ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
В УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ

高等数学练习与习题

П·Е 塔科 А·Г 波波夫 Т·Я 科热夫尼科娃 著

瞿正良 董雨滋 张亚光 译

（下册）

山西人民出版社

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
В УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ

高等数学练习与习题

П·Е 塔科 А·Г 波波夫 Т·Я 科热夫尼科娃 著

瞿正良 董雨滋 张亚光 译

(下册)

山西人民出版社

高等数学练习与习题
（下册）
П·Е 塔科 А·Г 波波夫 Т·Я 科热夫尼科娃
瞿正良 董雨滋 张亚光 译
山西人民出版社出版（太原并州路七号）
太原重机学院印刷厂印刷
开本：787×1092 1/16 印张：14.25 字数：31万字
1985年6月第一版 1985年6月第一次印刷
印数：1—2500册
书号：7088·1382 定价：2.70元

目　录

第一章　二重和二重积分

第二章　曲线积分和曲面积分

第三章　级数

第四章 常微分方程

第五章 概率论基础

第六章 复变函数的理论基础

答案

第一章　二重和三重积分

§1、在直角坐标系下的二重积分

设函数 $f(x,\ y)$ 在平面 xoy 的有界闭区域 D 上有定义，我们把区域 D 以任何方式分割为 n 个小区域，并分别用 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2\cdots$，$\Delta\sigma_n$ 和 d_1，和 $d_2\cdots d_n$ 来记这 n 个小区域的面积和直径（小区域边界上两点间最长距离称作该区域的直径），在每个小区域上任取点、$P_k(\xi_K,\ \eta_k)$ 并将点 P_k 上的函数值与该区域面积相乘。

如下形式的和称为函数 $f(x,\ y)$ 在区域 D 上的积分和，

$$\sum_{K=1}^{n} f(\xi_k,\ \zeta_k)\Delta\sigma_k = f(\xi_1,\ \eta_1)\Delta\sigma_1 + f(\xi_2,\ \eta_2)\Delta\sigma_2 + \cdots + f(\xi_n,\ \eta_n)\Delta\sigma_n$$ 当小区域最大直径趋于零时，积分和的极限称为函数 $f(x,\ y)$ 在区域 D 上的二重积分。

$$\iint_D f(x,\ y)d\sigma = \lim_{\max d_K\to 0}\sum_{K=1}^{n} f(\zeta_k,\ \eta_k)\Delta\sigma_k$$

假设函数 $f(x,\ y)$ 在闭区域 D 上连续，积分和的极限的存在与区域的分法和小区域上点 P_k 的取法是无关的。(二重积分存在定理)

如果在区域 D 上，$f(x,\ y)>0$，则二重积分等于上面以有界曲面 $z=f(x,\ y)$ 作顶，侧面母线平行于 oz 轴，底面是 xoy 平面的区域 D 作底的圆柱体体积。

二重积分的基本性质

1° $\displaystyle\iint_D [f_1(x,\ y)\pm f_2(x,\ y)]d\sigma = \iint_D f_1(x,\ y)d\sigma \pm \iint_D f_2(x,\ y)d\sigma$

2° $\displaystyle\iint_D c(f(x,\ y)d\sigma = c\iint_D f(x,\ y)d\sigma$、$c$ 是常数，

3° 若积分区域 D 能分为两个区域 D_1 和 D_2，则

$$\iint_D f(x,\ y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,\ y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,\ y)d\sigma$$

在笛卡尔坐标系下二重积分通常记作 $\displaystyle\iint_D f(x,\ y)dxdy$ 形式。

二重积分的第一种计算法

积分区域是不相同的两条曲线：

1.积分区域左边和右边是直线 $x=a$ 和 $x=b$，而上边和下边是连续曲线 $y=\varphi_1(x)$ 和 $y=\varphi_2(x)$（$\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)$），每作一条铅垂直线仅仅穿过曲线上的一点(图 1）对于

这样区域的重积分可表为：

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \int_{a}^{b}dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$$

在开始计算积分时，把x当作常数。

2.积分区域的上边和下边是直线$y=c$和$y=d(c<d)$，而左边和右边是连续曲线$x=\psi_1(y)$和$x=\psi_2(y)[\psi_1(y)\leqslant\psi_2(y)]$,每作一条水平直线仅仅穿过曲线一点(图2)

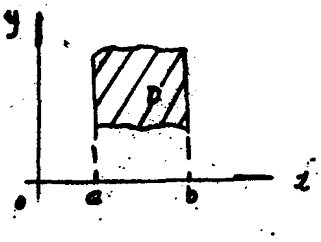

图1

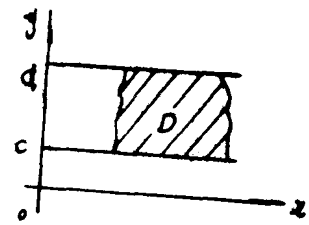

图2

对这样的区域重积分可表为：

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \int_{c}^{d}dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

在开始计算积分时，把y当作常数

公式的右边部分叫二重积分(或叫累次积分)

在一般积分区域的情形下，我们可以用划分的方法把一般积分区域化为基本的区域。

1. 计算$\iint\limits_{D} x\ln y dxdy$，如果区域$D$是矩形区域，$0\leqslant x\leqslant 4$，$1\leqslant y\leqslant e$

解：$\iint\limits_{D} x\ln y dxdy = \int_{0}^{4} xdx\int_{1}^{e}\ln y dy$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4\left[y\ln y - y\right]_1^e = 8$$

2. 计算$\iint\limits_{D}(\cos^2 x+\sin^2 y)dxdy$，如果区域$D$是正方形$0\leqslant x\leqslant\pi/4$，$0\leqslant y\leqslant\pi/4$

解：$\iint\limits_{D}(\cos^2 x+\sin^2 y)dxdy = \int_{0}^{\pi/4}dx\int_{0}^{\pi/4}(\cos^2 x+\sin^2 y)dy$

$$= \int_{0}^{\pi/4}\left[y\cos^2 x+\frac{y}{2}-\frac{1}{4}\sin 2y\right]_0^{\pi/4}dx$$

$$= \int_{0}^{\pi/4}\left(\frac{\pi}{4}\cos^2 x+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)dx$$

$$= \left[\frac{\pi}{8}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right] + \left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)x\Big]_{0}^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{16}$$

3.计算 $I = \int_1^2 dx \int_x^{x^2} (2x-y)dy$

解：$I = \int_1^2 \left[2xy - \frac{1}{2}y^2\right]_x^{x^2} dx = \int_1^2 (2x^3 - \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}x^2)dx$

$$= \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{2}x^3\right]_1^2 = 0.9$$

4.计算 $\iint\limits_D (x-y)dxdy$，如果区域D的边界线是$y=2-x^2$，$y=2x-1$

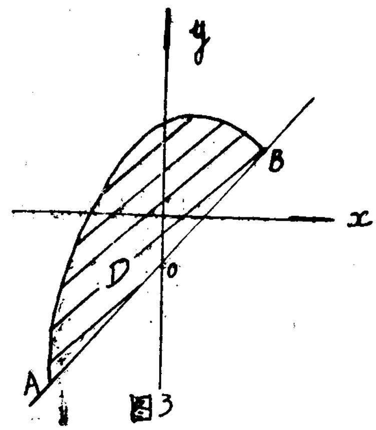

图3

解；画出区域D、第一条线是关于y轴对称，顶点在(0，2)的抛物线，第二条是直线。解联立方程组：$y=2-x^2$和$y=2x-1$，我们得到交点$A(-3, -7)$，$B(1, 1)$(图3)

积分区域寓于第一种类型

$$\iint\limits_D (x-y)dxdy = \int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)dy$$

$$= \int_{-3}^{1} \left[xy - \frac{1}{2}y^2\right]_{2x-1}^{2-x^2} dx$$

$$= \int_{-3}^{1} (2x - x^3 - 2 + 2x^2 - \tfrac{1}{2}x^4 - 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + \tfrac{1}{2})dx$$

$$= \int_{-3}^{1} \left(-\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x\right]_{-3}^{1} = 4\frac{4}{15}$$

5.计算 $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$，如果区域$D$边界是直线：

$$y=x,\quad y=2x,\quad x=2,\quad x=3$$

解：$\iint\limits_D (x+2y)dxdy = \int_2^3 dx \int_x^{2x} (x+2y)dy$

$$=\int_2^3\left[xy+y^2\right]_x^{2x}dx=\int_2^3(2x^2+4x^2-x^2-x^2)dx$$

$$=4\int_2^3 x^2dx=\frac{4}{3}x^3\Big|_2^3=25\frac{1}{3}$$

6 计算 $\iint\limits_D e^{x+\sin y}\cos y\,dxdy$、如果区域$D$是矩形域 $0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant y\leqslant\pi/2$

7 计算 $\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$、如果区域$D$的边界是直线

$y=x$，$x=0$，$y=1$，$y=2$

8.计算 $\iint\limits_D(3x^2-2xy+y)dxdy$，如果区域$D$的边界线是 $x=0$，$x=y^2$，$y=2$

9.交换下列积分的顺序；

$$\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,\ y)dy$$

解：积分区域的边界线是 $x=1$，$x=-1$，$y=1-x^2$，$y=-\sqrt{1-x^2}$（图4）为了交换积分顺序，我们把区域分为两个区域（第二种类型）：D_1 $x=\pm\sqrt{1-y}$ $(0\leqslant y\leqslant1)$是以抛物线左右两支作为边界，D_2是以圆弧作为边界，$x=\pm\sqrt{1-y^2}$ $(-1\leqslant y\leqslant0)$，此时

$$\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,\ y)dy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,\ y)dx+\int_{-1}^0\int_{-\sqrt{1-Y^2}}^{\sqrt{1-Y^2}} f(x,\ y)dx$$

10.计算 $\int_0^{2\pi}\cos^2x dx\int_0^a ydy$

11.计算 $\int_1^3 dx\int_{x^3}^{x}(x-y)dy$

12.计算 $\iint\limits_D y\ln x dxdx$，如果区域$D$的边界是 $xy=1$，$y=\sqrt{x}$，$x=2$

13.计算 $\iint\limits_D(\cos x+\sin y)dxdy$，如果$D$的边界是 $x=0$，$y=0$，$4x+4y-\pi=0$

14.计算 $\iint\limits_D(3x+y)dxdy$、如果区域D由不等式$x^2+y^2\leqslant9$和$y\geqslant(2/3)x+3$来确定。

15.计算 $\iint\limits_D\sin(x+y)dxdy$，如果区域$D$边界是 $x=0$，$y=\pi/2$，$y=x$

16.计算 $\iint\limits_D xdxdy$如果区域D是顶点为$A(2,\ 3)$，$B(7,\ 2)$，$C(4,\ 5)$的三角形。

交换下列各题的积分顺序：

17. $\int_{-6}^2 dx\int_{x^2/4-1}^{2-x} f(x,\ y)dy$

18. $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x, y)dy$

19. $\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)dx$

20. $\int_0^1 dx\int_0^x f(x, y)dy$

21. $\int_0^1 dx\int_{(1-x)^2/2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

22. $\int_0^{\pi} dx\int_0^{\sin x} f(x, y)dx$

§2、二重积分的变量代换

1、在极坐标系下的二重积分：

二重积分由直角坐标x，y 变换到极坐标 ρ、θ，相联系的关系式是 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，相应地有公式：

$\iint\limits_D f(x, y)dxdy=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$ 如果积分区域的边界从极点出发的两条半直线$\theta=\alpha$，$\theta=\beta(\alpha<\beta)$和两条曲线$\rho=\rho_1(\theta)$和$\rho=\rho_2(\theta)$其中$\rho_1(\theta)$和$\rho_2(\theta)$是单值函数。当$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，$\rho_1(\theta)\leqslant\rho_2(\theta)$时。则重积分按下列公式计算

$$\iint\limits_D F(\rho, \theta)\rho d\rho d\theta=\int^{\beta} d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta)\rho d\rho$$

其中$F(\rho, \theta)=f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$。在开始计算积分 $\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho,\theta)\rho d\rho$时，$\theta$当作常数。

2、在曲线坐标系下的二重积分

令二重积分由直角坐标x，y变换到曲线坐标u，u，相联系的关系式是$x=x(u, v)$，$y=y(u, v)$，其中函数$x(u,v)$和$y(u,v)$在平面$uo'v$的区域D'上有连续偏导数，并且在D'上雅可比行列式不为0，即

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

在这种情况之下，确立了平面xoy的区域D的点和平面$uo'v$的区域D'的点之间一对一的对应关系（图4），此时，二重积分的变换公式是

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy=\iint\limits_D f[x(u, v), y(u, v)]|J|dudv$$

对于极坐标的情况，

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta - \rho\sin\theta\\ \sin\theta \quad \rho\mathrm{con}\theta\end{vmatrix}=\rho$$

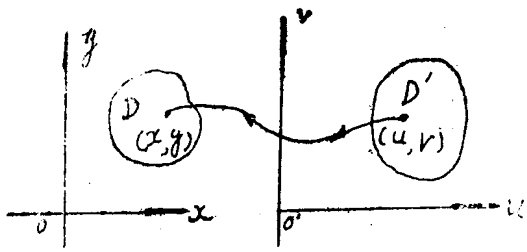

图4

23．用极坐标，计算 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，如果$D$是圆 $x^2+y^2\leqslant a^2$的四分之一

解：极坐标$x=\rho\mathrm{con}\theta$，$y=\rho\sin\theta$，我们有

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_D \sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}\,\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^a \rho^2 d\rho=\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\rho^3\Big|_0^a=\frac{\pi a^3}{6}$$

24．计算 $\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)dxdy$，如果区域$D$ 是圆 $x^2+y^2=e^2$和$x^2+y^2=e^4$ 之间的圆环，

解：用极坐标

$$\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\ dxdy=\iint\limits_D \ln\rho^2\cdot\rho d\rho d\theta=2\iint\limits_D \rho\ln\rho d\theta=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_e^{e^2}\rho\ln\rho d\rho$$

对ρ进行分部积分，得

$$2\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\rho^2\ln\rho-\frac{1}{4}\rho^2\right]_e^{e^2}d\theta=\pi e^2(3e^2-1)$$

25．计算 $\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2dxdy$，如果区域$D$是正方形；边界直线是 $x+y=1$，$x-y=1$，$x+y=3$，$x-y=-1$。(图5)

解：假定$x+y=u$，$x-y=v$，由此得$x=\frac{1}{2}(u+v)$，$y=\frac{1}{2}(u-v)$，此时，雅可比行列式：

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\[2ex] \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\quad 即\quad |J|=\frac{1}{2}$$

于是，$\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2dxdy=\dfrac{1}{2}\iint\limits_{D'} u^3v^2dudv$，因此区域$D'$同样是正方形(图6)则

$$\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2dxdy=\frac{1}{2}\int_1^3 u^3du\int_{-1}^1 v^2dv=\frac{1}{2}\int_1^3 u^3\left[\frac{1}{3}v^3\right]_{-1}^1 du$$

$$=\frac{1}{6}\int_1^3 u^3(1+1)du=\frac{1}{12}u^4\Big|_1^3=\frac{20}{3}$$

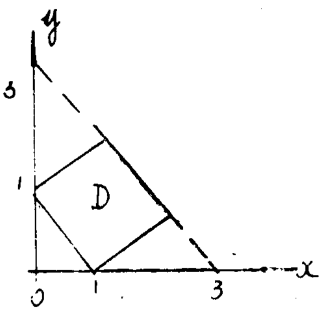

图5

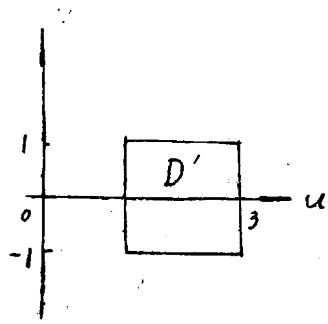

图6

用极坐标计算二重积分

26. $\iint\limits_D \left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\right)dxdy$，如果区域$D$是圆：$x^2+y^2\leqslant\pi^2$

27. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{x^2+y^2+1}$，如果区域$D$的边界是半圆 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和x轴

28. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$，如果区域$D$边界是圆 $x^2+y^2=2ax$

29. $\iint\limits_D \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，如果区域$D$是由$x^2+y^2=\dfrac{\pi^2}{9}$和$x^2+y^2=\pi^2$围成

30. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，如果区域$D$是由$x^2+y^2=a^2$，$x^2+y^2=4a^2$围成

31. 若 $\int_0^1 dx\int_x^{2x} dx$，用变量代换$x=u(1-v)$，$y=uv$进行计算。

32. 计算 $\iint\limits_D dxdy$，如果区域D的边界线是$xy=1$，$xy=2$，$y=x$，$y=3x$

提示：进行变量代换。令 $x=(u/v)^{1/2}$，$y=(uv)^{1/2}$

§3、计算平面图形的面积

以D作积分区域的平面图形面积计算公式是：

$$S=\iint\limits_D dxdy$$

如果区域D是用不等式$a\leqslant x\leqslant b$，$\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$所确定，则

$$S=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy$$

如果区域D在极坐标下用不等式$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，$\varphi_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\phi_2(\theta)$所确定，则

$$S=\iint\limits_D \rho d\rho d\theta=\int^{\beta} d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\rho d\rho$$

33. 计算 由圆$x=4y-y^2$和直线$x+y=6$为边界围成的面积。

解：先解方程组$x=4y-y^2$和$x+y=6$得出交点的坐标(建义作出图)，由此，我们得$A(4,2)$，$B(3,3)$因此

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int_2^3 dy\int_{6-y}^{4y-y^2}dx=\int_2^3 x\Big|_{6-y}^{4y-y^2}dy$$

$$=\int_2^3(-y^2+5y-6)dy=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{5}{2}y^2-6y\right]_2^3=\frac{1}{6}$$

34. 求圆$\rho=1$的外部和圆$\rho=(2/\sqrt{3})\cos\theta$的内部之部分的面积(图7)

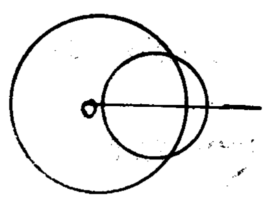

图7

35. 求双扭线$(x^2+y^2)^2=2a^2xy$为边界围成区域的面积。

解：假定$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，代入曲线方程，则

$$\rho^2=\partial a^2\sin\theta\cos\theta=a^2\sin2\theta$$

显然，极角θ从0到$\pi/4$相应于$\frac{1}{4}$的面积，于是

$$S=4\iint_D \rho d\rho d\theta=4\int_0^{\pi/4}d\theta\int_0^{a\sqrt{\sin2\theta}}\rho d\rho=2\int_0^{\pi/4}\rho^2\Big|_0^{a\sqrt{\sin2\theta}}d\theta=2a^2\int_0^{\pi/4}\sin2\theta d\theta$$

$$=-a^2\cos2\theta\Big|_0^{\pi/4}=a^2$$

36．求边界线是$x^3+y^3=axy$的面积（如图8的面积）

解：把已知方程化为极坐标方程：

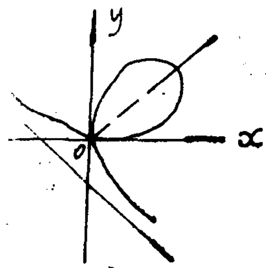

图8

$$\rho^3(\sin^3\theta+\cos^3\theta)=a\rho^2\sin\theta\cos\theta$$

即 $\rho=a\sin\theta\cos\theta/(\sin^3\theta+\cos^3\theta)$ 据圈对称轴的极角是$\theta=\pi/4$，因此

$$S=2\iint_D \rho d\rho d\theta=2\int_0^{\pi/4}d\theta\int_0^{a\sin\theta\cos\theta/(\sin^3\theta+\cos^3\theta)}$$

$$=a^2\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)}d\theta=a^2\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{tg}^2\theta\cos^4\theta}{\cos^6\theta(1+\mathrm{tg}^3\theta)^2}d\theta$$

$$=\frac{a^2}{3}\int_0^{\pi/4}\frac{3\mathrm{tg}^2\theta d(\mathrm{tg}\theta)}{(1+\mathrm{tg}^3\theta)^2}=\frac{a^2}{3}\int_0^{\pi/4}\frac{d(1+\mathrm{tg}^3\theta)}{(1+\mathrm{tg}^3\theta)^2}$$

$$=\left[-\frac{a^2}{3(1+\mathrm{tg}^3\theta)}\right]_0^{\pi/4}=\frac{a^2}{6}$$

37．计算边界线是 $x=y^2-2y$和$x+y=0$的面积，

38．计算边界线是 $y=2-x$，$y^2=4x+4$的面积。

39．计算边界线是 $y^2=4x-x^2$，$y^2=2x$的面积。

40．计算边界线是 $3y^2=25x$，$5x^2=9y$的面积

41．计算边界线是 $y^2+2y-3x+1=0$，$3x-3y-7=0$的面积。

42．计算以$y=\cos x$，$y=\cos2x$，$y=0$为边界，距原点最近图形的面积。

43．计算边界线是 $y=4x-x^2$，$y=2x^2-5x$的面积。

44. 计算边界线是$x=4-y^2$，$x+2y-4=0$的面积。

45. 计算边界线是 $\rho=2-\cos\theta$和$\rho=2$的之间面积。

46. 计算边界线是 $\rho=2(1+\cos)$，$\rho=2\cos\theta$的面积。

47. 计算边界线是$y^2=4(1-x)$，$x^2+y^2=4$的面积。

§4、物体体积的计算

假定圆柱形的物体顶是连续曲面$z=f(x, y)$，下边是$z=0$的平面。侧面是铅直的。物体和平面xoy的切口是区域D 则该物体的体积公式是：

$$V=\iint_D f(x, y)\,dxdy$$

48. 求边界曲面是 $y=1+x^2$，$y=3x$，$y=5$；$z=0$ 位置在第一象限部分的物体体积。

解：物体体积应该这样计算：它的顶是平面：$z=3x$，侧面是抛物面 $y=1+x^2$ 和平面$y=5$，因此，是一个柱体。区域D的边界是抛物线$y=1+x^2$和直线$y=5$，$x=0$，所以，我们有

$$V=\iint_D 3x\,dxdy=3\int_0^2 x\,dx\int_{1+x^2}^5 dy=3\int_0^2(4x-x^3)\,dx=3\left[2x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=12$$

49. 求边界曲面是$z=1-x^2-y^2$，$y=x$，$y=x\sqrt{3}$，$z=0$位置在第一象限的物体体积。

解：已知物体顶是$z=1-x^2-y^2$，积分区域D是扇形和圆$x^2+y^2=1$作边界，即它是由$z=0$和直线 $y=x$，$y=x\sqrt{3}$决定，于是

$$V=\iint_D(1-x^2-y^2)\,dxdy$$

由于积分区域D是圆的一部分，因此被积式与x^2+y^2有关，我们可以适当选取极坐标。圆$x^2+y^2=1$在极标下是$\rho=1$，被积式等于$1-\rho^2$，θ由直线$K_1=\mathrm{tg}\theta_1=1$，即$\theta_1=\pi/4$变到直线$K_2=\mathrm{tg}\theta_2=\sqrt{3}$ 即 $\theta_2=\pi/3$

$$V=\iint_D(1-\rho^2)\rho\,d\rho\,d\theta=\int_{\pi/4}^{\pi/3}d\theta\int_0^1(\rho-\rho^3)\,d\rho$$

$$=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\left[\frac{1}{2}\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 d\theta=\frac{1}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/3}d\theta=\frac{\pi}{48}$$

50. 求边界曲面是$x^2+y^2=a^2$；$x^2+z^2=a^2$物体的体积(图9)

解：我们计算物体$\frac{1}{8}$的体积

$$\frac{1}{8}V = \iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2}\ dxdy = \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\ xd\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy$$

$$= \int_0^a (a^2-x^2)dx = \left[\ a^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a = \frac{2}{3}a^3$$

于是$V = 16a^3/3$

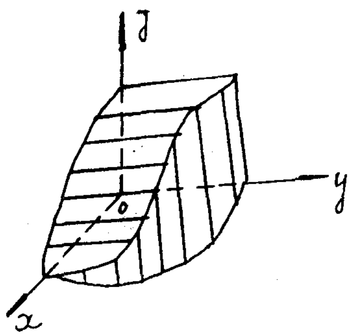

图7

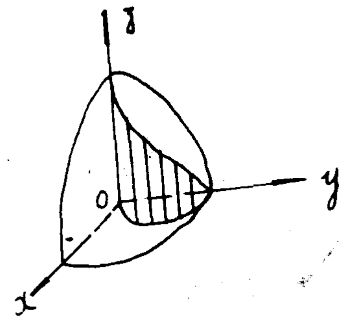

图10

51．计算边界曲面是$x^2+y^2=8$，$x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y+z=4$物体的体积。

52．计算边界曲面是$x=2y^2$，$x+2y+z=4$，$y=0$，$z=0$物体的体积。

53．计算边界曲面是$x^2+4y^2+z=1$，$z=0$物体的体积。

54．计算边界曲面是$z=x^2+y^2$，$y=x^2$，$y=1$，$z=0$物体的体积。

55．计算边界曲面是$z=4-x^2$，$2x+y=4$，$x=0$，$y=0$，$z=0$物体的体积。

56．计算边界曲面是$z^2=xy$，$x=0$，$y=0$，$z=0$，$y=4$物体的体积。

57．计算边界曲面是$z=5x$，$x^2+y^2=9$，$z=0$物体的体积。

58．计算边界曲面是$x+y+z=6$，$3x+2y=12$，$3x+y=6$，$y=0$，$z=0$物体的体积

59．计算边界曲面是$z=0$，$z=xy$，$x^2+y^2=4$物体的体积。

60．计算边界曲面是$z=x+y+1$，$y^2=x$，$x=1$，$y=0$，$z=0$物体的体积。

61．计算边界曲面是$x^2/a^2+y^2/b^2=1$，$y=0$，$z=x/2$，$z=x$物体的体积。

§5、计算曲面的面积

如果光滑单值曲面用方程$z=f(x,\ y)$给出，则曲面面积的计算公式是

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\ dxdy$$

其中D是已知曲面在xoy平面上的投影。显然，如果曲面方程$x=f(y,\ z)$则

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\ dydz$$

其中D是曲面yoz平面上的投影。同样如果曲面方程是$y=f(x, z)$的形公，则

$$S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz$$

其中D是曲面在xoz平面上的投影

62．求球$x^2+y^2+z^2=a^2$在圆柱$x^2+y^2=ay$内部部分的面积(图10)

解：从球的方程（在Ⅰ象限）有 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

由于在第一象限，球投影部分是半圆，其边界是圆周$x^2+y^2=ay$和y轴。这个半圆为积分区域D。又由于曲面位于四个象限，因此，所求的面积是；

$$S=4a\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

我们用极坐标进行计算，此时，圆方程是$\rho=a\sin\theta$

$$S=4a\iint_D\frac{\rho d\rho d\theta}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=4a\int_0^{\pi/4}d\theta\int_0^{a\sin\theta}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}$$

$$=-4a\int_0^{\pi/4}\sqrt{a^2-\rho^2}\Big|_0^{a\sin\theta}d\theta=-4a^2\int_0^{\pi/2}(\cos\theta-1)d\theta$$

$$=-4a^2\left[\sin\theta-\theta\right]_0^{\pi/2}=4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

63．求圆锥$z=\sqrt{x^2+y^2}$在圆柱$x^2+y^2=2x$内部部分的面积（图11）

解：由圆锥方程有$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$积分区域$D$是圆，其圆的边界是$x^2+y^2=2x$，即 $\rho=2\cos\theta$，此时，

$$S=\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy$$

$$=\sqrt{2}\iint_D dxdy=\sqrt{2}\int_{\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho d\rho$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\rho^2\Big|_0^{2\cos\theta}d\theta=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}4\cos^2\theta d\theta$$