

硕士研究生入学考试解题指南

工程数学



安徽教育出版社

特约编辑：卢树铭

封面设计：宋子龙

硕士研究生入学考试解题指南

工 程 数 学

安徽教育出版社出版

(合肥市跃进路1号)

安徽省新华书店发行 安徽新华印刷厂印刷

•

开本：787×1092 1/32 印张：94.75 字数：335,000

1985年12月第1版 1986年12月第1次印刷

印数：21,500

统一书号：7276·347 定价：2.40元

出版说明

我社自1980年开始每年出版当年“硕士研究生入学试题汇解”以来，深受广大读者欢迎。我们总结多年来出版这类书籍的经验，并根据广大读者的意见，认为它虽然能为广大读者提供当前应考参考资料，但随着时间的推移，往往使人感到有它的局限性。为了有助于考生能进一步掌握有关考试学科的重要内容，尤其是尽快增强解题能力和考试中的应变能力，我们特约请中国科学技术大学、南京大学、南京工学院、安徽大学、合肥工业大学等院校的具有辅导硕士研究生入学考试经验的教师，编写了这套《硕士研究生入学考试解题指南》供读者学习参考。

这套丛书有《高等数学》、《工程数学》、《普通物理学》、《热力学·统计物理学》、《电动力学》、《量子力学》、《物理化学》、《无机化学》、《高分子物理和化学》和《英语》。共计十种。

鉴于本丛书不是一般的复习纲要，因此本书不拘泥于本学科的自然体系分章分节，对本学科应掌握的主要知识不是条文式的罗列，而是通过问题的提出或通过解题过程让读者体会和掌握应该具备的基础知识；本书又不是一本单纯的试题汇解，因此，它并非就题解题，而是以帮助读者如何正确审题、引导读者总结解决相应类型问题的基本规律。特别是对那些灵活多变、技巧性强的问题，着重向读者提供解决问题时可供选择的思路，给出最优解法，使读者能通过比

较，启迪解题的灵活性和技巧性。对那些容易引起混淆和易犯错误的问题，通过解题过程向读者指明，以达到正确解题的目的。

本书编写打破学科自然体系和命题学校的界限，而以问题的性质和类型进行归类。例题及习题选择既突出重点，又尽可能地覆盖本学科的主要内容。所选择的例题、习题以历届研究生入学试题(包括1985年试题)为主要素材，从中找出各年和各命题学校入学试题的共性和个性。对提出的问题，按问题的难易、技巧性的强弱，分别给出提示、略解或详解，并给出必要的分析。

前 言

编写一本篇幅适中,既能帮助报考硕士研究生的读者复习高等数学和工程数学基础知识又能启迪读者思维、提高解题能力的解题指南,是一项很有意义的工作。目前供报考硕士研究生用的复习资料、试题汇解等复习辅导书种类较多,但通过问题帮助读者复习基础知识,并灵活、综合运用它,提高审题、解题能力的复习指导书尚不多见。基于这一点,编者以教育部颁发的高等理、工院校(非数学专业)的“高等数学”和“工程数学”教学大纲为依据,参照我国各高等院校招收硕士研究生对数学知识和能力方面的要求,结合编者多年辅导报考硕士研究生的在校大学生复习的经验,编写了这本“工程数学”解题指南,供广大有志报考硕士研究生的读者参考。

本书由于是一本帮助读者提高能力、掌握技巧,增强应试时的适应性和应变能力的解题指南,所以在编写时既注意参照历年来各校硕士研究生入学试题的题型以突出其共性,同时又注意强调各种不同试题的个性中所反映的解题技巧。它通过问题的解析帮助读者复习相应的内容和从解析问题的过程中逐步领会和掌握解题的基本思路和解题技巧,通过对问题的分析、注和提示等以帮助读者领会解题要领、解题方法和需要防止容易产生混淆和忽略之点。本书各单元所选讲的问题基本上反映出本单元的主要解题方法和技巧,覆盖本单元的基本内容。本书在编写上力求生动活泼,力求克服定

理、概念的复述，又防止单纯地就题解题的现象。本书提供的问题既有传统题又有难度较大、综合性及灵活性较大、技巧性较高的题目，并根据问题的难易分别给出详解、略解或提示，在题目编选中既有独立性的问题、又有逐步引伸相互关联的系列题，目的在于解题方法和技巧的指导。

本书在编写过程中得到全国高等工科院校数学教材编审委员会委员、南京工学院教务处长陶永德副教授的大力支持、热情帮助，又蒙《工科数学》杂志常务编委、合肥工业大学卢树铭副教授非常细致的审阅、修改了全稿，在此一并表示感谢。

由于时间仓促，加之水平所限，缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

编 者

一九八五年七月

目 录

第一章 矢量分析与场论	(1)
一、矢量分析	(1)
二、场 论	(7)
第二章 线性代数	(26)
一、行列式	(26)
二、矩阵运算	(45)
三、向量的线性相关、矩阵的秩、线性方程组	(58)
四、线性空间、欧氏空间及线性变换	(83)
五、特征值、矩阵的相似	(103)
六、二次型、实对称矩阵	(110)
七、杂 题	(121)
第三章 复变函数	(128)
一、复 数	(128)
二、复变函数及其解析性	(142)
三、复变函数的积分	(158)
四、解析函数的台劳级数和罗伦级数	(173)
五、留数及其应用	(189)
六、保角映射	(226)
第四章 积分变换	(242)
一、傅里叶变换	(242)
二、拉普拉斯变换	(252)
第五章 数学物理方程与特殊函数	(265)
一、方程的分类、化简与通解	(265)

二、行成法	(273)
三、分离变量法	(284)
四、积分变换法	(323)
五、镜像法与视察法	(337)
六、特殊函数及其应用	(350)
第六章 概率论	(369)
一、古典概率及随机事件的概率	(369)
二、全概率公式、逆概率公式的应用	(386)
三、随机变量及其分布	(395)
四、数字特征及其应用	(429)
五、切比雪夫不等式和极限定理	(452)

第一章 矢量分析与场论

一、矢量分析

1. 证明对任何矢量 $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$, 下式成立

$$(1) \quad \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = v \frac{dv}{dt}, \quad \text{其中 } v = |\mathbf{v}|,$$

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \mathbf{v} \times \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}.$$

分析 利用矢性函数的导数公式:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B},$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B}.$$

解 (1) 由 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2$ 两端对 t 求导

$$\text{左} = \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

$$\text{右} = \frac{d}{dt} (v^2) = 2v \frac{dv}{dt}$$

$\therefore$ 原式成立.

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \mathbf{v} \times \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\because \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{0}$$

∴ 原式成立.

2. 一质点运动的位置矢量为 $\mathbf{r} = \cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}$, 其中 ω 为常数, 证明: (1) 质点的速度 $\mathbf{v}$ 垂直于 $\mathbf{r}$; (2) 加速度 $\mathbf{a}$ 指向原点且其大小和原点到质点的距离成正比; (3) $\mathbf{r} \times \mathbf{v} =$ 常矢量.

$$\text{解 (1) } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega \sin \omega t \mathbf{i} + \omega \cos \omega t \mathbf{j},$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} &= [\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}] \\ &\quad \cdot [-\omega \sin \omega t \mathbf{i} + \omega \cos \omega t \mathbf{j}] \\ &= -\omega \sin \omega t \cos \omega t + \omega \sin \omega t \cos \omega t = 0 \end{aligned}$$

∴ $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{v}$ 垂直.

$$(2) \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - \omega^2 \sin \omega t \mathbf{j}$$

$$= -\omega^2 [\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}] = -\omega^2 \mathbf{r}$$

于是 $\mathbf{a}$ 的方向与 $\mathbf{r}$ 相反, 即指向原点. 它的大小和自原点到该点的距离 $|\mathbf{r}|$ 成正比.

$$\begin{aligned} (3) \mathbf{r} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t & 0 \end{vmatrix} \\ &= \omega (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) \mathbf{k} = \omega \mathbf{k} \end{aligned}$$

∴ $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ 是一个常矢量.

3. 试建立直角坐标系. 柱坐标系及球坐标系的坐标矢量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}; \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z; \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ 间的关系.

分析 首先在柱坐标系及球坐标系中, 分别确定坐标曲线的方程(参数式). 由此求出曲线上切向矢量在直角坐标系中的投影表示, 然后单位化即得相应坐标矢量在直角坐标系中的投影表达式.

解 点 P 的直角坐标 (x, y, z) 与柱坐标 (ρ, φ, z) 间的关系是

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (1)$$

柱坐标系中的坐标曲线是

$$L_\varphi: \begin{cases} \varphi = \text{常数}, \\ z = \text{常数}, \end{cases}$$

$$L_\rho: \begin{cases} z = \text{常数}, \\ \rho = \text{常数}, \end{cases}$$

$$L_z: \begin{cases} \rho = \text{常数}, \\ \varphi = \text{常数}. \end{cases}$$

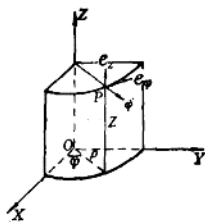


图 1-1

在(1)中把 φ, z 作为常数, ρ 作为参数,

(1)就成为直线 L_ρ 的参数方程, 所以 $\mathbf{e}_\rho$ 的方向数为

$$\frac{dx}{d\rho} = \cos \varphi, \quad \frac{dy}{d\rho} = \sin \varphi, \quad \frac{dz}{d\rho} = 0,$$

所以 $\mathbf{e}_\rho$ 在直角坐标系的投影表达式为

$$\text{同理} \quad \begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{k} \end{cases} \quad (2)$$

由(2)反解得

$$\begin{cases} \mathbf{i} = \cos \varphi \mathbf{e}_\rho - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{j} = \sin \varphi \mathbf{e}_\rho + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{k} = \mathbf{e}_z \end{cases} \quad (3)$$

点 P 的直角坐标 (x, y, z) 与球坐标 (r, θ, φ) 的关系为

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (4)$$

球坐标系中的坐标曲线为

$$L_r: \begin{cases} \theta = \text{常数} \\ \varphi = \text{常数} \end{cases} \quad L_\theta: \begin{cases} \varphi = \text{常数} \\ r = \text{常数} \end{cases}$$

$$L_\varphi: \begin{cases} r = \text{常数} \\ \theta = \text{常数} \end{cases}$$

在(4)式中把 θ 、 φ 当作常数， r 作为参数，(4)式就是直线 L_r 的参数方程，所以 $\mathbf{e}_r$ 的方向数是

$$\frac{dx}{dr} = \sin\theta \cos\varphi,$$

$$\frac{dy}{dr} = \sin\theta \sin\varphi,$$

$$\frac{dz}{dr} = \cos\theta.$$

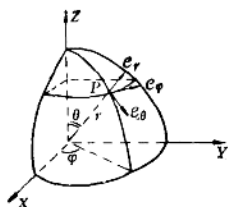


图 1-2

这样就得到 $\mathbf{e}_r$ 的投影表达式

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \sin\theta \cos\varphi \mathbf{i} + \sin\theta \sin\varphi \mathbf{j} + \cos\theta \mathbf{k} \\ \text{同理 } \mathbf{e}_\theta &= \cos\theta \cos\varphi \mathbf{i} + \cos\theta \sin\varphi \mathbf{j} - \sin\theta \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin\varphi \mathbf{i} + \cos\varphi \mathbf{j} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

由(5)中反解得

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{i} &= \sin\theta \cos\varphi \mathbf{e}_r + \cos\theta \cos\varphi \mathbf{e}_\theta - \sin\varphi \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{j} &= \sin\theta \sin\varphi \mathbf{e}_r + \cos\theta \sin\varphi \mathbf{e}_\theta + \cos\varphi \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{k} &= \cos\theta \mathbf{e}_r - \sin\theta \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \right. \quad (6)$$

注 若将(3)式代入(5)就可得到柱坐标矢量与球坐标矢量之间的关系。

由以上公式，知道了矢量的一种坐标表示，即可推出在其它两种坐标下的表达式。例如

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

把(3)式及直角坐标与柱坐标的关系代入，有

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \rho(t) \cos\varphi (\cos\varphi \mathbf{e}_\rho - \sin\varphi \mathbf{e}_\varphi) \\ &\quad + \rho(t) \sin\varphi (\sin\varphi \mathbf{e}_\rho + \cos\varphi \mathbf{e}_\varphi) + z(t) \mathbf{e}_z \\ &= \rho(t) \mathbf{e}_\rho + z(t) \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

把(6)式及直角坐标与球坐标的关系代入, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r(t) \sin \theta \cos \varphi (\sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_\theta \\ &\quad - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi) + r(t) \sin \theta \sin \varphi (\sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_r \\ &\quad + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_\theta + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi) \\ &\quad + r(t) \cos \theta (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \\ &= r(t) \mathbf{e}_r, \end{aligned}$$

所以矢量 $\mathbf{r}(t)$ 在柱坐标与球坐标下表示为

$$\mathbf{r} = \rho(t) \mathbf{e}_\rho + z(t) \mathbf{e}_z.$$

$$\mathbf{r} = r(t) \mathbf{e}_r.$$

4. 一质点沿空间曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 运动, 其中 t 表示自某一时刻开始起算的时间, 若 $v = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt}$ 是质点速度大小 (s 是沿着空间曲线从某一位置开始起量的弧长). 证明质点的加速度是

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{N}$$

其中 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{N}$ 是空间曲线的单位切矢量和单位法矢量, 而

$$\rho = \left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right|^{-1} = \left[\left(\frac{d^2 x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{ds^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

解 质点的运动速度为 $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$, 则加速度为

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v\mathbf{T}) = \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + v \frac{d\mathbf{T}}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + v \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + v^2 \frac{d\mathbf{T}}{ds} \end{aligned} \quad (1)$$

$\because \mathbf{T}$ 是单位矢量, 有 $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$, 对 s 求导数,

$$\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} + \frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \mathbf{T} = 0.$$

$$\therefore \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0,$$

由此推知 $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ 垂直于 $\mathbf{T}$ ，用 $\mathbf{N}$ 表示 $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ 的单位矢量（称为空间曲线的主法线矢量）。由此得

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = n\mathbf{N} \quad (2)$$

其中 n 是 $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ 的模， $\because \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ ， $\therefore \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ ，因此

$$n = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right| = \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

令 $\rho = \frac{1}{n}$ ，(2) 变成 $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\mathbf{N}}{\rho}$ ，于是从 (1) 得所要求的结果

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N},$$

在 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{N}$ 方向的分量 $\frac{dv}{dt}$ 和 $\frac{v^2}{\rho}$ 称为加速度的切向分量和法向分量，后者又称为向心加速度。 ρ 和 n 分别表示空间曲线的曲率半径和曲率。

5. 设 $\mathbf{F}$ 依赖于 x, y, z, t ，而 x, y, z 又依赖于 t ，证明在适当的可微性的假定下，有

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

分析 矢性函数 $\mathbf{F}$ 的投影表达式为

$$\mathbf{F} = F_1(x, y, z, t)\mathbf{i} + F_2(x, y, z, t)\mathbf{j} + F_3(x, y, z, t)\mathbf{k}$$

对 t 求导，即每个 F_i 分别对 t 求导，由此得解。

解

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{F}}{dt} &= \frac{dF_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dF_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{dF_3}{dt}\mathbf{k} \\ &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) \mathbf{i} + \\ &\quad + \left(\frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) \mathbf{j} + \\ &\quad + \left(\frac{\partial F_3}{\partial t} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_3}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) \mathbf{k}\end{aligned}$$

所以

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

二、场 论

1. 求曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 和曲面 $z = x^2 + y^2 - 3$ 在点 $(2, -1, 2)$ 的夹角.

分析 两曲面间在一点处的夹角就是两曲面在该点处法线间的夹角, 而曲面上一点的梯度方向与该点的法线平行. 由此可知问题成为求一点处两曲面梯度间的夹角.

解 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 在点 $(2, -1, 2)$ 处的梯度是

$$\nabla \phi_1 = \nabla (x^2 + y^2 + z^2) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$z = x^2 + y^2 - 3$ 或 $x^2 + y^2 - z = 3$ 在点 $(2, -1, 2)$ 处的梯度是

$$\nabla \phi_2 = \nabla (x^2 + y^2 - z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\cos \theta = \frac{|\nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2|}{|\nabla \phi_1| |\nabla \phi_2|} = \frac{16}{6\sqrt{21}} = \frac{8\sqrt{21}}{63} = 0.5819$$

故锐角是 $\theta = \arccos 0.5819 = 54^\circ 25'$.

2. 求数量场 $U(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ 在场 $V(x, y, z) = \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2}$ 的梯度方向的方向导数(其中 a, b, c, k 都是常数).

解 因为 $\frac{\partial U}{\partial l} = \text{grad} U \cdot l_0 = (\text{grad} U)l$, 其中 l_0 为 l 方向的单位矢量, 为此我们求

$$\begin{aligned}\text{grad} U &= 2ax\mathbf{i} + 2by\mathbf{j} + 2cz\mathbf{k}, \\ \text{grad} V &= \text{grad} \frac{k}{r^2} = -\frac{2k}{r^3} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{2k\mathbf{r}}{r^4}\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$\text{grad} V$ 方向的单位矢量为

$$l_0 = \frac{-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (\text{若 } k > 0), \quad l_0 = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (\text{若 } k < 0),$$

i) $k > 0$

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \text{grad} U \cdot \frac{-\mathbf{r}}{r} = -\frac{2(ax^2 + by^2 + cz^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{2U}{r},$$

ii) $k < 0$

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \text{grad} U \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{2(ax^2 + by^2 + cz^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2U}{r}.$$

3. 计算下列平面场的旋度

$$(1) \mathbf{A} = 3\mathbf{i} + xy\mathbf{j}, \quad (2) \mathbf{A} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

解 (1) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$, $P = 3$, $Q = xy$.

$$\therefore \text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} = y\mathbf{k}.$$

(2) $\mathbf{A} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$, $P = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{y}{x^2 + y^2}$ 在全平面上除原点外连续可导.

i) 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 有

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \left\{ -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \left[\frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right] \right\} \mathbf{k} \\ &= 0\end{aligned}$$

ii) 当 $x^2 + y^2 = 0$ 时, 根据定义计算, 即在 $(0, 0)$ 处

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_{\mathbf{k}} = \lim_{l \rightarrow (0,0)} \frac{\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta \sigma}$$

其中 l 是包含原点的任意闭曲线, $\Delta \sigma$ 是 l 所围区域的面积, 其极限为 $\mathbf{A}$ 在原点的旋度在 $\mathbf{k}$ 上的投影 (因为 $\mathbf{A}$ 为平面矢量, 其旋度的方向总是与此平面垂直的). 若极限不存在, 则 $\mathbf{A}$ 在原点无旋度. 为求此极限, 先计算环量

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

为了应用格林公式, 在 l 内部作以原点为中心, ε 为半径的小圆 c , 在 $l + c^-$ 所围成的区域 D 上满足格林公式的条件, 于是有

$$\begin{aligned}& \oint_{l+c^-} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 0\end{aligned}$$

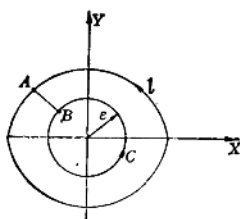


图 1-3