

初等数学教程

[法] G·达尔布 主编

几 何

立 体 部 分

[法] J·阿达玛 著

上海科学技术出版社

〔法〕 G. 达尔布主编

• 初等数学教程 •

几 何

立 体 部 分

〔法〕 J. 阿达玛 著

朱 德 祥 译

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是法国数学家 G. Darboux 主编的初等数学教程之一的中译本。除详细而严格地论述了目前中学所学的立体几何内容外,还包括了常用曲线、测量概念、以及有关近世几何方面等内容。书中附有大量习题,颇有启发性。

本书可供中学数学教师、师范院校数学系师生参考。

LEÇONS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, II.

J. Hadamard • 1932

〔法〕G. 达尔布主编 初等数学教程

几 何

立体部分

〔法〕J. 阿达玛 著

朱 德 祥 译

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

科学书店上海发行所发行 安徽新华印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 19.25 字数 507,000

1966 年 3 月第 1 版 1980 年 3 月第 2 次印刷

印数 10,001—40,000

书号: 13119·779 定价: 2.15 元

中译本序

第一次世界大战后，美国数学会曾派出一个以 M. Bocher 为首的考察团到法国，目的是了解为什么当时法国数学如此发达。该考察团在巴黎和法国外省都进行了详尽的调查，回国后在 Bulletin of American Mathematical Society 上发表了一个报告。结论是：法国数学的发展，得力于它的中等数学教育。

诚然，法国中学教师一般都是高等师范学校 (Ecole Normale Supérieure) 毕业的。该校历史悠久，入学考试很严格。毕业后还需经过很严格的教师合格考试 (Agrégation) 才能成为合格教师 (Agrégé)。中学教师也同大学教师一样称教授 (Professeur)。

中学教授讲课一般不用教科书，教了几年后，各教授都要写一套教科书，所以这类教科书很多，对中学生的自学提供了很大的方便。数学在中学课程中占很大的份量。特别数学班 (Classe de Mathématiques Spéciale) 则是中学最高的班次，也可以说是准备投考大学或高等学校的预备班。教特别数学班的教师一般是最有经验的教师。特别数学班教科书也最多。其中 G. Darboux 院士主编的一套尤被推崇。

中学，特别是它的后期，是人们求知欲最强烈的时期，也是精力最充沛的时期。在这个时期(年龄大约在 17~20 岁左右)，使学生有大量吸收新知识和迅速扩大思维能力的机会，一旦到象高等师范学校这样一个处于当代自然科学最前线的地方，耳濡目染，就能很容易地发现有价值的新课题和解决这种新课题应走的道路。法国数学家一般在 22~23 岁时就能完成有开创性的博士论文，这就说明了为什么法国数学的发展得力于中学数学教育。

1963年上海科学技术出版社为了发展祖国数学, 为了提供中学教师和中学生以良好的数学参考读物, 曾组译出版了 G. Darboux 院士主编的那套书的三部四本。问世以后, 颇受读者欢迎, 最近, 中学教育受到了很大的重视, 需要该套书的人很多, 但书店早已脱销, 读者每致向隅。上海科学技术出版社决定重印, 因纸版已被毁, 不得已决定重排。原套还有 J. Tannery 所著 “*Leçons d'Arithmétique théorique et pratique*” 一书, 丰富翔实, 很多内容为同套其他各书所引用, 此次也已请朱德祥同志译出, 可望在稍后出版。

主编者 G. Darboux 院士晚年任法兰西学院终身书记, 早年毕业于高等师范学校, 是微分几何学家, 在分析各方面也有很多重要贡献。J. Tannery 院士长期任高等师范学校校长, 曾指导了许多年青数学家的开创性工作, 例如 J. Hadamard, E. Borel 和 E. Cartan 三院士, 都是在他指导下开始工作的。他撰写的这本算术书, 事实上是数论初步。对数的概念从自然数到实数的拓广, 特别是实数概念的建立和极限概念的引进, 叙述明确, 立论严谨, 构成这套教科书其它各书的骨骼, 也是现代分析的基础。德国曾有该书译本并稍加增补。

J. Hadamard 院士主要致力于把柯西在分析上的局部理论推论到全局。在复域里, 体现在他的“戴劳级数所定义的函数的解析延拓”方面的成就, 这个成就导致了解析数理的建立。在实域里, 体现在常微分方程定性理论, 线性偏微分方程定解问题理论, 变分学和泛函分析等方面的成就。在这套教科书中, J. Hadamard 撰写了“几何”平面和空间各一册, Bourlet 教授写了“代数”和“平面三角”, Bourlet 曾在偏微分方程理论和泛函分析方面做出了重要贡献。

这套书的特点, 推理严谨, 观点清新。力求给人以“规矩”, 而不过分追求技巧。若引进一新的概念, 则其定义必求是最新的, 这样就使中学生阅读之后便于将来接受大学中的新知识。若叙述一方法, 则力求尽其用, 力求用简明的方法, 解决一系列问题。许多

附录都是必要的补充，目的还是使中学生便于将来顺利地接受大学教程。随着课文附加一些有意义的习题。这些习题的选择和部署是经过一番精心考虑的。特别是“几何”，俄译本曾将所有平面部分的习题全部给出解答，朱德祥同志又把这些解答全部译为中文。

这样一套教科书，既能为中学生提供学习大学数学课程的坚实基础，又能培养中学生的思考能力和计算能力。

鉴于现代数学在物理学、化学、地学和生物学等学科中已逐渐变为不可缺少的工具，中学数学教育的提高，将对我国整个自然科学的发展起着作用。

为了迅速提高中学数学教育水平，除在中学师资的培养上，采取一系列有力的措施外，也应在丰富和提高中学教材和参考读物上深下功夫。这套书中译本的出版，对提供中学参考教材方面是颇有意义的。

吴 新 谋

1979年3月于中国科学院数学研究所

译者序

本书是由法文原著第七版(1932年)译出,由于法文本几经修订,原书中所引上册(平面几何)以及本册的节次编号和习题编号,往往与实际不符,凡译者注意到的已加更正,并校正了排版方面的若干错误,但难免还有遗漏,请读者惠予协助校正。

由于我们在上册按俄译本增译了习题解答,增加了大量插图,同时原书节次和插图编号都有缺漏,所以本册对节次和插图都重编了号码。但习题编号未动。

本书上册出版后,收到了许多读者来信,反映较好,并希望下册能早日出版。由法文第二版序言(上册)可知,本书对提高法国中学几何教学,曾起过一定作用,它的翻译出版相信对我国数学教学也会有一定参考价值。书中不少章节,只宜作为教师参考进修之用,自不待言。

限于本人水平,错误在所难免,尚祈读者指正!

朱德祥 1964年10月于昆明师范学院

第七版序

这一版有一些相当重要的变动。

由于已故的累顾格(Lesgourgues)给我的提示,我早已有意把多面角理论和球面多边形的理论融合为一,而在这一方面,布宜诺斯艾利斯^①(Buenos-Aires)大学的一位同事给了我一个有用的例。在这以前,已对平面几何作过相应的修改,变得简单了。这一次把它在空间部分实现了,这样修改除了其他的一些优点外,从教学法观点来看,还有一个重要的优点,即叙述变得更为清晰易明。

另一方面,有一位教育工作者的意见,我认为很宝贵,根据他的建议,我把前几版只放在习题中的空间圆的自反性质写成了一个附录(附录K)。在我们第一版引进的以及后来增补的[特别是由布洛哈(André Bloch)增补的]值得注意的结果之外,又加入了罗伯特(Robert),戴伦斯(Delens),刚比艾(Gambier)等的研究成果。本书并未介绍这些重要工作的全部细节,但却建立了最突出而又最简单的结论。

另外还有一些修改,特别是关于射影几何(关于平面射影对应图形基本定理的阐述,但愿已经简化了)的修改工作,关于凸多面体的柯西定理(附录J)已重新给了证明。事实上,也拉尔(Louis Gérard)新近提出了意见,由于他的指示,使我在这一版中能避免了一些缺点。

今天的教育界放弃用“关于一直线的对称”这一词汇,是很有理由的,因为它掩盖了关于一直线或一平面的对称的主要区别。

^① 阿根廷首都。——译者注

在设想替代的名词中, 我喜欢用“轴反射(半周旋转)”(transposition), 理由纯粹是文法上的, 因为应用这一词, 就可说一点的轴反射象 (transposé d'un point) 或一图形的轴反射象 (transposée d'une figure), 而其他拟议的名词, 就我所知, 都不能这样运用自如。

和以前各版一样, 我对习题是相当重视的, 这方面的主要更动是关于球面几何 (习题 485 和 486) 和射影几何的。我们要指出, 作为习题 1294 的对象的定理是由一位青年几何学家提出的。两个非常精致的问题 (习题 1204 和 1205) 是从伊利俄维西 (G. Ilievici) (《科学教育》) 和卡斯纳 (E. Kasner) (《美国数学月刊》) 那里借用的。最后, 根据洛桑^①人马雄 (Marchand de Lausanne) (《数学教育》, 1930, p. 291) 提出的极为简单的证明 (习题 1322), 可以不用三角工具而建立麻莱 (Morley) 定理。

J. 阿达玛

^① 洛桑是瑞士的地名。——译者注

目 录

中译本序
译者序

第七版序

第五编 平面与直线

第一章 直线和平面的交点

- 325. 平面. 直线和平面的相关位置1
- 326~329. 决定平面的方式2
- 330. 两平面的交点4
- 331~331a. 两直线的相关位置5
- 332~332a. 三平面的交点5
- 习题 423~4277

第二章 平行的直线和平面

- 333~334. 平行直线7
- 335. 直线和平面的平行8
- 336~338. 平行平面10
- 339~340. 夹边相平行的两角相等或相补. 空间任意两直线间的角12
- 341~342. 三平行平面截任意一些直线成比例线段13
- 343. 平行的直线和平面性质总结14
- 习题 428~43815

第三章 垂直的直线和平面

- 344~347. 定义. 距两已知点等远的点的轨迹. 直线与平面垂直的充要条件16
- 347a~349. 通过已知点与一直线垂直的平面. 通过已知点与一平面垂直的直线18

- 350~351. 平面的垂线和斜线. 点到平面的距离. 应用于平行平面19
- 352. 和两已知直线成等角的直线的轨迹20
- 习题 439~45421

第四章 二面角. 垂直平面22

- 353~354. 定义. 二面角的平面角22
- 355. 二面角的转向23
- 356~358. 二面角的比较23
- 359. 垂直平面25
- 360~361. 若两平面垂直, 则在一平面上引它们交线的垂线, 必垂直于另一平面26
- 362. 通过已知直线引垂直于已知平面的平面27
- 363~366. 互补二面角. 对棱二面角. 面相平行的二面角28
- 367. 垂直的直线和平面性质总结29
- 习题 455~46229

第五章 直线在平面上的射影. 直线和平面的交角. 两直线间的最短距离. 平面面积的射影

- 368~368a. 射影. 平行线的射影30
- 369~369a. 直角射影定理和三垂线

定理	31	380. 多面角中任一面角小于 其他各面角之和	47
370~371. 直线和平面的交角. 最 大倾斜线	32	381~381a. 球面多边形. 和多面角 的关系	47
372. 二面角一面上一点到另 一面和到棱的距离之比	34	382~382a. 包围与被围的多面角和 球面多边形. 用三已知 面角能作三面角的条件	49
373. 两直线间的最短距离	34	383~384. 补三面角. 球面极三角形	52
374. 平面面积的射影	35	385~385b. 相等定律	56
习题 463~473	36	386~388. 等腰的三面角和球面三 角形. 和平面三角形理 论的异同	58
第六章 球面几何初步概念		389~390. 垂直和斜交大圆弧	60
375~376. 球和一直线或平面的交 点. 大圆	38	391. 球面坐标	62
376a. 一圆的极	40	习题 474~498	63
377~377a. 两大圆的交角	41	第五编习题 499~519	67
378. 求一实球的半径	42		
第七章 多面角. 球面多边形			
379~379a. 定义. 对称三面角	44		

第六编 多 面 体

第一章 一般概念		截面为底以侧棱为高的 直棱柱	82
392. 定义	70	408~409. 直平行六面体和直棱柱 体积	83
393. 棱柱	71	410~411. 任意平行六面体和棱柱 体积	84
394. 棱柱侧面积	73	习题 539~542	86
395. 平行六面体	73	第三章 棱锥的体积	
396~397. 直平行六面体. 长方体	73	412. 底面等积高又相同的两 棱锥等积	87
398~400a. 棱锥. 棱锥被平行平面 所截的截面. 正棱锥侧 面积	74	413. 棱锥体积等于底和高乘 积的三分之一	89
401. 凡多面体都可分解成棱 锥	77	414. 棱台体积	89
习题 520~538	77	415. 截棱柱体积	92
第二章 棱柱的体积		习题 543~555	93
402~403. 多面体体积定义	79	第六编习题 556~576	94
404~406. 长方体体积	80		
407. 凡斜棱柱都等积于以直			

第七编 运动. 对称. 相似

第一章 运动		转. 轴反射(半周旋转)	97
416~418. 两图形全等的条件. 旋		419. 平移	99

420. 螺旋运动.....100	反.....108
421~424. 任一螺旋运动可分解成 关于不同直线的两个轴 反射. 运动的合成. 两 个全等图形恒可使相重 合: 若有一公共点, 通过 一个旋转; 在一般情况 下, 通过一个螺旋运动 ...100	429. 两个对称的多面体是等 积的.....108
习题 577~599103	430. 一图形的对称轴, 对称心 和对称平面.....109
第二章 对称	习题 600~608109
425~426. 同一图形关于任两点或 平面的两个对称图形是 全等的.....105	第三章 位似与相似
427~427a. 任一平面图形和它的对 称形全等. 系.....107	431~432. 定义. 基本定理.....110
428. 两个对称图形的转向相	433~434. 逆命题. 三图形的位似 轴. 四图形的位似平 面.....111
	435~436. 相似形. 相似多面体.....113
	437. 两相似多面体体积之 比.....114
	习题 609~616114
	第七编习题 617~628115

第八编 圆 体

第一章 一般定义. 柱	球外直线的切平面.....133
438. 柱面. 锥面. 回转曲面...117	459~460. 球的交点.....135
439. 曲面的切线. 柱面的情 况.....117	461~462. 对于球的幂. 正交球.....137
440~441. 柱面的截线. 柱.....118	463~464. 等幂(根)面, 轴, 心138
442~443. 锥面. 锥.....119	465~470. 位似球. 公切面.....140
444. 回转曲面.....120	习题 658~702142
445~446. 圆底柱. 侧面积.....121	第四章 球的面积和体积
447. 柱体积.....122	471. 线段绕和它在同一平面 内但不与它相交的轴旋 转产生的面积.....145
习题 629~639123	472~475. 球带面积. 球面积.....146
第二章 锥. 锥台	476. 三角形绕位于它平面上 通过它的一顶点但不穿 过它的轴旋转产生的体 积.....149
448~449. 回转锥. 侧面积.....124	477~478. 球扇形体积. 球体积.....151
450. 锥体积.....126	479~480. 球环的体积. 球台的体 积.....153
451. 回转锥台的侧面积.....126	习题 712~728155
452. 锥台体积.....128	第八编习题 729~745157
习题 640~657128	
第三章 球的性质	
453~454. 球看作回转面.....130	
455~456. 球的决定.....132	
457~458a. 外切锥和柱. 通过一条	

第九编 常用曲线

第一章 椭圆

- 481~482a. 定义, 描述, 对称轴和心.....160
483. 坐标.....163
- 484~485. 椭圆关于它的轴的方程, 解释.....163
- 485a. 椭圆是圆的正射影. 逆定理.....167
486. 准线.....168
487. 内部和外部区域.....169
488. 准圆.....170
- 489~489a. 直线和椭圆的交点.....171
- 490~490a. 椭圆的切线.....173
491. 焦点在切线上射影的轨迹.....175
- 492~493. 作椭圆切线使平行于一已知线. 两焦点到一条切线的距离之积.....175
494. 通过椭圆平面上一点的切线.....177
- 495~496. 庞斯雷(Poncelet)定理. 外切于椭圆的直角.....178
- 习题 746~771180

第二章 双曲线

- 497~497a. 定义, 轴和中心.....182
498. 双曲线关于它的轴的方程. 准线.....185
499. 内部和外部点.....187
- 500~501. 准圆.....187
502. 和一直线的交点.....189
- 503~504. 渐近线.....190

505. 双曲线包含在渐近线所成四角的两角之内.....191
506. 双曲线的切线.....192
- 506a~509. 切线性质.....193
- 510~511a. 双曲线关于它的渐近线的方程. 切线的相应性质.....197
- 习题 772~792201

第三章 抛物线

- 512~513. 定义, 轴.....203
- 513a. 曲线关于轴和顶点切线的方程.....205
- 514~515. 和一直线的交点.....206
- 516~521. 切线性质.....208
522. 抛物线看作椭圆或双曲线的极限.....212
- 523~523a. 直径.....214
- 524~527. 次切线, 次法线. 回到曲线方程.....215
- 习题 793~816218

第四章 螺旋线

- 528~531. 柱的展开图形.....220
- 532~533. 螺旋线定义.....224
- 534~537. 螺旋线的切线.....224
- 538~539. 圆螺旋线. 螺旋线的转向.....228
- 540~541. 螺旋线在平行于柱轴的平面上的射影.....230
- 习题 817~822233
- 第九编习题 823~851233

第十编 测量概念

第一章 一般概念. 平面测量

- 542~545. 定义, 平面的水平性.....239
- 546~547. 平面测量定义.....241
- 548~549. 测线的决定.....242
550. 长度的直接丈量.....243
- 551~552. 角度的直接测量.....244

553. 三角形测量	246
554~555. 长度和角度的间接测量	247
556. 三角测量	248
557~564. 交会法, 射线法, 导线法, 直角仪的使用	249
第二章 水准测量	
565~569. 水准仪, 简单水准测量, 复合水准测量	253
570~572. 间接水准测量	256

573. 基准水平面的选择, 海拔	258
574~575. 高程表示法, 水准曲线, 侧面图	258
576~577. 各种简化法	260
第三章 面积测量	
578~582. 面积测量	261
583~583a. 体积测量	263
习题 852~858a	264

立体几何补充材料

第一章 比例距离中心	
584~590a. 比例距离中心	265
591~598. 重心坐标, 重心	269
599. 截棱柱的体积	274
600~602. 求点的轨迹, 它们到一些已知点距离的平方乘以已知系数后有已知的和	275
603~604. 平面上四点间距离的关系	278
605. 四面体体积表为棱的函数	282
606. 空间五点间距离的关系	282
习题 859~877	283
第二章 透视的性质	
607~609. 透视鸟瞰	287
610~610a. 平行线的平行射影, 平行线的透视形, 没影点	288
611. 平面图形的透视形, 没影线	290
612. 射影性质, 无穷远线	291
613~619. 交比	291
620. 应用于完全四线形的对顶线	295
621~623. 平面射影对应图形, 已知平面图形的射影对应图形, 由该平面图形中四点的对应点决定	295

624. 平行射影的情况	297
625~626. 存在着成射影对应的图形使四已知点(不共线)有已知的对应点	298
627. 两个射影对应图形一般可使其成透视	300
628. 同一图形的两个配极图形是射影对应的	302
629~636. 成射影对应的点列和线束	302
637~639. 射影对应的各种表示式	306
640~641. 二重点, 二重射线	308
642. 应用	310
643~645. 对合	312
646~648. 对合的二重点	313
649~650. 对合之例	315
651. 在两个射影对应的点列中, 两对对应点和两个二重点形成对合	315
652~654. 应用于完全四线形	316
655. 圆上的射影对应和对合, 由一点发出的弦的性质	318
习题 878~922	320
第三章 对于球的极与极面, 空间反演, 球面几何补充材料	
656~658. 对于球的极与极面	326
659. 配极直线	328

660. 配极图形.....328	706~707. 正多面体只能有五种.....375
661~664. 反演: 基本性质329	708. 正多面体作法.....377
665~667. 平面或球面的反形. 应用于四面体.....332	709. 有关正多面体的计算.....379
668~670. 圆的反形. 斜锥的逆平行截面.....334	习题 1001~1022381
671~672. 球极射影.....336	第六章 回转锥和回转柱的平面截线
673. 截两已知球成等角的球.....336	710~711. 回转锥的平面截线. 准线.....385
674. 通过同球上两圆的锥.....337	712. 回转柱的情况.....389
675~676. 相切的球.....338	713~714. 逆定理. 通过一已知圆锥曲线的回转锥顶点的轨迹.....390
677~678. 应用反演于球面几何.....340	715. 中心在焦轴上的一些双切圆的性质.....394
679. 在反演下交比不变.....341	716. 由焦点和准线给定的圆锥曲线的切线性质.....395
680~682. 球上的反演. 应用于切圆.....342	717~721. 圆锥曲线关于两条切线及其相切弦的性质. 巴卜斯 (Pappus) 定理. 双曲线关于它的渐近线的性质.....396
习题 923~988343	习题 1023~1044398
第四章 球面多边形的面积	第七章 椭圆看作圆的射影. 以渐近线为坐标轴的双曲线
683~684. 单位选择. 月形面积.....351	722~724. 圆的正交射影.....400
685. 两个对称球面三角形等积.....352	725. 应用于作图问题.....402
686. 球面三角形和多边形的面积.....353	726~728a. 直径. 共轭直径.....403
687~688. 勒克舍勒 (Lexell) 定理353	729. 阿波罗尼 (Apollonius) 定理.....404
习题 989~1000.....355	730~730a. 椭圆关于两条共轭直径的方程.....405
第五章 欧拉定理. 正多面体	731~734. 与长度一定且两端在两定直线上滑动的线段相联系之点的轨迹. 椭圆的法线. 已知两共轭直径, 求作两轴407
689~690. 前言和限制.....356	735. 双曲线割线的性质.....412
691~692. 有相同联络阶的面积.....357	736~740. 双曲线的直径.....413
693. 单连通面积.....357	习题 1045~1092415
694~695. 凡凸多面体都是零格的. 格不等于零的多面体举例.....358	
696. 欧拉 (Euler) 定理360	
697. 多面体的联络阶.....361	
698. 正多面角.....361	
699~700a. 正多面体. 一般性质.....363	
701. 正多面体的旋转和对称.....367	
701a~702a. 立方体. 正四面体368	
703~704. 共轭多面体.....371	
705. 例: 八面体374	

第八章 圆锥曲线的面积

741. 椭圆面积.....421
 742~743a. 双曲线扇形的面积.....421
 744. 抛物线弓形的面积.....425
 习题 1093~1107427

第九章 圆底斜锥的截线. 圆锥曲线的射影性质

- 745~748. 斜圆锥的平面截线. 圆锥曲线的新定义.....429
 749~751. 圆锥曲线由五点或五切线决定.....433
 752~753. 夏尔(Chasles)定理435
 754. 应用于直线和圆锥曲线的交点.....437
 755. 视四已知点成已知交比的点的轨迹.....437
 756~757. 对偶定理. 巴斯加(Pascal)和布利安双(Brianchon)定理438
 758~761. 关于圆锥曲线的极与极

线.....439

- 762~765. 配极圆锥曲线. 圆的情况.....441
 766~767. 焦点的判别性质.....445
 768~769a. 代沙格(Desargues)定理.....446
 770~772. 圆锥曲线的交点. 代沙格定理的应用.....450
 773~774a. 二重极点, 公共割线和公共点的讨论.....453
 775~775a. 特殊情况. 相切的、双切的、密切的圆锥曲线456
 776. 两圆锥曲线投射成两圆.....460
 777. 对偶定理. 脐点.....461
 778~778a. 相对的公共割线. 圆锥曲线系.....461
 习题 1108~1163a.....463
 补充材料习题 1164~1205470

附 录

- F. 关于几何问题的可解性477
 G. 关于体积的定义483
 H. 关于任意曲线的长度, 任意曲面的面积和体积的概念486

- I. 关于正多面体和旋转群498
 J. 关于凸多面体的柯西(Cauchy)定理514
 K. 空间的圆的自反性质522

杂 题

- 杂题 1206~1322573

第五编 平面与直线

第一章 直线和平面的交点

325. 我们知道(平, 6)①, 所谓平面是这样一种面, 它上面两点所联的直线整个位于这面上.

这样的面是无限的. 为了用图形表示出来, 只能画出它的某个有限部分, 通常画一个矩形, 在图 697 上以及以后就是这样办的.

按照上述定义, 一条直线对于一个平面可能有三种不同的相关位置:

- 1° 直线可能与平面有两个公共点, 因之整个位于这平面上;
- 2° 直线可能与平面只有一个公共点, 这时称为直线与平面相交.
- 3° 直线与平面可能没有任何公共点, 于是称为相互平行.

我们承认, 任何平面分空间为两区域, 各在平面的一侧. 从一区到另一区, 不可能不穿过平面. 特别, 联一平面异侧两点的直线穿过平面.

反过来, 凡和平面相交的直线, 被公共点分为两条半直线, 各在平面的一侧.

从定义还得出: 一个平面的全等图形是一个平面.

反之, 我们承认, 任何两平面可以这样迭合: 使一平面上任意给定的一条半直线, 迭合于另一平面上一条任意给定的半直线(原点相迭合).

① 缩写(平, 6)代表本书上册平面部分第 6 节. 下同.