经济数学基础(一)

微　积　分

主　编　陈永庆
副主编　史元祜 郭金锥

安徽教育出版社

(皖)新登字03号

微积分
陈永庆等
安徽教育出版社出版发行
(合肥市金寨路381号)
新华书店经销　合肥南方激光照排部照排
淮南市印刷厂印刷
*
开本787×1092　1/32　印张:10　字数:220,000
1994年7月第1版　1994年7月第1次印刷
印数:6.000
ISBN 7-5336-1624-3/G・2065
定价:6.00元

前　言

为适应我省对经济类专业人才的需求，近年来，省内各大专院校普遍设置了经济类专业。为了保证教学质量，加强对教学工作的统一管理，教材建设是个亟待解决的问题。1993 年 5 月，省教委一处通知有关高等院校，在淮南召开了安徽省经济类专科（大专）数学教材编写工作会议。会议决定，组织编写一套适用于我省经济类专科（大专）的《经济数学基础》教材。全书共分三册：第一册《微积分》，第二册《线性代数与线性规划》，第三册《概率与统计》。会上详细地讨论了这套教材的编写提纲，同时成立了三个编写组，分别负责三本书的编写工作。我们编写这套教材的主要精神是，在讲清必要的基本概念和基本理论的基础上，加强基本方法的内容和基本技能的训练。突出应用性，利用有限的学时，使学生掌握在后继课程和今后实际工作中常用的数学方法。教材既要符合教学大纲的要求，又要适合我省经济类大专生的实际数学水平。

经济数学基础第一册《微积分》，由安徽财贸学院陈永庆担任主编，淮南联合大学史元祜和安徽商业专科学校郭金锥担任副主编，参加编写的有阜阳师范学院孙多山、芜湖联合大学方孟雨和皖西联合大学赵启林。本书在分工写好初稿后，集体讨论进

行修改，最后由主编统稿定稿。

《经济数学基础》这套教材的编写工作是在省教委一处琚仲达处长和张守祥同志指导下进行的，在编写出版过程中得到了淮南联合大学、蚌埠高等专科学校和安徽财贸学院等有关院校的大力支持，在此一并表示感谢。

书中有错误和不妥之处，由编者负责。我们衷心地欢迎读者批评指正。

编　者

1994 年元月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

本章作为微积分的基础知识，首先回顾函数的有关内容，再介绍极限和连续等基本概念. 着重阐述极限的意义及计算方法，并用极限方法讨论函数的连续性.

§1.1　函　数

函数是高等数学最重要的基本概念之一，是微积分学研究的对象，也是研究经济问题的必不可少的基本知识.

一　实数的绝对值

实数是有理数和无理数的总称，在本书中所涉及到的数都是实数. 实数集、整数集和自然(正整)数集，分别用 R、Z、N 来表示. 非负实数集和非负整数集用 $\overline{R}$ 和 $\overline{Z}$ 来表示. 以后经常要用到实数的绝对值、区间与邻域. 因此，在开始学习本课程时，有必要复习一下实数的绝对值、区间与邻域等概念.

1　绝对值

一个实数 x 的绝对值，记作 $|x|$，定义为

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

它的几何意义是：$|x|$ 表示数轴上的点 x 到原点 O 之间的距离；$|x-x_0|$ 表示数轴上点 x 到点 x_0 之间的距离. 如图 1-1.

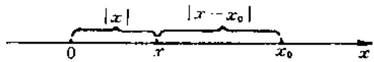

图 1-1

关于绝对值有以下基本性质：

(1) $|x|=\sqrt{x^2}\geqslant 0$；$|x|>0\Leftrightarrow x\neq 0$；

(2) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$；

(3) 若 $a>0$，则

$|x|\leqslant a\Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a$，$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$；

$|x|\geqslant a\Leftrightarrow x\leqslant -a$ 或 $x\geqslant a$，$|x|>a\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$；

(4) $|x|\leqslant |y|\Leftrightarrow x^2\leqslant y^2$

证 $|x|\leqslant |y|\Leftrightarrow |x|-|y|\leqslant 0\Leftrightarrow (|x|+|y|)(|x|-|y|)\leqslant 0$

$\Leftrightarrow x^2-y^2\leqslant 0\Leftrightarrow x^2\leqslant y^2$

仿此，有 $|x|<|y|\Leftrightarrow x^2<y^2$.

(5) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$；当 $n\in N$ 时，$|x^n|=|x|^n$；当 $y\neq 0$ 时，$\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$；

(6) $\big||x|-|y|\big|\leqslant |x\pm y|\leqslant |x|+|y|$

证 由 $-2|x|\cdot|y|\leqslant \pm 2xy\leqslant 2|x|\cdot|y|$，得

$|x|^2+|y|^2-2|x|\cdot|y|\leqslant x^2+y^2\pm 2xy$

$\leqslant |x|^2+|y|^2+2|x|\cdot|y|$，

即 $(|x|-|y|)^2\leqslant (x\pm y)^2\leqslant (|x|+|y|)^2$，

从而有 $\big||x|-|y|\big|\leqslant |x\pm y|\leqslant |x|+|y|$.

应用数学归纳法，可以证明：有限项和的绝对值不大于各项绝对值的和.

2 区间与邻域

设 a、b 是两个实数，且 $a<b$.

(1) 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合称为闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,x\in R\};$$

(2) 满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合称为开区间，记作 (a,b). 即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b,x\in R\};$$

(3) 满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合称为半开区间，记作 $[a,b)$ 或 $(a,b]$，即

$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b,x\in R\}$ （左闭右开区间）;

$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b,x\in R\}$ （左开右闭区间）.

以上四种区间是有限区间，a 和 b 叫做区间的端点，量 $b-a$ 叫做区间长.

(4) 实数集用开区间 $(-\infty,+\infty)$ 表示，有时也写成 $-\infty<x<+\infty$;

$[a,+\infty)$ 表示不小于 a 的实数 x 的集合，即

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a,x\in R\}.$$

另，$(a,+\infty)=\{x\mid x>a,x\in R\}$;

$(-\infty,b]$ 表示不大于 b 的实数 b 的集合，即

$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b,x\in R\}.$$

另，$(-\infty,b)=\{x\mid x<b,x\in R\}$.

这里所讲的区间都是无限区间.

注 我们约定：在区间 I 上取值，即可取属于 I 的任何一个值；在区间 I 内取值，即可取属于 I 的除端点外任何一个值. 因而对于开区间而言，“上”与“内”没有区别.

在微积分中还常常用到邻域的概念.

点 a 的 $\delta(>0)$邻域是满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的实数 x 的集合，即

$$\{x \mid |x-a|<\delta,\delta>0,x\in R\}=(a-\delta,a+\delta).$$

点 a 叫做邻域的中心，δ 叫做邻域的半径. 如图 1-2.

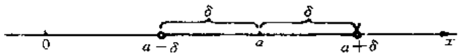

图 1-2

例如，以点 $a=2$ 为中心，$\delta=0.5$ 为半径的邻域，就是开区间 $(1.5,2.5)$.

满足不等式 $0<|x-a|<\delta$ 的实数 x 的集合，即

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta,\delta>0,x\in R\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

称为点 a 的 δ 空心邻域，如图 1-3.

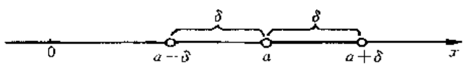

图 1-3

例如，$\{x \mid 0<|x-2|<0.1\}$ 表示以点 $a=2$ 为中心，以 $\delta=0.1$ 为半径的空心邻域，也就是两个开区间的并集 $(1.9,2)\cup(2,2.1)$.

二　一元函数的概念

1　一元函数的定义

定义 1.1　设 D 是一个非空实数集，如果存在一个对应法则 f，使得对于每一个 $x\in D$，都能由 f 唯一地确定一个实数 y，则称对应法则 f 为定义在实数集 D 上的一个函数关系，简称函数，记作

$$y=f(x) \qquad (x\in D),$$

其中 x 为自变量，y 为因变量(为了叙述的方便，亦称 y 或 $f(x)$ 为函数)，D 为函数的定义域，记为 $D(f)$. 因为 $y=f(x)$ 中自变量只有一个，亦称一元函数.

如果 $x_0\in D(f)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义；如果 $x_0\notin D(f)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义. 对于任何一个 $x_0\in D(f)$，因变量 y 的对应值 y_0 称为 x_0 所对应的函数值，记为 $y_0=f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 全体函数值所成的集合，称为函数的值域，记为 $Z(f)$ 或 Z，即

$$Z=Z(f)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D(f)\}.$$

定义域、对应法则是函数的两个要素，即当且仅当两个函数的定义域与对应法则均相同时是同一函数.

如：函数 $y=\sin x$ 与 $s=\sin t$ 是同一函数；

$y=x^2(x\geqslant 0)$ 与 $y=x^2$ 不是同一函数.

注意 值域不是函数的要素. 如 $y=x$ 与 $y=x^3$ 的定义域和值域都是 $(-\infty,+\infty)$，但它们不是同一函数；但是，如果两个函数的值域不同，则一定不是同一函数.

2 函数的表示法

表示函数的方法常用的有以下三种：

(1) 表格法 就是把自变量的一系列值与对应的函数值列成表格. 例如：平方表、立方表、对数表、三角函数表等等；

(2) 图示法 就是在平面坐标系中将自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则用图象表示出来(图形上的点的纵坐标 y 是横坐标 x 的函数值). 例如，用图 1-4 中的图形(半立方抛物线)，表示函数 $y=x^{\frac{3}{2}}$.

(3) 公式法 就是用一个或几个数学表达式来表示自变量

x 和因变量 y 之间的对应法则的方法. 今后我们所讨论的函数，一般都是用公式法表示的.

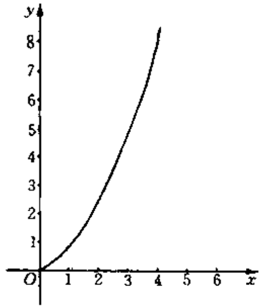

图 1-4

值得一提的是，在用公式法表示函数时，有时需要在它的定义域的不同范围内用不同的数学表达式来表示. 这种形式表示的函数称为分段函数. 分段函数有着广泛的实际应用，现举例如下：

例 1.1 某运输公司规定货物的吨千米运价为：在 100 千米内，每千米 k 元；100千米以上又不超过200千米，每增加1千米为 $0.8k$ 元；超过 200 千米，每增加 1 千米为 $0.6k$ 元. 试把运价 M 和里程 s 之间的关系用公式法表示出来.

解 依题意，运价 M 和里程 s 之间关系为

$$M=\begin{cases} ks & 0\leqslant s\leqslant 100 \\ 100k+(s-100)\times 0.8k & 100<s\leqslant 200 \\ 100k+100\times 0.8k+(s-200)\times 0.6k & s>200 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} ks & 0\leqslant s\leqslant 100 \\ 20k+0.8ks & 100<s\leqslant 200 \\ 60k+0.6ks & s>200. \end{cases}$$

这是个分段函数，其中点 $x=100$ 和 $x=200$ 叫做分段点. 其图形如图 1-5 所示.

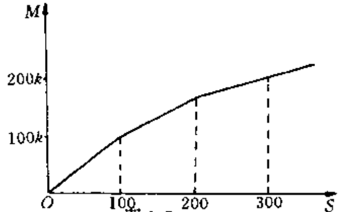

图 1-5

例 1.2 作出下面函数的图形

$$y=f(x)=\begin{cases}-x-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -x+1, & x>0,\end{cases}$$

并求 $f(-2)$及 $f(1)$.

解 当 $x<0$ 时，$y=-x-1$，图形是半直线 $y=-x-1$；当 $x=0$ 时，$y=0$，图形是坐标原点；当 $x>0$ 时，$y=-x+1$，图形是半直线 $y=-x+1$. 函数 $f(x)$的图形如图 1-6 所示.

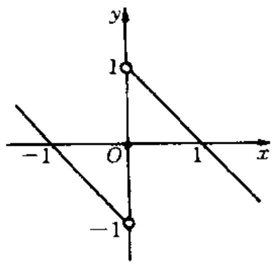

图 1-6

$$f(-2)=(-x-1)\big|_{x=-2}=-(-2)-1=1,$$

$$f(1)=(-x+1)\big|_{x=1}=-1+1=0.$$

3 函数的定义域的求法

除了实际应用问题中的函数的定义域由问题的实际意义所确定以外，如果函数是用公式法表示的，在没有注明自变量的取值范围时，其定义域就是使函数表达式有意义的自变量所有可

能取值的集合. 此时,对于分段函数,其定义域是和各“段”相应的点集的并集. 如

例 1.1 中函数的定义域是

$D(M)=[0,100]\cup(100,200]\cup(200,+\infty)=[0,+\infty)$;

例 1.2 中函数的定义域是

$D(f)=(-\infty,0)\cup\{0\}\cup(0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$.

对于用一个等式给出的函数,其定义域是使每一个数学式子有意义的点集的交集. 如

例 1.3 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{2x+1}}$;

(2) $f(x)=\dfrac{\log_2(3-x)}{\sin x}+\sqrt{5+4x-x^2}$.

解 (1)
$$\begin{aligned}D(y)&=\left\{x\,\middle|\,\begin{cases}x^2-1>0\\2x+1>0\end{cases}\right\}\\&=\left\{x\,\middle|\,\begin{cases}x<-1\text{ 或 }x>1\\x>-\dfrac{1}{2}\end{cases}\right\}\\&=\{x\,|\,x>1\}=(1,+\infty);\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}D(f)&=\left\{x\,\middle|\,\begin{cases}3-x>0\\5+4x-x^2\geqslant0\\\sin x\neq0\end{cases}\right\}\\&=\left\{x\,\middle|\,\begin{cases}x<3\\-1\leqslant x\leqslant5\\x\neq k\pi,k\in Z\end{cases}\right\}\\&=\left\{x\,\middle|\,\begin{cases}-1\leqslant x<3\\x\neq0,\pm\pi,\pm2\pi,\cdots\cdots\end{cases}\right\}\\&=\{x\,|\,-1\leqslant x<3\text{ 且 }x\neq0\}\\&=[-1,0)\cup(0,3).\end{aligned}$$

4　显函数与隐函数

在用公式法表示函数$y=f(x)$时，如果对应法则f是通过将y用关于x的数学式子来表示的，如$y=\cos x$，$y=\lg x+\operatorname{arctg}(1+x^2)$等等称为显函数.如果$f$不是通过上述形式，而是用关于$x$、$y$的一个二元方程$F(x,y)=0$或$F_1(x,y)=F_2(x,y)$给出的，如$2x^2-y^3-1=0$，$\operatorname{tg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$等等，称为隐函数.

5　函数的几种特性

我们约定：今后，为了叙述时方便，在不强调是开区间的情况下，称区间(a,b)通常是泛指以a、b为端点的各种区间，甚至是无限区间.

(1) 函数的有界性

设函数$y=f(x)$在区间(a,b)(函数定义域或其子集)上有定义，如果存在一个正数M，使得对于任意一个$x\in(a,b)$，对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M \text{ 或 } |f(x)|<M,$$

则称函数$f(x)$在(a,b)上有界(此时，函数的图形位于直线$y=-M$与$y=M$之间)；反之，如果这样的正数M不存在，则称函数$f(x)$在(a,b)上无界(此时，函数的图形可以向上或向下无限延伸).

例如，函数$y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上有界，因为存在$M=1$，使得$|\sin x|\leqslant 1$，而$y=\sin x$的图形介于$y=1$和$y=-1$这两条平行线之间；又如，函数$y=\ln x$的图形可以向下无限延伸，它在其定义域$(0,+\infty)$上是无界的.

(2) 函数的单调性

如果函数$y=f(x)$在区间(a,b)上有定义，对(a,b)上任意

两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，不等式

$$f(x_1)<f(x_2)\text{（或 }f(x_1)>f(x_2)\text{）}$$

恒成立，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上是单调增加（或单调减少）的. 单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数，(a,b) 称为函数的单调区间.

单调增加（或减少）函数的图形是单调上升（或下降）的，反之亦真.

(3) 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$，如果对于任何一个 $x\in D(f)$ 恒有 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果恒有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于纵轴对称；奇函数的图形关于坐标原点对称.

可以证明：

指数为偶数（或奇数）的幂函数 $y=x^n$，是偶（或奇）函数；常值函数 $y=C$（常数）是偶函数；

两个（或几个）偶（或奇）函数的代数和是偶（或奇）函数；两个偶（或奇）函数的积是偶函数；一个偶函数和一个奇函数的积是奇函数；

一个（非零）奇函数和一个（非零）偶函数的代数和既不是奇函数，也不是偶函数，是非奇非偶函数.

例 1.4 判定下列函数的奇偶性：

1. $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$；

2. $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|\ , & |x|<1\\ 0\ , & |x|\geqslant 1\end{cases}$；

3. $f(x)=x^3-2x^2+5x-6$.

解 1. 因 $y(-x)=\ln[\sqrt{(-x)^2+1}-(-x)]$

$$=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$=-\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=-y(x),$$

故 $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 是奇函数.

2. 因 $\varphi(-x)=\begin{cases}|\sin(-x)|, & |-x|<1\\ 0, & |-x|\geqslant 1\end{cases}$

$$=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

$$=\varphi(x),$$

故 $\varphi(x)$是偶函数.

3. 由于 x^3+5x 是两个奇函数的和为奇函数；$-2x^2-6$ 是两个偶函数的和为偶函数；因而 $f(x)$作为一个奇函数和一个偶函数的和是非奇非偶函数.

(4) 函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在正的常数 T，使得等式

$$f(x+T)=f(x),\ x\in D(f)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$为周期函数，T 为 $f(x)$的一个周期.

不难看出，若 T 是周期函数 $f(x)$的一个周期，则 nT($n\in N$)也是 $f(x)$的周期. 通常所说的周期函数的周期是指其最小正周期，记作 T_0.

如，在初等数学里已熟知，$y=\sin x$、$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期，$y=\mathrm{tg}x$、$y=\mathrm{ctg}x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

一般地，函数 $y=A+B\sin(\omega x+\varphi)$及 $y=A+B\cos(\omega x+\varphi)$(其中 A、B、ω、φ 是常数，$B\cdot\omega\neq 0$)，是以 $T_0=\frac{2\pi}{|\omega|}$为周期的周期函数；函数 $y=A+B\mathrm{tg}(\omega x+\varphi)$及 $y=A+B\mathrm{ctg}(\omega x+\varphi)$(其中 A、B、ω、φ 为常数，$B\cdot\omega\neq 0$)是以 $T_0=\frac{\pi}{|\omega|}$为周期的周期函数. 如 y