

经济数学基础

第一册

高等数学

主编 张广鉴

副主编 刘贞 庄宝辉

GAO DENG SHU XUE



北京经济学院出版社

(京)新登字211号

内 容 简 介

《经济数学基础第一册高等数学》是一本重点介绍一元函数的极限运算、导数运算和积分运算的成人高校或大专教材。本书特别对数学在经济方面的应用做了较系统的介绍,对常微分方程及二元函数微分和积分运算也做了简单的介绍。本书注重从实际和经济问题中引入基本概念,对概念的剖析清楚,几何直观性强,对问题的分析比较透彻,而且深入浅出,通俗易懂,例题较为丰富。特别是在经济方面的应用例题较为全面,是一本了解和掌握数学在经济方面应用的必读教材。

本书还配备的各种不同类型的大量习题,有利于加深理解基本概念和巩固知识。

高 等 数 学

Geodeng Shuxue

张广鉴 主编

北京经济学院出版社出版

(北京市朝阳区红庙)

北京市通县永乐印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

850×1168毫米 32开本 6.875印张 179千字

1992年8月第1版 1992年8月第1版第1次印刷

印数: 0 001—2 200

ISBN7-5638-0349-1/O·9

定价: 5.40元

前 言

本书是由国内各地区十余所经济管理和干部院校统编的经济数学基础教材。全书包括第一册高等数学；第二册概率论与数理统计；第三册线性代数。教材内容和深广度基本上是根据1990年国家教委主持制定的《高等院校经济类专业数学教学大纲草案》确定的。教材的编写力求简明适用，说理严谨，深入浅出，便于自学。对于基本概念和数学方法的阐述以及例题的配置，注意紧密联系经济管理专业实际，并注重现代管理的数学模型。本书适于用作经济管理和干部院校的数学教材，也可作为经济管理工作人员自学或参考用书。

第一册高等数学是由张广鉴、庄宝琿、刘贞、马致祥、尹晓红等同志编写的，其中：

第一章函数、第二章极限与连续，由庄宝琿编写；

第三章导数与微分、第六章定积分及其应用、第七章多元函数微积分学，由张广鉴编写；

第四章导数的应用，由马致祥编写；

第五章不定积分，由尹晓红编写；

张广鉴、刘贞、庄宝琿负责修改和通稿。

杨融盛同志参与了编写大纲的制定和初稿的校阅，提出了宝贵意见，在此谨致谢忱。

本书是各院校教师在承担繁重教学工作的同时组织编写的，书中缺点、错误在所难免，恳请读者批评指正。

编 者

1992年5月

目 录

第一章 函数	(1)
第一节 函数的概念	(1)
一、常量与变量	(1)
二、函数的定义	(1)
三、函数的定义域、对应规则和函数值	(3)
四、函数的表示法	(7)
第二节 管理与经济学中的函数关系举例	(9)
一、成本函数	(9)
二、销售收入函数	(10)
三、利润函数	(10)
四、需求函数	(11)
五、库存问题	(11)
第三节 函数的性质	(12)
一、函数的奇偶性	(12)
二、函数的单调增减性	(13)
三、函数的周期性	(14)
四、函数的有界性	(14)
第四节 反函数	(15)
第五节 基本初等函数	(16)
第六节 复合函数与初等函数	(20)
一、复合函数	(20)
二、初等函数	(21)
习题	
第二章 极限与连续	(25)

第一节 数列的极限	(25)
一、数列	(25)
二、数列的极限	(25)
三、数列极限的四则运算	(27)
第二节 函数的极限	(28)
一、当 $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限	(28)
二、当 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限	(30)
三、左极限与右极限	(31)
第三节 无穷小量与无穷大量	(33)
一、无穷小量	(33)
二、无穷大量	(34)
三、无穷小量的阶	(34)
第四节 极限的运算法则	(35)
第五节 两个重要极限	(39)
一、极限存在的判定准则	(39)
二、两个重要极限	(40)
第六节 函数的连续性	(41)
一、函数的连续性	(41)
二、函数的间断点	(47)
三、闭区间上连续函数的性质	(48)
习题二	
第三章 导数与微分	(54)
第一节 导数的概念	(54)
一、引出导数概念的实例	(54)
二、导数的定义	(56)
三、可导与连续的关系	(61)
四、导数的几何意义	(61)
第二节 几个基本初等函数的导数	(62)
一、常数的导数	(62)

二、幂函数 $y = x^x$ 的导数	(63)
三、正弦函数和余弦函数的导数	(63)
四、对数函数的导数 $y = \log_a x$	(64)
第三节 求导法则	(65)
一、导数的四则运算法则	(65)
二、反函数的导数	(66)
三、复合函数求导法	(68)
四、隐函数的求导法	(70)
五、求导方法小结	(72)
第四节 高阶导数	(74)
第五节 微分及其应用	(76)
一、微分的概念	(76)
二、微分法则、公式	(77)
三、微分的应用	(80)
习题三	
第四章 中值定理和导数的应用	(86)
第一节 中值定理	(86)
第二节 洛必塔法则	(87)
一、 $\frac{0}{0}$ 型与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	(88)
二、其它类型未定式	(91)
第三节 函数的增减性	(92)
第四节 函数的极值	(94)
一、极值定义	(94)
二、判定极值的条件	(95)
三、最大值与最小值	(98)
第五节 函数图形的描绘	(100)
一、曲线的凹性与拐点	(100)
二、曲线的渐近线	(102)
三、函数图形的描绘	(103)

第六节 导数在经济管理中的应用	(104)
一、经济函数的最大、最小值	(104)
二、边际分析	(106)
三、函数的弹性	(108)
习题四	
第五章 不定积分	(114)
第一节 不定积分的概念和性质	(114)
一、原函数与不定积分的概念	(114)
二、不定积分的性质	(117)
第二节 不定积分的基本公式	(119)
第三节 换元积分法	(122)
一、第一类换元积分法	(122)
二、第二类换元积分法	(126)
第四节 分部积分法	(131)
第五节 常微分方程简介	(135)
一、微分方程的例子和基本概念	(135)
二、一阶可分离变量的微分方程	(138)
三、一阶线性微分方程	(141)
习题五	
第六章 定积分及其应用	(147)
第一节 定积分的概念	(147)
一、实例	(147)
二、定积分的定义	(151)
第二节 定积分的性质	(152)
第三节 定积分与不定积分的关系	(151)
一、变上限的积分	(151)
二、牛顿——莱布尼兹公式	(155)
第四节 定积分的计算	(157)
一、定积分的换元积分法	(158)

二、定积分的分部积分法	(159)
第五节 定积分应用	(163)
一、微元法	(160)
二、平面图形的面积	(161)
三、旋转体的体积	(165)
四、定积分在经济管理中的应用	(166)

习题六

第七章 多元函数微积分简介	(173)
第一节 二元函数的基本概念	(173)
一、空间直角坐标系	(173)
二、二元函数的概念	(174)
三、二元函数的极限和连续性	(177)
第二节 偏导数	(173)
一、偏导数的概念	(178)
二、经济学中的弹性理论	(180)
三、高阶偏导数	(182)
四、复合函数的微分法	(181)
第三节 二元函数的极值	(185)
一、极值	(185)
二、最小二乘法	(187)
三、条件极值	(191)
第四节 全微分及其应用	(193)
一、全微分的概念	(193)
二、全微分在近似计算和误差估计中的应用	(196)
第五节 二重积分	(197)
一、二重积分的概念	(197)
二、二重积分的性质	(200)
三、二重积分的计算	(200)

习题七

第一章 函数

第一节 函数的概念

一 常量与变量

在研究各种自然现象、经济现象或技术过程中，常常遇到各种不同的量。时间、速度、距离、产品的产量、成本、价格、原料消耗值等等。尽管它们各自代表的意义不同，但在所研究的过程中，就这些量的变化状态而言，一般可分为两类，在这个过程中：

I 保持相对不变数值的量叫做常量；

II 不断变化，可取不同数值的量叫做变量。

应当注意：一个量是常量还是变量并不是绝对的，应根据问题的不同要求，具体地进行分析。例如，一根钢尺的长度一般是个常量，但在温度变化较大的情况下，尺长受热胀冷缩的影响，在精密度量时应把尺长看成是变量。一般来说，如果一个变量在所讨论的过程中变化很小，而且对于实际需要来说可以看作是不变的，则可以把这个变量看做是常量。

在高等数学中，我们常用 a 、 b 、 c 等字母来表示常量，用 x 、 y 、 z 、 g 、 t 等字母来表示变量。

二 函数的定义

在现实世界的每个自然现象、经济现象及技术过程中，我们所研究的各个量之间，一般都不是彼此孤立存在的，而是相互联系、相互依赖、相互制约的。因此，我们不能孤立地研究某个量

的数量变化情况，重要的是要研究各个变量之间相互依赖的关系，从而进一步揭示它们的内部规律性。现在我们就两个变量的关系先举几个例子。

例1 商店里销售电视机，对于电视机销售量的每个值 x 总有一个销售总收入 y 与之对应。它们之间的关系由式子

$$y = ax$$

表示，其中 a 是电视机的单价。

上面式子表达了由销售量 x 值确定销售总收入 y 值的规则。即当 x 取某定值 x_0 时，按照 $y = ax$ 这一对应规则， y 的对应值为 ax_0 。

例2 某工厂决定生产某种新产品，该产品投产前，需要一次性地投入一笔较大的生产准备费用 b 元（称固定成本）。而生产每件产品时，还要消耗一定的原料等，支出为 a 元，设产量为 x ，则生产每件产品的成本 y 可由下面式子表达

$$y = \frac{b}{x} + a$$

式子 $y = \frac{b}{x} + a$ 表达了产量 x 与每件产品的成本 y 对应的规则。即当 x 取值为 x_0 时，按照 $y = \frac{b}{x} + a$ 这一对应规则， y 的对应值为 $\frac{b}{x_0} + a$ 。

例3 初速度为0的自由落体运动，路程 s 与时间 t 的关系满足下式

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

其中 g 是重力加速度（常量）。

它的对应的规则是：当时间 t 取值 t_0 时，按照 $s = \frac{1}{2}gt^2$ ， s 的

对应值为 $\frac{1}{2}gt^2$ 。

在上面几个例子中，若不考虑这些量的实际意义，它们都表达了两个变量之间的依赖关系，这种依赖关系表现为一种对应规则，根据这一规则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就根据对应规则有确定的值与之对应。两个变量间的这种对应关系就构成函数概念。

定义1 在某一变化过程中，有两个相互联系着的变量 x 和 y 。如果当变量 x 在某个范围内任取一确定值时，变量 y 按照某个对应规则都有唯一确定值 y 与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数。记作 $y=f(x)$ 。

其中， x 叫做自变量， y 叫做因变量。

在函数定义中，包含着如下两个要素：

I 自变量 x 的变化范围，叫做函数 $y=f(x)$ 的定义域，记作 D 。

II 因变量 y 依赖于自变量 x 的对应规则。

三 函数的定义域、对应规则和函数值

1. 函数的定义域

函数的定义域是指自变量 x 允许取值的范围。如何确定函数的定义域，可就下面两种情况来考虑。

第一，对于由实际问题得到的函数，应根据实际问题的意义来确定。在例1中，自变量 x 表示电视机售出的台数，显然 x 的取值为0与自然数，这些离散的数值就是函数 $y=ax$ 的定义域。在例3中，若物体下落后经过 T 秒着地，则函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域应为 $[0, T]$ 。

第二，如果我们讨论的函数对应规则仅仅是由某个数字算式给出，不需要考虑它的实际意义，那么这个函数的定义域就是指能使函数取得实数值的全体自变量值。例如，函数 $y=\frac{1}{x}$ 的定

义域是由除去0以外的一切实数组成。它的定义域可简单地用 $x \neq 0$ 表示。又如函数 $y = \sqrt{x}$ 的定义域是由一切正数和0组成，因而它的定义域也可用不等式表示为： $x \geq 0$ 或 $0 \leq x < +\infty$ (“ $+\infty$ ”读作正无穷大)。

我们知道，实数与数轴上的点是一一对应的，如果变量 x 的变化范围是 $a \leq x \leq b$ ，那么变量 x 在数轴上对应的点，就是在以 a 、 b 为端点的线段上连续变动的点。我们把不等式 $a \leq x \leq b$ 表示的包括两端点在内的这一变化范围叫做闭区间，记作 $[a, b]$ 。而把由不等式 $a < x < b$ 表示的不包括两端点在内的变化范围叫做开区间，记作 (a, b) 。如果变量 x 的变化范围是 $a \leq x < b$ ，那么在数轴上对应于 x 的点就是包括端点 a ，而不包括端点 b 的线段上变动的点，叫做半开区间或半闭区间，记作 $[a, b)$ 。类似的 $a < x \leq b$ ，记作 $(a, b]$ 。如图1。

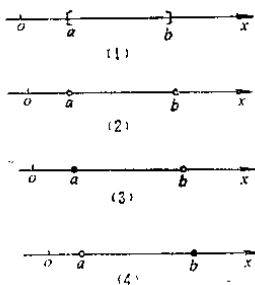


图 1.1

例4 求 $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$ 的定义域。

解 在实数范围内要求 $x^2 - x - 6 \geq 0$ ，解不等式组

$$\text{I: } \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \text{II: } \begin{cases} x-3 \leq 0 \\ x+2 \leq 0 \end{cases}$$

得 $x \geq 3$ 或 $x \leq -2$ 是函数 $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$ 的定义域(图2)。

例5 求函数 $y = \log_3 \log_5(x+7)$ 的定义域。

解 当 $\log_5(x+7) > 0$ 即 $x+7 > 1$ 时， $y = \log_3 \log_5(x+7)$ 才有意义。得 $x > -6$ (图3)。

所以函数 $y = \log_3 \log_5(x+7)$ 的定义域为 $x > -6$ 。

在今后讨论的问题中，我们还要经常用邻域这个概念。

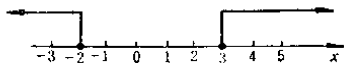


图2

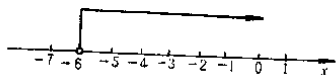


图3

定义2 以点 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ，称为点 x_0 的 δ 邻域，即

$$|x - x_0| < \delta, (\delta > 0)$$

如果邻域不包括点 x_0 ，则称为 x_0 的去心邻域，即

$$0 < |x - x_0| < \delta, (\delta > 0)$$

例如 $x = 5$ 的 0.01 邻域是 $|x - 5| < 0.01$ ，即开区间 $(4.99, 5.01)$ 。

2. 函数的对应规则

函数的对应规则是因变量 y 和自变量 x 依赖关系的具体表现，如例1、例2和例3。前面已对它们的对应规则做了具体说明。

当泛指一个函数关系： y 是 x 的函数时，可表为 $y = f(x)$ ，这里的“ f ”表示这函数的对应规则。

必须指出的是：在同一个问题中，同时讨论几个不同的函数关系时，应该用不同的函数记号来表示。如， $y = f(x)$ ， $y = F(x)$ ， $y = g(x)$ 等等。这里的字母“ f ”，“ F ”，“ g ”，等等，分别表示因变量 y 和自变量 x 之间各种不同的对应规则。

例6 某种食品3元一斤，商店为了多销商品，规定顾客一次购买10斤以内按原价付款；一次购买10斤到20斤，则10斤以上部分按九折优惠；一次购买20斤以上，则20斤以上部分按八折优惠。试建立一次销售量 x 与对应货款 y 之间的函数关系。

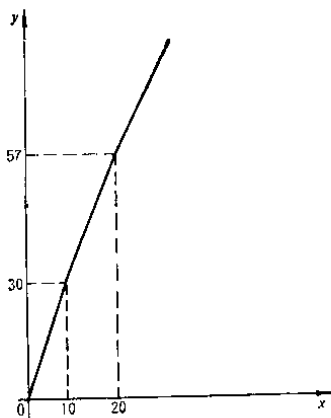


图 4

解 当 $0 \leq x \leq 10$ 时, $y = 3x$

当 $10 < x \leq 20$ 时, $y = 30 + 2.7(x - 10)$

当 $20 < x$ 时, $y = 57 + 2.4(x - 20)$

y 与 x 的关系表示为

$$y = f(x) = \begin{cases} 3x & 0 \leq x \leq 10 \\ 30 + 2.7(x - 10) & 10 < x \leq 20 \\ 57 + 2.4(x - 20) & 20 < x \end{cases}$$

由例6可知, 当自变量 x 在不同的范围内取值时, 函数 $y = f(x)$ 的对应值要由不同的解析式来计算。这种由几个解析式表达的函数, 称之为分段函数。注意: 这不是几个函数, 而是一个函数, 只是当 x 在 $[0, 10]$ 内变化时, 函数 $y = f(x)$ 的对应规则为 $y = 3x$; 当 x 在 $(10, 20]$ 及 $(20, \infty)$ 内变化时, 对应规则分别为 $y = 30 + 2.7(x - 10)$ 及 $y = 57 + 2.4(x - 20)$ 。

3. 函数值的求法

对于函数 $y=f(x)$, 当 $x=x_0$ 时, 对应的函数值 y_0 记为

$$y_0=f(x_0)$$

例如 $f(x)=3x^2-2x+1$, 当 $x=5$ 及 $x=-1$ 时的函数值分别为,

$$f(5)=3 \times 5^2 - 2 \times 5 + 1 = 66$$

$$f(-1)=3 \times (-1)^2 - 2 \times (-1) + 1 = 6$$

$y=f(x)$ 的全体函数值, 叫做函数 $y=f(x)$ 的值域。

例7 已知 $F(x)=\sqrt{x-3}$, 求 $F(4)$, $F(7)$, $F(-\frac{1}{a})$ 。

解 $F(4)=\sqrt{4-3}=1$;

$$F(7)=\sqrt{7-3}=2$$

$$F(-\frac{1}{a})=\sqrt{-\frac{1}{a}-3}=\sqrt{\frac{1-3a}{a}} \quad (\text{这里要求}$$

$$0 < a \leq \frac{1}{3})$$

四 函数的表示法

1. 解析表示法 (公式法)

如果因变量 y 和自变量 x 的对应规则是用数学公式表达的, 例如前面诸例中

$$y=ax, \quad s=\frac{1}{2}gt^2, \quad y=\log_3 \log_5(x+7)。$$

这种用公式表达函数关系的方法, 称为解析表示法。

2. 图象表示法

设函数 $y=f(x)$ 中的自变量 x 表示为平面直角坐标系中点 M 的横坐标, 而与 x 对应的函数值 y (单值) 表示点 M 的纵坐标, 即 $M(x, y)$ 看作平面直角坐标系中的一点。当 x 取遍函数定义域中所有值时, 相应的点 (x, y) 组成的集合是平面上一条曲线 (图 5), 此曲线称为函数 $y=f(x)$ 的图象。

反过来, 在平面直角坐标系内, 任意一条曲线 (平行于 y 轴的任一直线与这曲线至多交于一点) 表示一个函数。当自变量 x

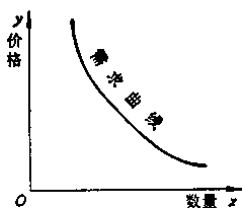


图5

的值等于曲线上点的横坐标时，则对应的函数值等于该点的纵坐标。因此，函数也可由平面直角坐标系内的一条曲线表示，称为函数的图象表示法。图5是一条反映商品价格与需求量之间关系的曲线。一般地说，在其它条件不变时，当商品价格上涨时，需求量就会下降；反之，需求量就会

会增加。这种表示法直观性强，可以直接反映出函数的某些特征。

3. 表格表示法

在实际问题中，常将自变量一系列的值与对应的函数值列成表，这种表示函数的方法叫做函数的表格表示法。

例如，某厂生产水泥的日生产能力为800吨，管理人员为了进一步分析产量与成本的关系，将产量 P 与所对应的成本用表格（表1）记录如下：

表1

产 量 P (吨)	100	200	300	400	500	600	700	800
成 本 Q (元)	6 300	8 300	10 800	13 300	15 800	18 300	20 800	23 300
单位产量成本 (元/吨)	63	41.5	36	33.3	31.6	30.5	29.7	29.1

在企业管理工作中，各种统计用表都可看成是用表格法表示函数的对应关系。

事实上，在企业管理工作中，函数的表格法、图象法已被广泛使用。并且常常是把函数关系的几种表示方法结合起来对问题进行分析和研究。例如，为了解某产品的劳动生产率变化情况，首先要在规定时间间隔内，对生产的产品数量进行统计工作，如表2。

表2

时间间隔 T_i	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
产品数量 Q_i	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7

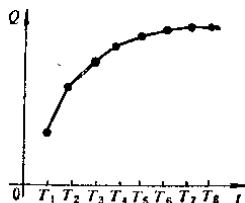


图6

一般来说,随着工作时间的增长,工人的技术水平、熟练程度不断提高,产量也会不断增加,即产量是时间的函数,在统计表2的基础上,人们往往进一步将表2的结果在坐标纸上绘制成图形(见图6)。图形可以直观地反映出劳动生产率的变化趋势,可以帮助企业管理人员改进生产和作出决策。

第二节 管理与经济学中的函数关系举例

根据前面的论述可知,函数是描述与揭示那些相互联系、相互依赖、相互制约的事物内在规律的重要数学概念,因此,越来越多的人试图把管理与经济活动中出现的现象与过程转化成数学中的函数关系,并通过对函数的研究结果,反过来指导管理工作和作出决策。下面介绍一些在管理与经济中常用的函数。

一 成本函数

如果生产某新产品,生产前必须投入一笔资金 b (元),用以添置设备等项活动,而开始生产产品时,每单位产品还需支付 a 元。显然,产量为 x 时总投入的资金应为

$$C(x) = b + ax$$

其中 b 为常数,称为固定成本, a 称为单位产品的变动成本,