经济数学基础

第一册

高等数学

主编　张广鉴

副主编　刘点　庄宝辉

GAO DENG SHU XUE

北京经济学院出版社

(京)新登字211号

内 容 简 介

《经济数学基础第一册高等数学》是一本重点介绍一元函数的极限运算、导数运算和积积分运算的成人高校或大专教材。本书特别对数学在经济方面的应用做了较系统的介绍，对常微分方程及二元函数微分和积分运算也做了简单的介绍。本书注重从实际和经济问题中引入基本概念，对概念的剖析清楚，几何直观性强，对问题的分析比较透彻，而且深入浅出，通俗易懂，例题较为丰富。特别是在经济方面的应用例题较为全面，是一本了解和掌握数学在经济方面应用的必读教材。

本书还配备的各种不同类型的大量习题，有利于加深理解基本概念和巩固知识。

高 等 数 学

Gaodeng Shuxue

张广紫 主编

北京经济学院出版社出版

（北京市朝阳区红庙）

北京市通县永乐印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

850×1168毫米 32开本 6.875印张 179千字

1992年8月第1版 1992年8月第1版第1次印刷

印数：0 001—2 200

ISBN7-5638-0349-1/O·9

定价：5.40元

前　言

本书是由国内各地区十余所经济管理和管理干部院校统编的经济数学基础教材。全书包括第一册高等数学；第二册概率论与数理统计；第三册线性代数。教材内容和深广度基本上是根据1990年国家教委主持制定的《高等院校经济类专业数学教学大纲草案》确定的。教材的编写力求简明适用，说理严谨，深入浅出，便于自学。对于基本概念和数学方法的阐述以及例题的配置，注意紧密联系经济管理专业实际，并注重现代管理的数学模型。本书适于用作经济管理和管理干部院校的数学教材，也可作为经济管理工作人员自学或参考用书。

第一册高等数学是由张广鉴、庄宝珲、刘贞、马致祥、尹晓红等同志编写的，其中：

第一章函数、第二章极限与连续，由庄宝珲编写；

第三章导数与微分、第六章定积分及其应用、第七章多元函数微积分学，由张广鉴编写；

第四章导数的应用，由马致祥编写；

第五章不定积分，由尹晓红编写；

张广鉴、刘贞、庄宝珲负责修改和通稿。

杨融盛同志参与了编写大纲的制定和初稿的校阅，提出了宝贵意见，在此谨致谢忱。

本书是各院校教师在承担繁重教学工作的同时组织编写的，书中缺点、错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1992年5月

目　录

第一章 函数

第一节 函数的概念

一 常量与变量

在研究各种自然现象、经济现象或技术过程中，常常遇到各种不同的量。时间、速度、距离、产品的产量、成本、价格、原料消耗值等等。尽管它们各自代表的意义不同，但在所研究的过程中，就这些量的变化状态而言，一般可分为两类，在这个过程中：

Ⅰ 保持相对不变数值的量叫做常量；

Ⅱ 不断变化，可取不同数值的量叫做变量。

应当注意：一个量是常量还是变量并不是绝对的，应根据问题的不同要求，具体地进行分析。例如，一根钢尺的长度一般是个常量，但在温度变化较大的情况下，尺长受热胀冷缩的影响，在精密度量时应把尺长看成是变量。一般来说，如果一个变量在所讨论的过程中变化很小，而且对于实际需要来说可以看作是不变的，则可以把这个变量看做是常量。

在高等数学中，我们常用a、b、c等字母来表示常量，用x、y、z、g、t等字母来表示变量。

二 函做的定义

在现实世界的每个自然现象、经济现象及技术过程中，我们所研究的各个量之间，一般都不是彼此孤立存在的，而是相互联系、相互依赖、相互制约的。因此，我们不能孤立地研究某个量

的数量变化情况，重要的是要研究各个变量之间相互依赖的关系，从而进一步揭示它们的内部规律性。现在我们就两个变量的关系先举几个例子。

例1 商店里销售电视机，对于电视机销售量的每个值x总有一个销售总收入y与之对应。它们之间的关系由式子

$$y=ax$$

表示，其中a是电视机的单价。

上面式子表达了由销售量x值确定销售总收入y值的规则。即当x取某定值x_0时，按照$y=ax$这一对应规则，y的对应值为ax_0。

例2 某工厂决定生产某种新产品，该产品投产前，需要一次性地投入一笔较大的生产准备费用b元（称固定成本）。而生产每件产品时，还要消耗一定的原料等，支出为a元，设产量为x，则生产每件产品的成本y可由下面式子表达

$$y=\frac{b}{x}+a$$

式子$y=\frac{b}{x}+a$表达了产量x与每件产品的成本y对应的规则。即当x取值为x_0时，按照$y=\frac{b}{x}+a$这一对应规则，y的对应值为$\frac{b}{x_0}+a$。

例3 初速度为0的自由落体运动，路程s与时间t的关系满足下式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中g是重力加速度（常量）。

它的对应的规则是：当时间t取值t_0时，按照$s=\frac{1}{2}gt^2$，s的

对应值为$\frac{1}{2}gt_0^2$。

在上面几个例子中，若不考虑这些量的实际意义，它们都表达了两个变量之间的依赖关系，这种依赖关系表现为一种对应规则，根据这一规则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就根据对应规则有确定的值与之对应。两个变量间的这种对应关系就构成函数概念。

定义1　在某一变化过程中，有两个相互联系着的变量x和y。如果当变量x在某个范围内任取一确定值时，变量y按照某个对应规则都有唯一确定值y与之对应，则称变量y是变量x的函数。记作$y=f(x)$。

其中，x叫做自变量，y叫做因变量。

在函数定义中，包含着如下两个要素：

Ⅰ　自变量x的变化范围，叫做函数$y=f(x)$的定义域，记作D。

Ⅱ　因变量y依赖于自变量x的对应规则。

三　函数的定义域、对应规则和函数值

1．函数的定义域

函数的定义域是指自变量x允许取值的范围。如何确定函数的定义域，可就下面两种情况来考虑。

第一，对于由实际问题得到的函数，应根据实际问题的意义来确定。在例1中，自变量x表示电视机售出的台数，显然x的取值为0与自然数，这些离散的数值就是函数$y=ax$的定义域。在例3中，若物体下落后经过T秒着地，则函数$s=\frac{1}{2}gt^2$的定义域应为$[0, T]$。

第二，如果我们讨论的函数对应规则仅仅是由某个数字算式给出，不需要考虑它的实际意义，那么这个函数的定义域就是指能使函数取得实数值的全体自变量值。例如，函数$y=\frac{1}{x}$的定

义域是由除去0以外的一切实数组成。它的定义域可简单地用$x\neq 0$表示。又如函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域是由一切正数和0组成，因而它的定义域也可用不等式表示为：$x\geqslant 0$或$0\leqslant x<+\infty$（“$+\infty$”读作正无穷大）。

我们知道，实数与数轴上的点是一一对应的，如果变量x的变化范围是$a\leqslant x\leqslant b$，那么变量x在数轴上对应的点，就是在以a、b为端点的线段上连续变动的点。我们把不等式$a\leqslant x\leqslant b$表示的包括两端点在内的这一变化范围叫做闭区间，记作$[a, b]$。而把由不等式$a<x<b$表示的不包括两端点在内的变化范围叫做开区间，记作(a, b)。如果变量x的变化范围是$a\leqslant x<b$，那么在数轴上对应于x的点就是包括端点a，而不包括端点b的线段上变动的点，叫做半开区间或半闭区间，记作$[a, b)$。类似的$a<x\leqslant b$，记作$(a, b]$。如图1。

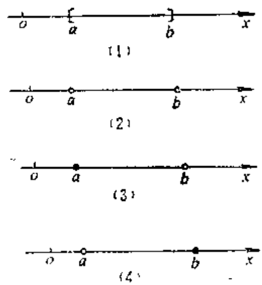

图 1.1

例4 求$y=\sqrt{x^2-x-6}$的定义域。

解 在实数范围内要求$x^2-x-6\geqslant 0$，解不等式组

$$\text{I}:\begin{cases} x-3\geqslant 0 \\ x+2\geqslant 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \text{II}:\begin{cases} x-3\leqslant 0 \\ x+2\leqslant 0 \end{cases}$$

得$x\geqslant 3$或$x\leqslant -2$是函数$y=\sqrt{x^2-x-6}$的定义域(图2)。

例5 求函数$y=\log_3\log_5(x+7)$的定义域。

解 当$\log_5(x+7)>0$即$x+7>1$时，$y=\log_3\log_5(x+7)$才有意义。得$x>-6$(图3)。

所以函数$y=\log_3\log_5(x+7)$的定义域为$x>-6$。

在今后讨论的问题中，我们还要经常用邻域这个概念。

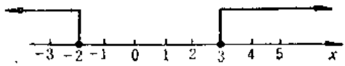

图2

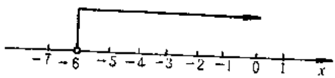

图3

定义2　以点x_0为中心，长度为2δ的开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$，称为点x_0的δ邻域，即

$$|x-x_0|<\delta, \quad (\delta>0)$$

如果邻域不包括点x_0，则称为x_0的去心邻域，即

$$0<|x-x_0|<\delta, \quad (\delta>0)$$

例如　$x_0=5$的0.01邻域是$|x-5|<0.01$，即开区间$(4.99, 5.01)$。

2。函数的对应规则

函数的对应规则是因变量y和自变量x依赖关系的具体表现，如例1、例2和例3。前面已对它们的对应规则做了具体说明。

当泛指一个函数关系：y是x的函数时，可表为$y=f(x)$，这里的"f"表示这函数的对应规则。

必须指出的是：在同一个问题中，同时讨论几个不同的函数关系时，应该用不同的函数记号来表示。如，$y=f(x)$，$y=F(x)$，$y=g(x)$等等。这里的字母"f"，"F"，"g"，等等，分别表示因变量y和自变量x之间各种不相同的对应规则。

例6　某种食品3元一斤，商店为了多销商品，规定顾客一次购买10斤以内按原价付款；一次购买10斤到20斤，则10斤以上部分按九折优惠；一次购买20斤以上，则20斤以上部分按八折优惠。试建立一次销售量x与对应货款y之间的函数关系。

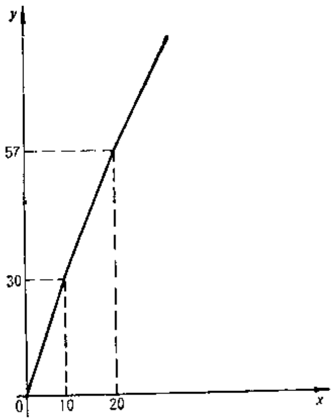

图4

解　当$0\leqslant x\leqslant 10$时，$y=3x$

当$10<x\leqslant 20$时，$y=30+2.7(x-10)$

当$20<x$时，$y=57+2.4(x-20)$

y与x的关系表示为

$$y=f(x)=\begin{cases} 3x & 0\leqslant x\leqslant 10 \\ 30+2.7(x-10) & 10<x\leqslant 20 \\ 57+2.4(x-20) & 20<x \end{cases}$$

由例6可知，当自变量x在不同的范围内取值时，函数$y=f(x)$的对应值要由不同的解析式子来计算。这种由几个解析式表达的函数，称之为分段函数。注意：这不是几个函数，而是一个函数，只是当x在$[0, 10]$内变化时，函数$y=f(x)$的对应规则为$y=3x$；当x在$(10, 20]$及$(20, \infty)$内变化时，对应规则分别为$y=30+2.7(x-10)$及$y=57+2.4(x-20)$。

3. 函数值的求法

对于函数$y=f(x)$，当$x=x_0$时，对应的函数值y_0记为

$$y_0=f(x_0)$$

例如$f(x)=3x^2-2x+1$，当$x=5$及$x=-1$时的函数值分别为：

$$f(5)=3\times5^2-2\times5+1=66$$

$$f(-1)=3\times(-1)^2-2\times(-1)+1=6$$

$y=f(x)$的全体函数值，叫做函数$y=f(x)$的值域。

例7 已知$F(x)=\sqrt{x-3}$，求$F(4)$，$F(7)$，$F(\frac{1}{a})$。

解 $F(4)=\sqrt{4-3}=1$；

$F(7)=\sqrt{7-3}=2$；

$F\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{\frac{1}{a}-3}=\sqrt{\frac{1-3a}{a}}$。（这里要求$0<a\leqslant\frac{1}{3}$）

四 函数的表示法

1. 解析表示法（公式法）

如果因变量y和自变量x的对应规则是用数学公式表达的，例如前面诸例中

$$y=ax,\quad s=\frac{1}{2}gt^2,\quad y=\log_3\log_5(x+7)。$$

这种用公式表达函数关系的方法，称为解析表示法。

2. 图象表示法

设函数$y=f(x)$中的自变量x表示为平面直角坐标系中点M的横坐标，而与x对应的函数值y(单值)表示点M的纵坐标，即$M(x, y)$看作平面直角坐标系中的一点。当x取遍函数定义域中所有值时，相应的点(x, y)组成的集合是平面上一条曲线（图5），此曲线称为函数$y=f(x)$的图象。

反过来，在平面直角坐标系内，任意一条曲线（平行于y轴的任一直线与这曲线至多交于一点）表示一个函数。当自变量x

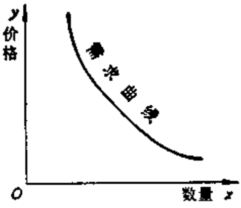

图5

的值等于曲线上点的横坐标时，则对应的函数值等于该点的纵坐标。因此，函数也可由平面直角坐标系内的一条曲线表示，称为函数的图象表示法。图5是一条反映商品价格与需求量之间关系的曲线。一般地说，在其它条件不变时，当商品价格上涨时，需求量就会下降；反之，需求量就会增加。这种表示法直观性强，可以直接反映出函数的某些特征。

3. 表格表示法

在实际问题中，常将自变量一系列的值与对应的函数值列成表，这种表示函数的方法叫做函数的表格表示法。

例如：某厂生产水泥的日生产能力为800吨，管理人员为了进一步分析产量与成本的关系，将产量P与所对应的成本用表格（表1）记录如下：

表1

产　　量　P（吨）	100	200	300	400	500	600	700	800
成　　本　Q（元）	6 300	8 300	10 800	13 300	15 800	18 300	20 800	23 300
单位产量成本（元/吨）	63	41.5	36	33.3	31.6	30.5	29.7	29.1

在企业管理工作中，各种统计用表都可看成是用表格法表示函数的对应关系。

事实上，在企业管理工作中，函数的表格法、图象法已被广泛使用。并且常常是把函数关系的几种表示方法结合起来对问题进行分析和研究。例如，为了解某产品的劳动生产率变化情况，首先要在规定时间间隔内，对生产的产品数量进行统计工作，如表2。

表2

时间间隔 T_i	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
产品数量 Q_i	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7

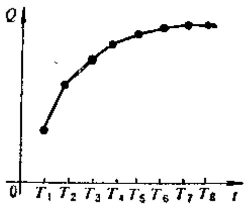

图6

一般来说，随着工作时间的增长，工人的技术水平、熟练程度不断提高，产量也会不断增加，即产量是时间的函数，在统计表2的基础上，人们往往进一步将表2的结果在坐标纸上绘制成图形（见图6）。图形可以直观地反映出劳动生产率的变化趋势，可以帮助企业管理人员改进生产和作出决策。

第二节　管理与经济学中的函数关系举例

根据前面的论述可知，函数是描述与揭示那些相互联系、相互依赖、相互制约的事物内在规律的重要数学概念，因此，越来越多的人试图把管理与经济活动中出现的现象与过程转化成数学中的函数关系，并通过对函数的研究结果，反过来指导管理工作和作出决策。下面介绍一些在管理与经济中常用的函数。

一　成本函数

如果生产某新产品，生产前必须投入一笔资金 b(元)，用以添置设备等项活动，而开始生产产品时，每单位产品还需支付 a元。显然，产量为x时总投入的资金应为

$$C(x)=b+ax$$

其中b为常数，称为固定成本，a称为单位产品的变动成本，