经济应用数学基础

线性代数与线性规划

金桂堂 孙雅筠 段淑兰 编

科学出版社

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书是成人高等学校“经济应用数学基础”课程的教材之一.

本书主要介绍线性代数与线性规划的基本概念、方法及应用.本书在保证数学学科的系统性和严密性的前提下，力求选材合理，重点突出，难易适度；论述由浅入深，通俗易懂，每章末备有习题，书后附习题答案，有助于读者进一步掌握书中的概念和方法.

本书可作为成人高等学校财经类专业的教学用书，也可供财经类专业高等教育自学考试的辅导教师及学生参考.

经济应用数学基础

线性代数与线性规划

金桂堂　孙雅筠　段淑兰 编

责任编辑　吕　虹

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

化学工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1994 年 4 月第　一　版　　开本：787×1092　1/32

1994 年 4 月第一次印刷　　印张：8 1/2

印数：1—6 100　　字数：191 000

ISBN 7—03—003870—3/O・680

定价：8.90 元

出 版 说 明

为了适应成人高等学校财经类各专业数学教学之需要，由北京市第一轻工业总公司职工大学、北京市西城区职工大学、北京市电子仪表局职工大学、北京市化学工业局职工大学、北京市汽车工业总公司职工大学、北京市海淀区职工大学等六所高校的部分教师在总结多年教学经验的基础上，编写了这套《经济应用数学基础》.

这套教材包括《微积分》、《线性代数与线性规划》、《概率论与数理统计》三分册. 编写过程中，在保证数学学科的系统性和严密性的前提下，充分考虑到成人学员的特点，力求选材深浅适度，结构安排合理，密切联系经济实际；论述简明扼要，通俗易懂；每章后附有适量的习题，并在书后给出习题答案. 这套教材可供职工大学、管理干部学院、财经类专科院校选作试用教材或教学参考书，也可作为有关专业的干部专修科或短训班的教学用书. 对参加财经类各专业高等教育自学考试的学员也有一定的参考价值.

这套教材是由何嗣玫、金桂堂、葛炎午主持编写的，其中《微积分》由何嗣玫整理，《线性代数与线性规划》由金桂堂整理，《概率论与数理统计》由葛炎午整理.

北京大学经济系范培华副教授，中国人民大学经济信息系龚德恩副教授、胡显佑副教授分别承担了这三册书的审稿工作，对于他们的热情帮助与大力支持，谨表衷心的感谢.

由于我们水平有限，错误和不足之处在所难免、恳请读者批评指正.

《经济应用数学基础》编写组

1991 年 12 月

目　　录

第一章　行列式

本章从二、三阶行列式出发，引出 n 阶行列式的概念，进而讨论 n 阶行列式的基本性质和计算方法，最后给出用行列式解线性方程组的克莱姆法则.

§1.1　行列式的定义

一、二阶、三阶行列式

在中学，我们通过解二元、三元一次方程组已引出了二阶、三阶行列式的定义：

记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中 a_{ij} (i，$j=1$，2) 称为该行列式的元素. 二阶行列式共有 $2^2=4$ 个元素. 行列式中的横排叫行，纵排叫列. a_{ij}的下标 i 和 j 分别表示元素所在的行和列，称为行标和列标. 此代数和可利用对角线法记忆（见图 1.1），即实对角线上两个元素的乘积减去虚对角线上两个元素的乘积.

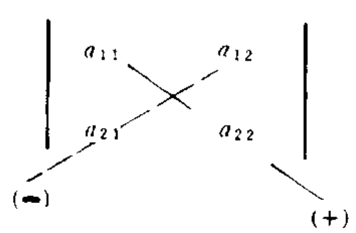

图 1.1

与二阶行列式类似，记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，称为三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

三阶行列式共有 $3^2=9$ 个元素. 它所表示的代数和的各项及符号可以用图 1.2 中所示的对角线方法来记忆.

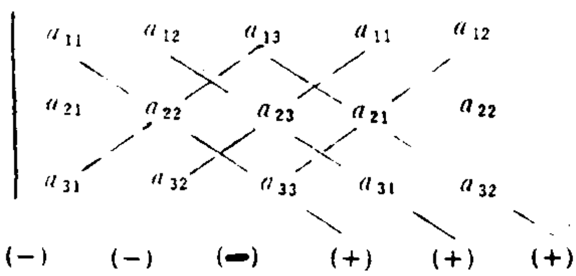

图 1.2

例1 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

$=1\times(-1)\times5+2\times1\times2+3\times0\times4$

$\quad-3\times(-1)\times2-2\times0\times5-1\times1\times4$

$=-5+4+6-4$

$=1$

例 2 k 满足什么条件时有

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} = 0$$

解：

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} = -k^2-k+2$$

若要满足条件，必有$-k^2-k+2=0$，即$k^2+k-2=0$，则$k=-2$或$k=1$. 故当$k=-2$或$k=1$时有

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} = 0$$

二、排列与逆序

由自然数 1，2，3，…，n 组成的不重复的有序数组，称为一个 n 级排列.

如 1234 和 2134 都是 4 级排列；25413 和 23415 都是 5 级排列.

一般由数码 1，2，3，…，n 构成的 n 级排列的总数为 $n(n-1)\cdots 2\cdot 1=n!$ 个. 所有这些排列中只有一个排列 $12\cdots n$ 是按自然顺序排列的，称之为自然序排列.

定义 1.1 若在某个 n 级排列中有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面，则称这对数 i_t，i_s 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数称为它的逆序数，记作 $N(j_1,, j_2, \cdots, j_n)$. 逆序数是奇数的排列称为奇排列，是偶数的称为偶排列.

如排列 25413 中，1 前面有 2，4，5；3 前面有 4，5；4 前面有 5，共构成 6 个逆序，所以 $N(25413)=6$，此排列 25413 是偶排列. 而 $N(23415)=3$，排列 23415 是奇排列.

又 $N(1234)=0$，排列 1234 是偶排列.

定理 1.1 若将 n 级排列中任意两个数互换，则排列的奇偶性改变.（证明从略.）

例如，上面排列 25413 中 3 和 5 的位置对换，成为排列 23415，就改变了排列的奇偶性.

三、n 阶行列式

我们观察二阶行列式和三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

可以看出：

（1）二阶行列式所表示的代数和的每一项都是取自不同行不同列的两个元素的乘积，每一项除符号外可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}$（这里行标按自然顺序排列，列标是一个二级排列）.

类似地，三阶行列式的每一项可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$.

（2）当 j_1，j_2 取遍了所有的二级排列（12，21）时，即得二阶行列式的所有项，共有 2！＝2 项；

当 $j_1j_2j_3$ 取遍了所有的三级排列（123，132，213，231，312，321）时，即得到三阶行列式的所有项，共有 3！＝6 项.

（3）每一项的符号是：这一项各元素的行标按自然数顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号.（读者可自己验证一下.）

根据以上二、三阶行列式的规律，我们可以给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.2 n^2 个元素 a_{ij}（i，$j=1$，2，…，n）排成 n 行 n 列，组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，它表示所有可能取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和．各项的符号是：当这一项的行标按自然顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号．其一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots\cdots a_{nj_n}$$

当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有的 n 级排列时，得到代数和中所有项，共为 $n!$ 项．

n 阶行列式可简记为 $D=|a_{ij}|$，即

$$D=|a_{ij}|=\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

例 1 证明下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证 行列式展开的一般项为

$$(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

D 中一定有许多项为零，现在考察有哪些项可能不为零．一般项中第一个元素 a_{1j_1} 取自第一行，但第一行只有 a_{11} 可能不为零，因而 $j_1=1$；第二个元素 a_{2j_2} 取自第二行，第二行中只有 a_{21} 和 a_{22} 可能不为零，因第一个元素 a_{11} 已取自第一列，则第二个元素不能再取自第一列，所以第二个元素只能取 a_{22}，从而 $j_2=2$；这样推下去，可得 $j_3=3$，$j_4=4$，…，$j_n=n$．这

样 D 中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项可能不为零，其他项均为零. 由于 N（$12\cdots n$）$=0$，因此这一项应取正号，可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

同理可得上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

特别地，有对角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

行列式从左上角到右下角的对角线称为主对角线.

三角形行列式及对角形行列式的值，均等于主对角线上元素的乘积.

由行列式定义容易得出：一个行列式若有一行（或一列）中的元素皆为零，则此行列式的值必为零.

§1.2 行列式的性质

这一节我们研究行列式的性质，为简便起见，我们略去部分性质的证明，有兴趣的读者可参考其他线性代数教材中的有关部分.

定义 1.3 将行列式 D 的行与列交换，得到的行列式，称为 D 的转置行列式，记为 D^T（或 D'），即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}，则 D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1 行列式 D 与其转置行列式 D^T 的值相等.

例如

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}=2；\ D^T=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \\ 6 & -5 & 5 \end{vmatrix}=2$$

性质 1 表明，凡有关行的性质，对于列也同样成立；反之亦然.

性质 2 交换行列式的两行（列），行列式变号.

例如　若

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=10$$

则对换 D 的 2，3 两行，得

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-10=-D$$

推论 如果行列式有两行（列）的对应元素相同，则行列式的值为零.

因为将行列式D中具有相同元素的两行互换，其结果仍是D，但由性质2可知其结果应为$-D$，因此$D=-D$，所以$D=0$.

性质3 用数k乘行列式的一行（列），等于以数k乘此行列式（即任一行的公因子k可以提到行列式外面），即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 200 & 400 & 800 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

用对角线法计算

$$\begin{aligned} D &= 1\times400\times(-4)+2\times800\times0+5\times200\times2 \\ &\quad -5\times400\times0-1\times800\times2-2\times200\times(-4) \\ &= 400 \end{aligned}$$

若从第二行中先提出公因子$k=200$，使它化为

$$D=200\times\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}=200\times2=400$$

设

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = D_1$$

则 $D=200D_1$.

推论 如果行列式有两行（列）的对应元素成比例，则行列式等于零.

因为把成比例的两行元素中的一行提出某个公因子，可使这两行元素对应相等，由性质 2 的推论，此行列式必为零.

性质 4 将行列式的某一行（列）的所有元素同乘数 k 后加到另一行（列）对应位置的元素上，行列式的值不变.

性质 2 中 D 的第一行各元素同乘以数 2 后加到第二行对应位置的各元素上，得

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4+(2\times 2) & 3+1\times 2 & 1+2\times 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 = D$$

以上行列式的四个基本性质及其推论，在行列式的计算中起重要作用，可简化行列式的计算. 下面我们举例说明行列式的计算方法.

例 1 计算

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}$$

解 因为 1，2 两列的元素对应成比例，由性质 3 的推论

得：

$$D = 0$$

例 2 计算

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 201 & 102 & -99 \end{vmatrix}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 201 & 102 & -99 \end{vmatrix} \xlongequal{③+①\times(-100)}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{(①,③)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[③+①(-2)]{②+①(-4)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 18$$

注意：我们在例 2 的计算中，在等号上面使用了一些记号，这些记号表示行变换. 我们规定：

(1) 记号“kⓘ”表示第 i 行提出公因子 k；

(2) 记号“(ⓘ，ⓙ)”表示第 i 行与第 j 行互换；

(3) 记号“ⓘ+ⓙk”表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍.

上述三种记号写在等号上方表示行变换；写在等号下方表示列变换.

例 3 计算

$$D=\begin{vmatrix}5&2&2&2\\2&2&2&5\\2&2&5&2\\2&5&2&2\end{vmatrix}$$

解 这个行列式的特点是各行 4 个数的和都是 11.

$$D=\begin{vmatrix}5&2&2&2\\2&2&2&5\\2&2&5&2\\2&5&2&2\end{vmatrix}\overline{\overline{①+[②+③+④]}}\begin{vmatrix}11&2&2&2\\11&2&2&5\\11&2&5&2\\11&5&2&2\end{vmatrix}$$

$$=11\begin{vmatrix}1&2&2&2\\1&2&2&5\\1&2&5&2\\1&5&2&2\end{vmatrix}\overset{\substack{②+①(-1)\\③+①(-1)\\④+①(-1)}}{=\!=\!=\!=\!=}11\begin{vmatrix}1&2&2&2\\0&0&0&3\\0&0&3&0\\0&3&0&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{(②,④)}{=\!=\!=}-11\begin{vmatrix}1&2&2&2\\0&3&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&3\end{vmatrix}=-11\times 27=-297$$

例 4 计算

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$$