高等学校试用教材

起重机动力学

上海交通大学　胡宗武
同济大学　阎以诵
编著

GAO DENG XUE XIAO JIAO CAI

机械工业出版社

前 言

本书是根据1985年7月高等工业学校起重运输机械教材编审小组审定的编写大纲编写的，此书为“起重运输与工程机械”专业教材，也可供有关工程技术人员参考。

全书分六章。振动分析的基本原理和主要的计算方法构成本书的中心内容。通过对实际的起重机系统的动态特性的分析和计算，将使理论得到深化。内容的安排系根据机械振动的传统方式，其中前四章是振动分析的基础，包括单自由度和多自由度系统分析的解析法和数值法；第五章讲述用传递矩阵法解传动系的弯、扭振动问题；第六章则是介绍用随机振动的方法分析车辆行驶平顺性。为了说明计算方法，各章均列有一些较简单的实例。书中关于专业问题的实例可供起重机设计人员参考。

本书由胡宗武(第一至第四章)、阎以诵（第五、六章）编著，陈玮璋、苏箓寿审阅。作者感谢严隽琪、余永勤、何逊楠、靳晓雄等对编写提供帮助。限于作者的水平，书中定有遗漏和不妥之处，欢迎读者批评指教。

胡宗武　阎以诵

1986年9月

目　录

第一章　系统的力学模型及参数

§1-1　动力学问题的特点

起重机的共同特点是工作时经常启动和制动。在启动、制动或其它工作状态突然变化时，机械系统将产生强烈的冲击和振动。本书讨论的动力学问题，主要是研究这类机械在启动、制动或其它工作状态突然改变时系统的弹性振动规律，据此确定系统的动力响应。所谓动力响应是指这些机械在振动时各元件中具有代表性部位的位移随时间变化的历程（简称时程）。从位移响应可以求得各元件的应力或应变。当然，响应也可以表为加速度或速度随时间的变化，这两者与位移响应是导数关系。

动力学问题的研究方法是建立在静力学基础之上的，但是它与静力学的研究方法又有明显的不同。首先，静力学问题的解与时间无关，而动力学中的动力响应则是时间的函数。对工程设计来说，最关心的是最大动力响应，因此要从时程中找出最大值。由此可见，动力学问题的计算比静力学的计算要复杂得多，所花费的时间也多得多。其次，由于位移响应是时间的函数，由此系统就存在速度和加速度并随之就会产生抵抗运动的阻尼力和惯性力。这种因果关系的相互关联可用微分方程描述，因此动力响应的求解就是解系统运动微分方程。

一台机器或结构系统产生振动的外部原因是由于受到了外部激励的作用所致。例如，旋转机械由于失衡而产生的离心力的周期激励，结构物受到大风的作用，车辆通过不平的道路的颠簸，建筑物受到地震的冲击等等。对于反复短暂工作的机械，启动和制动是经常发生的，启动、制动时，系统突然受到了原动机的驱动力和制动器的制动力的激励。对于这类机械来说，在工作时系统中突然增加质量或突然卸去质量的情况也是常有的，这就使系统的状态发生突然改变。因此，机械或结构产生振动的根本原因是由于它受到外界的某种激励之故。从激励作用时间看，有瞬态激励和稳态激励。前者如机械的启、制动力，质量的突然变化，地震或阵风的冲击等；后者如失衡，道路不平度的激励等。在很多情况下瞬态激励可化为初始激励（如初位移、初速度激励），虽然，由瞬态激励产生的瞬态振动随时间变化而很快衰减，但它在短时间内产生巨大的动力响应，常成为计算机械强度时确定计算载荷的依据。另外，由于这种振动出现的次数十分频繁，对机器的操作人员的健康具有不可忽视的危害。因此，瞬态振动是这类机械动力学问题研究的最重要方面。

从激励的数学描述方法不同，可分为确定性激励和随机激励两类。所谓确定性激励，就是它在任何时刻的量值可由数学表达式或图形确定；而随机激励的量值只能用统计特征数（如平均值等）表征。当进行实际振动分析时，由于对精度的要求不同，同一激励可按不同类型来处理。例如，一般不平道路对车辆的激励属于随机性的激励，但若只要求作初步的分析，为了简化，也可以把它看成正弦波的或由不同波长的正弦波组合的激励；相反，象偏心旋转件这种明显属于简谐激励的情况，若要作精密的分析，则需要考虑某些随机干扰。对于反复短暂工作机械，当确定最大动力响应时，一般用确定性的分析方法；而当研究结构疲劳强度和研究振动对人体的影响时，则需要采用随机振动的分析方法，它是在确定性振动分析的基础上

引用统计学的某些原理。

要想对机器和结构进行较为精确的动力学分析与计算，通常必须预先知道机器的结构及其基本参数。而在机器设计时，这些参数是未知的。动力学分析的目的不仅为某台机器提供具体的动载荷的参数，而且更重要的是探求同类机器的共同动力学特性，为以后设计提供指导。若要对一大型的设备进行精细的动力学分析，那就要应用逐次近似的方法逐步地进行设计和改进。首先用近似的方法考虑动载荷进行初步设计，然后根据已得的机器结构参数进行动力学分析，再提出改进措施，从而找到最佳方案。最好的方法是用电子计算机并借助于计算机寻优的方法得到最理想的设计方案。但对于小型设备有时宁愿寻求简化的分析方法。

对于那些激励频率很低（例如小于系统基频20%者）或启动、制动力施加得很缓慢的系统，可按刚体动力学的方法计算惯性载荷。若机器的工作速度很低，惯性力可以忽略不计，这就导致简化的静力学的计算。

要对实际的机械和结构进行振动分析，不管用确定性的还是统计的方法，其第一步的工作都是要将实际的机器或结构简化成为理想化的“系统模型”，这是动力学计算分析的基础。

§1-2 建立系统的力学模型

建立实际机器的简化的动力学模型工作包括如下几个步骤：画出力学模型简图；确定力学模型中的元件参数；最后根据力学模型建立动力学研究的数学模型（即建立描述系统运动的微分方程）。本节举例说明力学模型简图的建立方法。

力学模型简图应根据机器或结构特点及所求解问题的要求绘制。力学模型简图应反应机器工作时最本质的物理过程，也就是说力学模型简图应能较好描述分析者所关心的特征点的振动运动。另外，问题的精度要求与计算工作量之间的合理调配也很重要，应综合考虑以上这两方面的因素来决定系统的自由度数和坐标位置的选取。一般自由度数愈多，所得的结果精度也愈高，但计算工作量也随之增加，甚至使解题发生困难。自由度数的选择在很大程度上决定于已有的类似机器和结构的分析计算及试验数据的分析。对已有的类似机器和结构进行测试并作频谱分析后，就可以知道对系统某一部位的动力响应具有决定性影响的是哪几阶主振动。一般地说，系统的自由度数不应小于对响应具有决定影响的固有振型数。

如前所述，系统之所以会产生振动，是因为系统受到了外部的激励。但从系统内部条件来看，振动是由于系统具有质量和弹性之故。从能量转化过程来看，外界对系统的激励就是对系统作功，这个功被储存到系统中，其中一部分化为动能，使质量具有速度；另一部分化为变形位能，使质量移位。反复振动的过程就是激励功、动能及位能之间的不断转换。若系统没有阻尼，那么只要给系统以初始激励，振动就一直延续；若系统具有阻尼，而系统又没有继续从外界获得能量，那么振动在经历一段时间之后终将停止。由此可见，激励、质量、弹性和阻尼是振动系统的四个要素。动力系统的力学模型若要确切地反映其物理过程的话，就应有反映这四个要素的元件或符号。因此从实际的机器简化出的理想化的力学模型是由弹簧、阻尼器和质量块所组成，同时在相应的质量块上作用有外部激励，这三个元件都是被理想化了的。其中，弹簧具有弹性而无质量，当它的一端受一外力时，另一端必产生一大小相等方向相反的力，在这个力的作用下，弹簧产生了与作用力成正比的伸长（或缩短），这个比例常数就是弹簧刚度系数，并以 k 标记，它在力学模型中的画法见图 1-1 a；阻尼器也是无

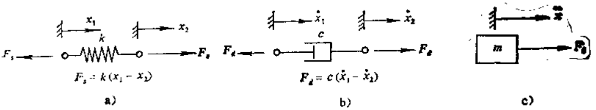

图1-1 力学模型的基本元件

质量元件，它的两端可作相对运动，运动阻力与相对运动的速度成正比，这个比例系数称为粘性阻尼系数，用 c 标记，在力学模型中画法见图 1-1 b；质量块是一个不变形的刚体，当它受到一外力作用时，它就会产生一个方向与作用力相同的加速度，加速度的数值与作用力大小成正比，这个比例系数就是质量块的质量，以 m 标记，它在力学模型中画法见图 1-1 c。

图 1-2 a 是用上述基本元件表示的单自由度系统。这是一个平移系统，即质量作直线移动，弹簧为线形弹簧。对于机械传动的扭转系统，虽然也可以用上述元件建立力学模型，但若用图 1-2 b 所示的模型更形象，其中扭转弹簧用细轴（或线）表示，质量用转动惯量 J 表示，位移用角位移 φ 表示，作用力用转矩 $T(t)$ 表示。

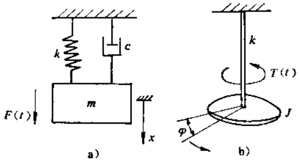

图1-2 单自由度力学模型

有时，只用上述基本元件还不足以表示实际机器的运动情况。例如，通过绳索和滑轮可以使旋转运动变为直线运动，这时就必须引入绝对刚性和无质量的滑轮及完全挠性但不能轴向伸长的绳索；又如在连杆机构中，当杆的质量被简化到端部之后，杆体就用无质量而绝对刚性的杆代替。杠杆也是重要的例子。尽管不用这些辅助元件也可以建立力学模型，但引用这些辅助元件之后可使力学模型更形象化，分析更方便。此外，质量块的转动运动为不可忽略时，则应该把它看作具有转动惯量的。通常忽略转动惯量的质量块称为"点质量"，常常用圆圈或方块表示。而一个圆盘用细轴相连表示绕旋转中心的转动惯量（见图1-2 b）。

一个完整系统的力学模型不但与实际机器的结构有关，而且与所研究问题的内容有关。图 1-3 是几个典型例子。图 1-3 a 是研究汽车在道路上行驶时车身摆动的力学模型，这是两自由度系统，不平的道路可看作是基础激励。这样的模型对研究汽车车身的振动是很合适的。它略去了汽车车身的左右摆动。自然，如果研究的是汽车传动轴系的扭转振动，那力学模型就与此根本不同。图 1-3 b 表示桥式起重机当货物离地提升时桥架及滑轮组系统的力学模型，这里 m_1 是货物的质量，k_1 是滑轮组的刚度，而 m_2 则是桥架在中部的等效质量与小车质量之和。实践证明，若研究的是桥架跨中和绳索的动力响应，则图 1-3 b 的二自由度系统是合适的。若研究的是桥式起重机小车碰撞缓冲器的动力过程，那力学模型就是图 1-3 c，这是一个二自由度系统。图 1-3 d 是移动式起重机动态稳定性的力学模型，k_1 是绳索滑轮组与臂架系统串接的刚度，力学模型图上的臂架是一个刚体，m_1 包括货物质量与臂架在端部的等效质量，m_2 则是除 m_1 之外的起重机总质量，J 是起重机相对倾覆边的总转动惯量，k_2、k_3 是起重机支承结构的刚度。

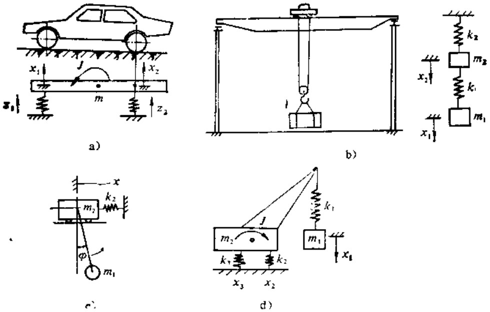

图1-3　系统的力学模型示例

在图 1-3 表示的几个力学模型中均略去了系统的阻尼。在通常的结构及高效率的传动机构中，系统的阻尼很小，因此在研究最大动力响应时，阻尼可略去不计。

确定了力学模型简图之后，应进一步确定力学模型的各参数，主要是系统的刚度参数和质量参数。

§1-3　系统的弹性特性

一、刚度系数法

若系统是单自由度的，那么系统的刚度（用刚度系数 k 表示）就很容易确定。例如对图 1-4 a 所示的弹簧质量系统，则刚度系数 k 就是使质量 m 移动单位长度所需的力；对图1-4 b 所示的简支梁，若梁质量被跨中的等效质量 m 代替，则也化为单自由度系统，其刚度系数 k 就等于简支梁在跨中受到单位力时跨中挠度的倒数，即 $k=48EI/l^3$，式中 E 为材料弹性模量，I 为梁断面面惯矩，l 为梁跨度。通常单自由度系统受单位力时的变位称为系统的柔度系数，常用 δ 表示，因此有 $\delta=1/k$。若系统是多自由度的，那么刚度系数和柔度系数就不只一个。一般说来，n 个自由度系统有 n^2 个刚度系数(或 n^2 个柔度系数)。由 n^2 个刚度系数依次排成的方阵称为系统的刚度矩阵。由 n^2 个柔度系数组成的方阵称为系统的柔度矩阵。

可以仿照单自由度系统那样来定义多自由度系统的刚度系数。即：刚度系数 k_{ij} 定义为使广义坐标 x_j 产生单位位移而其它坐标位移为零时，在广义坐标 x_i 上所需施加的力。应用这个定义，对于如图 1-4 c 所示的链式弹簧质量系统或图 1-4 d 所示串接扭转系统，很容易建立系统的刚度矩阵。例如对 1-4 c 系统，令 $x_1=1$，$x_2=x_3=\cdots=0$，则易知：

$$F_1=k_{11}=k_1+k_2,\quad F_2=k_{21}=-k_2,\quad F_3=F_4\cdots=0$$

其中 F_1为克服弹簧 k_1及 k_2的弹性力（$x_1=1$ 时）而施加到 m_1上的力，而要使 m_2不移动 F_2 的力应等于 k_2，方向沿坐标的反向。依次分别对 m_2、$m_3\cdots$作单位位移，可得 k_{22}，k_{32}, k_{33}，k_{43}，…等。利用功的互等定理（有时被称为 Betti 定理）可得：

$$k_{ij} = k_{ji} \tag{1-1}$$

把这些刚度系数收集到方阵中依次排列，就得到系统的刚度矩阵，写成一般形式为：

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \tag{1-2}$$

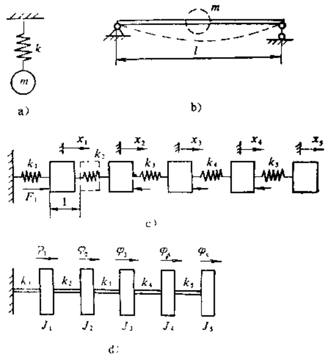

图1-4 系统刚度系数

对于结构系统，例如图 1-5 所示的梁，从理论上说也可以从刚度系数法得到刚度矩阵，但实际计算上却颇为麻烦。在这种情况下用下述的柔度系数法更简便。

二、柔度系数法

柔度系数 δ_{ij}，定义为在广义坐标 j 上施加单位力，而其它广义坐标无外力时沿广义坐标 i 所产生的位移。例如，对图 1-5 b 所示的集中质量梁系统，对 m_1 施加 $F_1 = 1$ 的力，则 m_1 的 y 向位移就是 δ_{11}，m_2 的 y 向位移就是 δ_{21}，等等。由于这些位移可用结构静力学方法计算，因此柔度系数就不难得到。同样对柔度系数有 $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ 关系，因此计算量可减少一半。把所有柔度系数收集到一方阵中依次排列，就得系统的柔度矩阵，写成一般形式为：

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \tag{1-3}$$

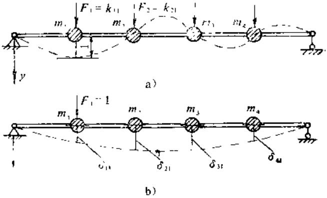

图1-5 梁横向位移时刚度系数和柔度系数

对结构系统用有限元法分析是很方便的，关于用有限元法建立刚度矩阵的方法，可参阅结构力学课程中的有关论述。

三、传动机构元件刚度系数的确定

当传动机构元件的刚度和转动惯量确定之后，就可得到力学模型图，它一般是所谓盘轴系统，即以绝对刚性的圆盘代表转动惯量，以无质量的细轴表示扭转弹簧，可以是串联的或分叉的系统。传动元件如传动轴、联轴器、齿轮对、钢丝绳等。下面列出这些元件刚度系数的计算式。

空心圆轴的刚度系数按下式计算：

$$k_t = \frac{\pi G}{2l}(r_{max}^4 - r_{min}^4) \quad (1-4)$$

式中 G——轴的材料剪切弹性模数；

r_{max}——轴的外径；

r_{min}——轴的内径；

l——轴的长度。

齿轮对的刚度系数按如下经验公式计算：

$$k_t = 1.2b\varepsilon_p \times 10^7 \quad (1-5)$$

式中 k_t——齿轮对的刚度系数，〔k_t〕为N/m；

b——齿宽，〔b〕为cm；

ε_p——重叠系数，无量纲。

钢丝绳的刚度系数按下式计算：

$$k = E_s A / l \quad (1-6)$$

式中 A——钢丝绳横断面中金属的面积；

l——受力钢丝绳的总长度；

E_s——钢丝绳整体受拉弹性模量，与绳结构（股、丝数、捻制法）有关，平均取 $E_s = (1\sim1.2)\times10^6$ N/m²。

当直线位移的刚度系数换算为扭转位移的刚度系数时，应将直线刚度系数乘以作用力作用半径的平方。若将低速传动轴上的扭转刚度系数转换到高速轴上的扭转刚度系数，应除以这两轴间速比的平方。

§1-4 系统的质量特性

一般结构元件的质量都是均布的。通常把分布质量离散为若干集中质量。最简单的离散法是集中质量法；在有限元法中可用比较精确的离散法，即所谓一致质量法。对机械传动机构可用能量法。

一、集中质量法

结构件质量最简单的离散方法是把结构划分为有限个单元，然后把每一单元质量按静力平衡的方法分配到单元端部的节点上。

例如，象图 1-6 所示的简支梁，可按实际要求的精度划分为若干段(图中划为5段)，然后把每一段的质量按静力学的原则分配到梁段两端的节点。如图中 a 段质量被分为 m_{0a} 及 m_{1a}，b 段被分为 m_{1b} 和 m_{2b}，…，于是节点1的质量就是：$m_1 = m_{1a} + m_{1b}$，…。

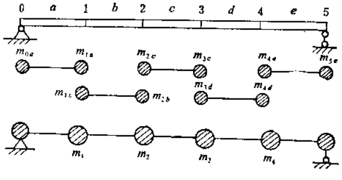

图1-6 集中质量法

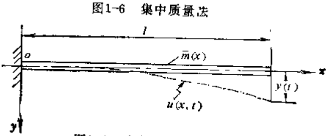

图1-7 分布质量的悬臂梁

当梁段划分得足够细时，按静力学原则分配两端质量可得到相当好的结果。若单元划分较粗，甚至在结构系统中用一个大构件为一单元，那么可以用能量法把质量分配到指定的节点。例如，象图 1-7 所示的悬臂梁，其单位长度的质量用 $\bar{m}(x)$表示。若假定挠曲形状函数为 $\psi(x)$(无量纲量)，选择自由端的位移 $y(t)$为广义坐标，则整个悬臂梁的位移曲线可写成为：

$$u(x, t) = \psi(x)y(t)$$

它的速度为：

$$\dot{u}(x, t) = \psi(x)\dot{y}(t)$$

设广义坐标的最大速度为 v_{max}，则悬臂梁的最大动能为：

$$T_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l \bar{m}(x)[v_{max}\psi(x)]^2 dx = \frac{v_{max}^2}{2}\int_0^l \bar{m}(x)[\psi(x)]^2 dx$$

设广义坐标处有一假想的集中质量 m_{eq}，其最大速度为 v_{max}，其最大动能 $T_{eq} = \frac{1}{2}m_{eq}v_{max}^2$，令 $T_{eq} = T_{max}$，得假想质量为：

$$m_{eq} = \int_0^l \bar{m}(x)[\psi(x)]^2 dx \tag{1-7}$$

式(1-7) 是一般确定等效质量的公式，对其它分布质量的元件也适用。如用于等断面悬臂梁，取 $\psi(x)$为：

$$\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2l}$$

代入式(1-7) 积分后得：

$$m_{eq} = \int_0^l \bar{m}\left[1 - \cos\frac{\pi x}{2l}\right]^2 dx \cong 0.228\bar{m}l$$

若用于等断面简支梁，令 $\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{l}$，代入积分后得：

$$m_{eq} = \bar{m}\int_0^l \left[\sin\frac{\pi x}{l}\right]^2 dx = 0.5\bar{m}l$$

从以上例子可以看出，当单元较大时，用静力学方法分配质量在某些情况下是不合适的，例如悬臂梁就是如此，若按静力方法分配质量，那么在悬臂端的质量应是 $0.5\bar{m}l$，而按能量法则为 $0.228\bar{m}l$。对于简支梁的例子，按静力学方法和按能量法得到的结果相同。

由集中质量法得到了各个集中质量之后，就可方便地构成质量矩阵。质量矩阵元素 m_{ij}在数值上可定义为：x_j 坐标具有单位加速度时在 x_i 坐标上引起的惯性力。按照这个定义可以看出，在最简单的情况下，由集中质量法得到的质量 m_1，m_2，…，m_K 是一维数组，它组成质量矩阵的对角线元素。因为任一质量的加速度只在该加速度坐标上产生惯性力，因此 $m_{ij}(i \neq j)$ 为零。于是 m_{ii} 在数值上就等于 x_i 坐标具有单位加速度时该质量所引起的惯性力。当一质量具有空间三个方向自由度时，同一质量同时作为质量矩阵中相应的三个对角元素。没有转动惯量的质量叫“点质量”或质点，若系统的质量集中点具有转动自由度，那么与这个旋转自由度相应的质量矩阵的对角线元素为零。若某质量具有一定的转动惯量，并标

上与转动自由度相应的坐标，那么质量矩阵增加一个相应大小的对角元素。总之，一般由集中质量法建立的质量矩阵是一对角阵：

$$[M]=\begin{bmatrix} m_{11} & & & \\ & m_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_{nn} \end{bmatrix}=[M] \tag{1-8}$$

集中质量法不仅构造质量矩阵简单，而且由于所构成的质量矩阵是对角阵，因此在建立微分方程时就没有惯性耦合，给解题带来方便并节省计算机的存储单元，减少运算次数。这是建立质量矩阵的最常用的方法。

与确定单元刚度影响系数的方法类似，也可以用有限元概念建立单元质量影响系数。但用一致质量法计算质量系数，不仅计算本身麻烦，而且更重要的是所得到的质量矩阵常是稠密阵，这导致了运动方程的质量耦合并增加了计算机的存储单元和运算次数。这一方法虽然在原理上说可以导致较精确的结果，但实际上这点微小的精度改进，往往会被计算复杂带来的误差所抵销，因此在实际工作中很少应用这种方法。

二、扭转系统的质量

计算机器传动机构扭转振动时，转动件的转动惯量通常用集中质量法确定。由于传动轴的转动惯量很小，因而常略去不计。电动机转子、联轴器、制动轮等可认为是具有集中的转动惯量。对于形状较简单的零件可用计算方法计算其转动惯量，有些零部件的转动惯量可从工厂的产品目录中获得。但从计算及产品目录得到的参数，往往有误差，故有时需用试验的方法来确定它们。

当元件的质量或转动惯量确定之后，就可形成系统的质量矩阵。对于传动机构，一般系统的质量矩阵也都是对角阵，对角线上的元素依次为按广义坐标号标注的对应质量（或转动惯量）。

自然，在建立质量矩阵之前，系统力学模型已建立，即自由度数及相应的广义坐标都已确定。需要特别指出的是，一般要将传动系统中不同转速的运动质量换算到同速的轴上，或全部换算为直线运动系统。不同轴转动惯量的换算应用刚体运动的动能相等原理。直线运动的质量与旋转轴上的转动惯量之间的换算也遵循这个原理。

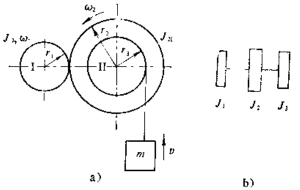

图1-8　转动惯量的转化

例如图 1-8 所示的具有绳索卷筒的系统，具有三个集中质量 J_1、J_{20}及 m，若把它转化到轴 I（高速轴）上建立模型（见图1-8 a），则在轴 II 上的转动惯量 J_{20}和直线运动质量 m 要按刚体运动的动能相等原理转化到轴 I 上。J_{20}转化后为 J_2，它们间的关系如下：

$$\frac{J_{20}\omega_2^2}{2}=\frac{J_2\omega_1^2}{2}$$

所以

$$J_2=J_{20}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2=J_{20}/i^2 \tag{1-9}$$

式中 $i=\omega_1/\omega_2$是轴Ⅰ与轴Ⅱ间的速比。

直线运动质量m转化到轴Ⅰ后为J_3，它们间关系为：

$$J_3=m\left(\frac{v}{\omega_1}\right)^2\approx91.2m\left(\frac{v}{n_1}\right)^2 \tag{1-10}$$

式中 J_3——m换算到轴Ⅰ后的转动惯量，$[J_3]$为kg·m²；

v——质量m的运动速度，$[v]$为m/s；

n_1——轴Ⅰ的转速，$[n_1]$为r/min。

§1-5 系统的阻尼特性

在振动分析中，如何考虑阻尼是一个比较复杂的问题。一方面是由于机器结构中的阻尼机理较为复杂，较难用精确的数学公式来描述；另一方面，即使可将阻尼关系用较为合适的公式予以描述，但把这种描述公式放到振动运动方程中去时可能会对微分方程的求解带来困难。

幸好在一般的工程结构中，通常阻尼都是比较小的，它对振动的影响反映是“缓慢”的。基于这一事实，在振动分析中，对阻尼可作简化处理。通常的方法是，假定其为粘性阻尼，即阻尼力与运动的相对速度成正比，它的力学模型如图1-1b所示。由于阻尼与速度成正比，因此在此阻尼参预下系统的运动方程是线性微分方程，这为方程的解提供了方便。对于别种阻尼，如与速度平方成正比的阻尼、库仑阻尼、结构阻尼等，可用功能原理把它们换算成等效粘性阻尼。对于结构阻尼也可用复阻尼理论，应用这一理论在引入结构复刚度概念后，也可以把振动方程化为线性方程。

假定粘性阻尼后，问题就归结为如何确定粘性阻尼系数c。目前，阻尼系数c通常通过实际测定求得。系数c的单位是N·s/m或kg/s。为了表示及计算方便，通常应用无量纲量ζ，它与c的关系如下：

$$\zeta=c/2m\omega_n \tag{1-11}$$

式中 m——单自由度系统的质量；

ω_n——单自由度系统的固有频率。

在多自由度系统中，对于不同的主坐标，ζ值可能不相同，可用ζ_i表示，还可能有耦合项。对于起重机的金属结构，一般$\zeta=0.008\sim0.05$，其中焊接结构取$\zeta=0.008\sim0.01$，铆接结构取$\zeta=0.015\sim0.05$。

对于传动机构，ζ值与机构效率η有关，作为近似估算，可利用如下关系：

$$\zeta=(1-\eta)/4\pi \tag{1-12}$$

一般认为，阻尼对瞬态振动的最大动力响应影响较小，对稳态振动的共振振幅产生较大的抑制作用。对冲击振动分析来说，阻尼主要对振动的衰减有较大的影响，而振动的衰减对操作人员来说是一个重要指标。在研究振动衰减时，使用对数衰减率这一术语更为方便。对数衰减率定义为相邻两个振幅之比的自然对数：

$$\delta=\ln\frac{a_i}{a_{i+1}}=\ln\frac{e^{-\zeta\omega_n t_i}}{e^{-\zeta\omega_n(t_i+T)}}=\zeta\omega_n T=\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\approx2\pi\zeta \tag{1-13}$$

§1-6 系统的外载荷

若作用在系统上的外载荷由与广义坐标相适应的集中力组成，那么可以直接写出外载荷向量。但对结构系统来说，外载荷不仅可能作用在单元节点上，也可能作用在别的位置上或是分布的载荷。在这种情况下，要把这些载荷转化为节点载荷，最简单的方法是按静力学的方法，把它们换算到节点上，换算的节点载荷就是所有这些载荷的支承力。显然，若节点上没有直接作用的外力偶合的话，那么节点载荷就只有与平动自由度相应的分量。

也可以用有限单元法概念计算各节点的载荷。这个方法与一致质量法相同，所导出的广义力称为一致节点载荷。如图1-9所示的梁段，在全跨受均布载荷$F'(x,\ t)$，若给左支点一虚位移δu_1，引起的左支点的节点力为F_1'，则外力的功为$F_1'\delta u_1$，内力的功为

$$\delta u_1\int_0^l F'(x,\ t)\psi_1(x)\mathrm{d}x$$

使这两者相等，就导出节点力为：

$$F_1'(t)=\int_0^l F'(x,\ t)\psi_1(x)\mathrm{d}x$$

或写成更一般的形式为：

$$F_i'(t)=\int_0^l F'(x,\ t)\psi_i(x)\mathrm{d}x \tag{1-14}$$

式中的插值函数$\psi_i(x)$应与计算单元刚度系数所用的插值函数相同，这样得到的节点载荷就是真正的“一致载荷”了。若改用简单的线性插值函数（对左支点）

$$\psi_1(x)=1-\frac{x}{l}$$

则由式（1-14）算出的与按静力学方法确定的支承反力相同。

在分析传动机构的扭转振动时，原动机的驱动力和制动器的制动力是一种典型的外载荷。最常用的原动机是电动机，特别是电动机转子串接起动电阻的感应电动机。对这种电动机，其驱动力是随电动机的速度而变化的，其变化率可近似地认为不变，其变化特性见图1-10。根据图示的符号，切去第i级电阻之后，电动机驱动转矩随速度按第$i+1$根特性曲线变化，其驱动转矩与速度的关系如下：

$$T(n)=\frac{n_0-n}{n_0-n_i}T_{max} \tag{1-15}$$

当应用式（1-15）计算驱动力时，驱动力将与电动机的转速有关。如果是多自由度系

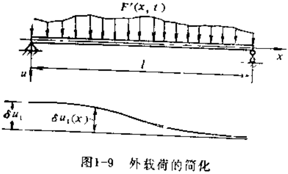

图1-9 外载荷的简化

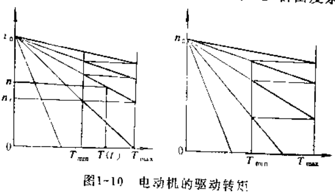

图1-10 电动机的驱动转矩

统，则依此建立起来的运动方程将具有“阻尼力”的耦合，而且应用通常的主坐标方法无法解耦。这对解题带来了困难。为了解决这个困难，作为一阶近似，可按刚体动力学的方法，将电动机驱动转矩转换为只与时间有关的函数。设驱动机构的总转动惯量为 J，机构运动阻力 T_R 为常数，驱动力为 $T(t)$，则根据牛顿第二定律有：

$$T(t)=J\frac{d\omega}{dt}+T_R \tag{1-16 a}$$

令 $t=0$ 时具有初速度 ω_{01}，对上式积分，得：

$$\omega(t)=\omega_{01}+\left[\left(1-\frac{T_R}{T_{max}}\right)\omega_0-\omega_{01}\right](1-e^{-t/T}) \tag{1-16 b}$$

式中，T_{max}为 $t=0$ 时的驱动转矩；ω_0为电动机同步速度；$T=\dfrac{\omega_0 J}{T_{max}}$为电动机的时间常数。

对式（1-16 b）求导后代入式（1-16 a）得：

$$T(t)=T_R+\left[T_{max}\left(1-\frac{\omega_{01}}{\omega_0}\right)-T_R\right]e^{-\frac{t}{T}} \tag{1-16 c}$$

利用式（1-16 c）作为激励力，就与振动速度无关了。

机构的制动转矩也是一种常见的外载荷。通常有电气与机械制动的联合或单独使用机械制动器。图1-11表示电动机反接制动与机械制动器联合作用的特性。设电气制动时电枢中串入足够的电阻，反接时的特性曲线为 2，正常运行时为自然特性曲线 1。反接制动时，从正向静阻转矩 T_R 突然到反向转矩 T_{emax}，接着沿曲线 2 减速，降到一定速度时再施加机械制动。

同样也可以用刚体动力学的方法把制动转矩随速度的变化转换为随时间的变化。对机械制动，可认为它与时间无关，等于常数。

在电气制动期间，制动转矩与时间的关系可按式（1-16）类似的方法推导，得：

$$T_e(t)=\left(T_R-\frac{\omega_0}{\omega_0+\omega_b}T_{emax}\right)+\left(\frac{\omega_b+2\omega_0}{\omega_b+\omega_0}T_{emax}-T_R\right)e^{-\frac{t}{T}} \tag{1-17}$$

由柴油机驱动的起重机械，机构是依靠摩擦离合器启动的。摩擦离合器接入时转矩是逐步增长的(图1-12)，增长的规律不管是按指数曲线 2 还是正弦曲线 1，计算表明都可以用直线代替。

用离合器启动的传动机构，机构在接入前、后系统质量是不同的。接入之前，离合器主动部分可看作不参预系统运动，离合器接入之后，离合器的主动部分（包括原动机的运动质量）参预了系统。

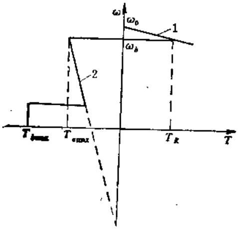

图1-11　制动转矩

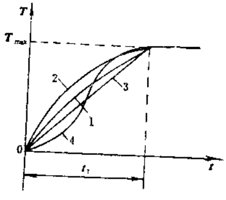

图1-12　摩擦离合器转矩变化曲线

第二章　单自由度系统的振动分析基础及应用

§ 2-1　概　　述

首先说明系统自由度的概念。在弹性振动分析中，系统的自由度数定义为：描述一个系统中所有质量在空间位置所必需的独立坐标数。因此，与刚体机构运动分析不同，在这里每一很简单的弹性构件，从严格意义上说，都具有无限多的自由度。但是，在研究由众多弹性构件组成的弹性系统的振动时，按无限多自由度来处理是极端困难的，同时也是完全不必要的。对于工程实际系统，完全有必要而且有可能做简化的处理。例如，在研究由一对齿轮组成的系统振动时，与齿轮相比轴的转动惯量是可以忽略不计的，而齿轮轮体也可以看作为绝对刚性；若研究的是起重机运行机构传动系统的振动，那么，与整个起重机运行质量相比，齿轮的质量就是微不足道的了。许多实测结果表明，起重机结构与机械构件振动的实际波形主要由低频振动构成。理论研究也指出，作为近似计算，可以将这类机械按实际要求简化成1～3自由度系统。将实际的机器或结构按所求解问题的要求简化成单自由度系统进行分析，显然，其优点是分析计算简单，从此可得到估算系统动载荷的简明计算公式。这些估算公式不需要机器、结构的详尽的参数，因此用来做初步设计非常方便。这些计算公式受到了设计师的欢迎。

从振动分析来看，单自由度系统的分析是基本的。以后将会看到，多自由度系统的运动微分方程经过线性变换之后，可以解耦为多个独立运动微分方程，解耦后的独立微分方程的求解，可以应用单自由度系统的分析方法。

本章将首先对单自由度系统振动分析的基本方法作简明的介绍，然后应用这些基本原理具体分析起重机机构和结构的振动，并导出动载荷的计算公式。

单自由度系统的振动运动微分方程如下：

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t) \tag{2-1}$$

式中　m ——系统的质量；

c ——粘性阻尼系数；

k ——系统的刚度系数；

x ——系统的位移；$\dot{x}$、$\ddot{x}$ 为 x 对时间的一、二阶导数；

$F(t)$——激励力。

在这里我们要指出的是，在本书所研究的范围内方程（2-1）是线性的、常系数的微分方程。因为我们研究的是弹性系统在静平衡位置附近的微小弹性振动，因而刚度系数与位移 x 无关；在一般情况下，m、c、k 也与时间无关。在以后的多自由度系统研究中将会看到，起重机从地面提取货载或突然卸去货载时，系统的质量将产生变化。对于这样的问题，我们把货载离地前、后（或卸载前、后）看成为两个系统，于是对每一系统质量是不变的。在研究起重机变幅过程的振动时，不仅质量（转动惯量）随时间变化，而且刚度系数也随时间变化，这就构成一时变系统。当把变幅过程划分成较小的时间间隔之后，在很小的时间区段中，

质量和刚度系数就可看成为不变的。总之，我们研究的是线性的、定常的系统。

当方程等号右侧为零时，式（2-1）变为齐次方程。齐次方程描述的是自由振动，就是说自由振动是没有外激励作用的振动。非齐次方程（2-1）描述的是强迫振动。强迫振动的形式与激励力$F(t)$的形式有关，若$F(t)$是时间的简谐函数，那么振动也是简谐的；若$F(t)$是由多种频率的简谐函数组成的一般周期函数，那么稳态响应也一定是由多种频率的简谐振动组成；若$F(t)$是一个脉冲力，那么响应一般是由多种频率的固有振动组成；若$F(t)$是随机激励，那响应也将是随机的。下面将分别对单自由度系统的自由振动和在各种激励下的强迫振动作一简要的分析。

§2-2　单自由度系统的自由振动

一、自由振动的响应

引用下列符号：

$$c/m = 2\zeta\omega_n,\quad \omega_n^2 = k/m$$

后，自由振动（$F(t)=0$）的微分方程变为：

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{2-2}$$

式中　ω_n——系统的固有频率（s^{-1}）；

ζ——阻尼比（无量纲）。

对于齐次微分方程（2-2），可按通常的方法求解。设解的形式为$x = Ae^{st}$，代入方程（2-2）可得：

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)Ae^{st} = 0$$

要得到非平凡解，就必须使上述方程的圆括号内的各项和为零，此即所谓频率方程。从此频率方程可得到s的两个根：

$$s_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$$

得到两个根s_1和s_2后，就有两个特解$e^{s_1 t}$和$e^{s_2 t}$，将这两个特解线性叠加就构成了方程（2-2）的全解。值得注意的是，并非所有s_1、s_2构成的全解都是振动运动。我们观察一下$s_{1,2}$的表达式就可知，若$\zeta > 1$，则s_1、s_2均为实数，由此构成的全解必然是指数衰减运动，不是振动运动。若$\zeta < 1$，则s_1、s_2均为复数，即$s_{1,2} = (-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n$。用这两个复数根为指数构成全解，得：

$$x = e^{-\zeta\omega_n t}(A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t})$$

式中　ω_d——阻尼固有频率，$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$

将$e^{\pm i\omega_d t}$用欧拉公式展开，代入上式便得：

$$x = e^{-\zeta\omega_n t}[c_1\cos\omega_d t + c_2\sin\omega_d t] \tag{2-3}$$

式中c_1、c_2为积分常数。设时间$t=0$时系统具有初位移$x(0)=x_0$，初速度$\dot{x}(0)=\dot{x}_0$，将这二个初始条件代入上式可得积分常数：$c_1 = x_0$，$c_2 = (\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0)/\omega_d$，于是得包含初始条件的自由振动的响应为：

$$x = e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0\cos\omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right] \tag{2-4}$$

若系统的阻尼可以忽略，即$\zeta = 0$，则响应简化为：

$$x = x_0\cos\omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t \tag{2-5}$$

二、对数衰减率

系统阻尼对最大动态响应影响很小，但对自由振动延续时间的长短却具有决定性的作用。例如，当起重机货载离地之后，系统处于自由振动，阻尼越大，自由振动的延续时间就越短。既然振动不可避免，那么振动延续时间越短，对设备尤其对操作人员的危害就越小。有些起重机设计规范规定了允许的最长延续时间，从此可导出允许的最大固有周期。

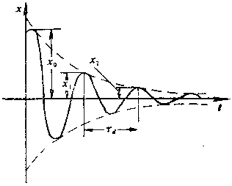

图2-1　阻尼自由振动的衰减

振动衰减的快慢，可用对数衰减率来度量。对数衰减率定义为相邻振幅比的自然对数（见图2-1）：

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln\left[\frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n(t+\tau_d)}}\right] = \zeta\omega_n\tau_d$$

式中 τ_d 为阻尼振动周期，可用下式计算：

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}$$

将 τ_d 代入对数衰减率的表达式，得：

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 2\pi\zeta \tag{2-6}$$

设第一次出现的振幅为 x_0，经过 n 次振动循环后的振幅衰减到 x_n，则对数衰减率 δ 也可以用 x_0 与 x_n 之间关系表示：

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_0}{x_n}\right) \tag{2-7}$$

若已知系统的对数衰减率 δ 和系统的自振周期 τ_d，那么给定初振幅 x_0 与末振幅 x_n 的比值之后，便可根据式（2-7）计算衰减时间。或者反过来，给定比值 x_0/x_n 及要求的衰减时间，便可计算出最大固有周期 τ_d，这样可对起重机结构的刚度给予限制。

§2-3　简谐激励的响应分析

上一节讨论了自由振动，从本节开始分析强迫振动和瞬态振动。强迫振动是指系统始终承受外部激励的振动，而瞬态振动则是指系统受到短时间冲击产生的振动。强迫振动的激励有随机激励和周期激励两种，随机激励的响应分析将在第六章讨论。按照傅里叶原理，任何一周期函数均可分解各种频率的简谐函数，因此简谐激励是基本的。

一、简谐激励的响应

设简谐激励力以指数函数 $F_0e^{i\omega t}$ 表示，则运动方程为：

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0e^{i\omega t}$$

令稳态解为：

$$x = Ae^{i\omega t}$$

将此假设解及其一、二阶导数代入运动方程并消去 $e^{i\omega t}$，得：