\beta$）的次加泛函，使得其在空间的某一球 $B_{\delta_0}(x_0)$ 内均是**下半连续**的.

§11将在具有**不变距离**之距离空间中一个半模的子集M上，给出关于M上定义的任意“数值有界”泛函对于非负次加泛函

的一个分解定理.

在最末的附录中，将展开在拓扑线性空间中的前面一些问题的讨论，并且类似地给出相应的结果. 对于具有拓扑线性空间最基本知识的读者来说，此节也是不难看懂的.

对于次加泛函的研究，目前仅仅是处于初始阶段. 与线性泛函“最接近”的，可以说就是次加泛函与凸泛函（目前凸分析发展是很快的）. 笔者衷心希望这本书能够激发更多的同志对次加泛函研究的热情，能够起到抛砖引玉的作用. 此外，笔者也期待着读者提出宝贵的批评和意见.

本书许多内容是笔者在瑞典皇家科学院 Mittag-Leffler 研究所进行的工作，是在那里写的博士论文的一部分. 笔者对施美芳同志表示衷心的感谢，她在百忙中抽出宝贵的时间抄写了本书的全部手稿. 笔者也对本书的校对者全秀池、那启文同志表示感谢。

定光桂

1984年于南开园

责任编辑：黄力平

封面设计：文　卫

书号：7113·703

定价：1.05 元

目　录

§1. 关于次加泛函的一些基本性质

首先，我们给出下面三个次加泛函的简单性质：

性质1.1　如果在数域K的线性空间E上定义的次加泛函$p(x)$是齐性的，那么它一定是线性的。当E是一个具有不变距离[19]的距离空间时，次加泛函$p(x)$只要满足条件

$$\overline{\lim_{d(x,\theta)\to 0}}\, p(x)=0,$$

那么，它就是E上的连续泛函。

作为性质1.1的推广，我们有下面结论：

性质1.2　如果E是一个具有不变距离的线性空间，E上定义的次加泛函$p(x)$满足以下条件：在E中某一点x_0，$p(x)$是上半连续的；且有$p(-x_0)=-p(x_0)$，那么，$p(x)$必为E上的连续泛函。

证明　注意到$p(x)$的次加性假设，我们可以得到下面两个不等式：

$$\begin{aligned}p(y)-p(x)&=p[x_0+(y-x)+(x-x_0)]-p[(x-x_0)+x_0]\\&\leqslant\{p[x_0+(y-x)]+p(x-x_0)\}-\{p(x-x_0)-p(-x_0)\}\\&=p[x_0+(y-x)]+p(-x_0)\\&=p[x_0+(y-x)]-p(x_0);\end{aligned}$$

和（类似地有）对任意的$x,y\in E$，

$$\begin{aligned}p(x)-p(y)&\leqslant p[x_0+(x-y)]-p(x_0)\\&=p[x_0-(y-x)]-p(x_0).\end{aligned}$$

从而取上极限，直接就可得到结论。（证毕）

性质1.3 设$p(x)$为线性空间E上的次加泛函，那么，必有以下性质：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{p(nx)}{n}\geqslant 0\Longrightarrow p(x)\geqslant 0,\quad (x\in E). \tag{1}$$

（2）如存在元$x_0\in E$，使$p(x_0)<0$，那么，$\{p(nx_0)\}$必为无下界的数列.

证明 我们只要注意到下面不等式：对任意的$x_0\in E$，有

$$p(x_0)\geqslant\frac{p(nx_0)}{n},\quad n\in \mathbf{N}.$$

不难用反证法导出以上两结论.（证毕）

性质1.4 设$p(x)$为线性空间E上的次加泛函. 那么必定有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ np\left(\pm\frac{x}{n}\right)\leqslant 0\Longrightarrow p(x)=p(-x)=0,\quad (x\in E).$$

证明 反之，如有元$x_0\in E$，使$p(x_0)>0$或$p(-x_0)>0$，那么，由次加性可得$p\left(\pm\frac{x_0}{n}\right)\geqslant\frac{1}{n}p(\pm x_0)$，从而导出

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ np\left(\pm\frac{x_0}{n}\right)\geqslant p(\pm x_0)>0,$$

显然与假设矛盾. 因此，只能有$p(\pm x_0)\leqslant 0$. 再注意到关系式

$$0=p(x_0)-p(x_0)\leqslant p(x_0-x_0)\leqslant p(x_0)+p(-x_0)\leqslant 0$$

我们立即导出$p(x_0)=p(-x_0)=0$.（证毕）

注 对于上面的性质1.4，当对某元$x_0\in E$，如果使$f(t)=\frac{p(tx_0)}{t}$为$\mathbf{R}_+$(即正实数全体)内一个次加、可测函数时（注意，此时$p(tx_0)$可以取负值，如$-t^n(n>1)$)，我们则可断言该命题假设中只会出现$\lim\limits_{n\to\infty}np\left(\frac{x_0}{n}\right)=0$的情况.

事实上，首先，由$f(t)$的次加假设我们有

$$p(x_0)=f(1)\leqslant f(1-t)+f(t),\quad (0<t<1).$$

故由〔6〕中定理7.4.1（或参看本节后面的附录），我们可知，当$0<t\leqslant\frac{1}{2}$时，上面$\{f(1-t)\}$将组成一有界数集.因此，如有子列$\{t_k\}\subset\mathbf{R}_+$，使$t_k\to0^+$，有$f(t_k)\to-\infty$，那么，必将导出$p(x_0)=-\infty$，而这是不可能的.从而导出

$$\varliminf_{n\to\infty} np\left(\frac{x_0}{n}\right)\geqslant\varliminf_{t\to0+}\frac{p(tx_0)}{t}=\varliminf_{t\to0+}f(t)\neq-\infty.$$

其次，再注意到〔6〕中定理7.4.3（或参看本节后面的附录），由上段结果，我们将可导出

$$\varliminf_{t\to0+}\frac{p(tx)}{t}=\varliminf_{t\to0+}f(t)\geqslant0,$$

从而导出

$$\varliminf_{n\to\infty} np\left(\frac{x}{n}\right)\geqslant\varliminf_{t\to0+}\frac{p(tx)}{t}\geqslant0,\quad(x\in E)$$

这样一来，我们便推出了所需结论.

为了进一步讨论的需要，我们给出下列定义：〔13〕〔19〕

定义1.1 我们称E为一**距离线性空间**，是指：E是一个具有不变距离的线性空间，且当用$\|x\|_*$简记$d(x,\theta)$时（从而，由距离及其平移不变性的定义，我们显然有：(i) $\|x\|_*\geqslant0$；$\|x\|_*=0\Longleftrightarrow x=\theta$；(ii) $\|x+y\|_*\leqslant\|x\|_*+\|y\|_*$；(iii)(a) $\|-x\|_*=\|x\|_*$；$x,y\in E$），我们还有：

(iii)(b) $\|\lambda_n x\|_*\to0$，（$\lambda_n\to0$）；

(iii)(c) $\|\lambda x_n\|_*\to0$，（$x_n\to\theta$）；

(iv) $\|\lambda_n x_n\|_*\to0$，（$\lambda_n\to0, x_n\to\theta$），

其中x、$x_n\in E$，λ、$\lambda_n\in\mathbf{K}(n\in\mathbf{N})$.

此外，若此距离还满足下列性质：存在$\beta>0$，使有

$$\|\lambda x\|_*=|\lambda|^\beta\|x\|_*,\ 对任意的x\in E,\ \lambda\in\mathbf{K}$$

时，我们则称E为具有β-**绝对齐性距离**的距离线性空间，或简称为**赋β-范空间**.

对于上面的定义，我们以下给出几点注：

注1 首先，由距离的三角不等式，我们显然可以看出：在赋β-范空间中，必有$\beta\leqslant 1$（特别，当$\beta=1$时，其即为一赋范空间）.其次，从上面定义中的关系式(i)～(iii)，我们显然看出，距离线性空间即为一赋准范空间.此外，当我们再注意到[31]中§1.5节（三）之引理2时，我们还知对于一个准范数$\|\cdot\|_*$而言，$\|\lambda x\|_*$乃是(λ,x)的二元连续函数.这样一来，准范数也必然满足上面的关系式（iv）.从而可知，一个距离线性空间与由$\|x\|_*=d(x,\theta)$所定义的赋准范空间是等价的.因此，我们以后也可直接称距离线性空间为**赋准范空间**.

注2 赋β-范空间是不难找到的.例如空间(l^β)，$0<\beta<1$（这里，定义$\|x\|_*=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^\beta$，$x=\{\xi_k\}$），即为这样一个例子.

注3 由拓扑线性空间的知识，我们可以看到：当一个拓扑线性空间满足T_0公理及第一可数公理时，它就可以成为一个赋准范空间（距离线性空间），也即该不变距离将导出原来的拓扑[8].此外，当一个拓扑线性空间满足T_0公理及局部有界性时，那么，它就可成为一个赋β-范空间[15].显然，当我们对上述拓扑线性空间代之以讨论相应的赋准范或β-范空间时，就显得方便多了.

下面，我们将介绍一个命题，它将给出有关一个赋准范空间为有限维的特征.

定理1.1 **在任一有限维赋准范空间$E(n)$上定义的次加、α-正齐性泛函$p(x)$（这里$\alpha>0$），必在$E(n)$上连续.反之，如在赋准范空间E上定义的每一线性泛函均为连续的，那么，E必是有限维的.**

证明 为证前半段命题，我们注意到有关同一数域上，任两维数相同的有限维赋范空间均拓扑同构的证法[19]，及下面的关系式（$\|\cdot\|_*$为空间之准范数）：

$$\|x\|_*=\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right\|_*\leqslant\sum_{k=1}^{n}\|\xi_k e_k\|_*, \qquad (1)$$

$$\left\|\frac{x}{\sum\limits_{k=1}^{n}|\xi_k|}\right\| \geqslant m_0>0,\text{ 对任意的 } \theta\neq x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\in E(n), \qquad (2)$$

（这里，$e_1,\cdots,e_n$是$E(n)$的一组基底，m_0是连续函数$f(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\left\|\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right\|$在$K^n$之有界闭域$\sum\limits_{k=1}^{n}|\xi_k|=1$上的最小值）那么，首先从上面（1）式，由（前面定义1.1中）准范的定义之（iii）（b），及（i），我们直接导出：

$$\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|\to 0\Longrightarrow x\to\theta. \qquad \left(x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\in E(n)\right)$$

反过来，当$x\to\theta$时，如果相应数集$N=\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}|\xi_k|\,\middle|\, x=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right\}$是无界的，那么，从中则可选出一子列$\{\lambda^{(i)}\}\subset N$，使有$\lambda^{(i)}=\sum\limits_{k=1}^{n}|\xi_k{}^{(i)}|\to+\infty(i\to\infty)$，由此，注意到准范性质(iv)，则有：

$$\left\|\frac{x_i}{\sum\limits_{k=1}^{n}|\xi_k{}^{(i)}|}\right\|_* = \left\|\frac{1}{\lambda^{(i)}}x_i\right\|_*\to 0,\ (i\to\infty)$$

（这里$x_i=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k{}^{(i)}e_k$；$x_i\to\theta$，$i\to\infty$），而此显然与（2）式矛盾。另一方面，如上数集$N$是有界的，且有非零的聚点$\mu_0$，那么，也必有一非零子列$\{\mu^{(j)}\}\subset N$，使有$\mu^{(j)}\to\mu_0$（$j\to\infty$）。由此，并注意到准范的性质(iv)及其定义之(ii)和(iii)(c)，则有：

$$\left\|\frac{x_j}{\sum\limits_{k=1}^{n}|\xi_k{}^{(j)}|}\right\|_* = \left\|\frac{x_j}{\mu^{(j)}}\right\|_* \leqslant \left\|\frac{x_j}{\mu^{(j)}}-\frac{x_j}{\mu_0}\right\|_* + \left\|\frac{x_j}{\mu_0}\right\|_*$$

$$= \left\|\frac{\mu^{(j)}-\mu_0}{\mu_0\mu^{(j)}}x_j\right\|_* + \left\|\frac{1}{\mu_0}x_j\right\|_*\to 0,\quad (j\to\infty)$$

（这里$x_j=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k^{(j)}e_k$，$x_j\to\theta$，$j\to\infty$），而此同样与（2）式矛盾。从而导出：

$$x\to\theta\Longleftrightarrow\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|\to 0.\quad\left(x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\in E(n)\right)\qquad(3)$$

其次，对任意的$x=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e_k\in E(n)$，当设$\xi_k=|\xi_k|\cdot\delta_k$时（$1\leqslant k\leqslant n$），我们从$p(x)$的假设可以得到下面两个关系式：

$$p(x)=p\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}p(\xi_k e_k)=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^{\alpha}p(\delta_k e_k),$$

$$p(x)=p\left[\theta-\left(-\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right)\right]\geqslant p(\theta)-p\left(\sum_{k=1}^{n}-\xi_k e_k\right)$$

$$\geqslant-\sum_{k=1}^{n}p(-\xi_k e_k)=-\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^{\alpha}p(-\delta_k e_k).$$

从而，当$\mathbf{K}=\mathbf{R}$时，由于$\delta_k=\pm1(1\leqslant k\leqslant n)$，因此从上两式及(3)式，我们显然可导出：

$$\lim_{x\to\theta}p(x)=0.\qquad(4)$$

而当$\mathbf{K}=\mathbf{C}$时，注意到$|\delta_k|=1$，故当其分解为实部与虚部时，从$\delta_k=\varepsilon_k^{(1)}+i\varepsilon_k^{(2)}$及

$$p(\pm\delta_k e_k)\leqslant p(\pm\varepsilon_k^{(1)}e_k)+p(\pm i\varepsilon_k^{(2)}e_k)$$

$$=|\varepsilon_k^{(1)}|p(\pm e_k)+|\varepsilon_k^{(2)}|^{\alpha}p(\pm ie_k),$$

我们同样不难导出上面（4）的结论。这样一来，最后直接利用前面的性质1.1，我们则知泛函$p(x)$是连续的。

为了证明后半段命题，我们可以先证明命题：在无穷维的赋准范空间E中，均存在着处处不连续的线性泛函。

事实上，我们可以直接构造出所需的泛函。首先，设H是空

间E的一组Hamel基，并设元列$\{e_k\}\subset H$。那么，当注意到准范定义之(iii)(b)，我们便可选出一正数列$\{\rho_k\}$，使得：

$$\rho_k \to +\infty, \quad (k\to\infty)$$

和

$$\left\|\frac{e_k}{\rho_k}\right\|_* < \frac{1}{k}, \qquad (k\in \mathrm{N})$$

然后，我们在E上定义一泛函如下：对任意的$x\in E$，当$x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k+\sum_{i=1}^{m}\eta_i h_{\alpha_i}$时（这里，$h_{\alpha_i}\in H, 1\leqslant i\leqslant m$），令：

$$f_0(x)=\sum_{k=1}^{n}\rho_k{}^2\xi_k.$$

易证$f_0(x)$确为E上一线性泛函.并且，由于对任意的$x\in E$，有

$$x+\frac{e_k}{\rho_k}\to x, \qquad (k\to\infty)$$

及

$$f_0\left(x+\frac{e_k}{\rho_k}\right)=f_0(x)+f_0\left(\frac{e_k}{\rho_k}\right)=f_0(x)+\rho_k{}^2\cdot\frac{1}{\rho_k}$$
$$=f_0(x)+\rho_k\to+\infty, \qquad (k\to\infty)$$

从而还知f_0在E上处处均不连续.此即导出定理全部结论.（证毕）

为了使讨论更一般化，下面，我们来介绍γ-拟次加泛函的概念。为此，我们先给出一个定义：

定义1.2 我们称一集合S为**半模**（或**加法半群**），是指在S内定义了一加法运算“+”，使其满足以下条件：

(i) 对任意的$x\in S, y\in S$，将唯一确定一元$x+y\in S$；(封闭)

(ii) $(x+y)+z=x+(y+z)$，$x,y,z\in S$；（结合）

(iii) $x+y=y+x$，$x,y\in S$。（交换）

有了上面半模的定义，我们就可考虑定义域更广泛些的拟次加泛函，定义如下：

定义1.3 我们称定义在一半模之子集M上的泛函为γ-拟次加的，是指存在正常数γ，使有：

$$p(x+y)\leqslant\gamma[p(x)+p(y)],\quad x,y,x+y\in M.$$

注 由上定义可知，对于（加法）群G上定义的γ-拟次加泛函$p(x)$，其必有以下性质：

$$p(x-y)\geqslant\frac{p(x)}{\gamma}-p(y),$$

$$p(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$
$$\leqslant\gamma p(x_1)+\gamma p^2(x_2)+\cdots+\gamma^{n-2}p(x_{n-2})+\gamma^{n-1}[p(x_{n-1})+p(x_n)].$$

特别地，我们有

$$p(nx)\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n-2}\gamma^k+2\gamma^{n-1}\right)p(x),\quad x,y,x_1,\cdots,x_n\in G.$$

为直观起见，下面我们给出此类泛函的一些例子。

例1.1 设半模S上定义的泛函$p(x)$满足下面条件：

$$0<\inf_{x\in S}p(x)<\sup_{x\in S}p(x)\leqslant\alpha\cdot\inf_{x\in S}p(x),$$

那么，其必为$\frac{\alpha}{2}$-拟次加泛函$\left(显然\frac{\alpha}{2}>\frac{1}{2}\right)$；而若$p(x)$满足条件：

$$\inf_{x\in S}p(x)<\sup_{x\in S}p(x)\leqslant\beta\cdot\inf_{x\in S}p(x)<0,$$

那么，其必为$\frac{\beta}{2}$-拟次加泛函$\left(显然\frac{\beta}{2}<\frac{1}{2}\right)$。

例1.2 在实数域R上，设泛函

$$p(x)=\begin{cases}x, & 当x是有理数时；\\ x+1, & 当x是无理数时.\end{cases}$$

那么，$p(x)$必为次加泛函，且是处处不连续的。

例1.3 在正实数集$\mathbf{R}_+$上，设泛函

$$p(x)=\sqrt{x}\quad,\qquad x\in\mathbf{R}_+$$

那么，$p(x)$ 是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$-拟次加连续泛函.

例1.4 在具不变距离的距离空间内任一半模 S 上，设泛函

$$p(x)=\begin{cases}1, & \text{当}d(x,\theta)\leqslant\frac{1}{2};\\ d(x,\theta), & \text{当}d(x,\theta)>\frac{1}{2};\end{cases}\qquad x\in S.$$

那么，$p(x)$是S上的次加泛函. 而当 S 上具有一收敛列$\{x_n\}$，使$d(x_n,\theta)>\frac{1}{2}(n\in\mathbf{N})$，而 $x_n\to x_0(n\to\infty)$，有$d(x_0,\theta)=\frac{1}{2}$时，我们则可看到$p(x)$还是不连续的.

例1.5 在赋范性空间E上，设泛函

$$p(x)=\begin{cases}\|x\|, & \text{当}\|x\|\geqslant\beta^0\text{时};\\ \|x\|^2, & \text{当}\|x\|>\beta_0\text{时};\end{cases}\qquad x\in E.$$

（这里，$\beta_0\in\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$为给定常数）那么，$p(x)$为$E$上的4-拟次加泛函. 当$\beta_0=1$时，其还为连续的.

例1.6 在赋范线性空间E上，设泛函

$$p(x)=\begin{cases}\|x\|, & \text{当}\|x\|\leqslant\alpha_0\text{时};\\ 2\|x\|, & \text{当}\|x\|>\alpha_0\text{时};\end{cases}\qquad x\in E.$$

（这里，$\alpha_0>0$）那么，$p(x)$为2-拟次加、不连续泛函，但对任意的$x\in E$，均有$|p(x)|\leqslant2\|x\|$.

例1.7 设半模C是任意赋范空间内的一“正常锥性集”[10][21][23]，S为C的一子半模，且其不含有θ元. 我们设泛函

$$p(x)=\frac{1}{\|x\|},\quad x\in S.$$