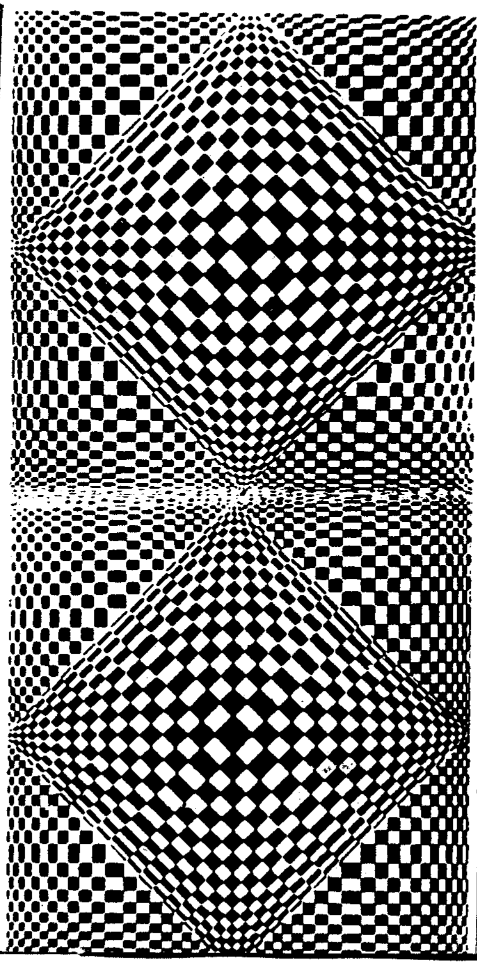
JINGJI YINGYONG SHUXUE

经济应用数学

下册

主编 闵育 副主编 柴彭颐



微积分●线性规划

杭州大学出版社

经 济 应 用 数 学

（下　册）

主编　闵　育　副主编　柴彭颐

*

杭州大学出版社出版、发行

（杭州天目山路34号）

*

杭州市余杭人民印刷厂

787×1092毫米 1/32　15印张　324千字

1990年12月第 1 版　　1990年12月第 1 次印刷

印数：1—6000

书号：ISBN 7-81035-063-3/O·001

定　价：6.30元

前　言

为了适应财税、财会等经济类专业中专与大专教学的需要，浙江省财政厅教育处组织编写了《经济应用数学》这套教材。

本教材原计划分四篇三册。第一篇初等代数为第一册；第二篇微积分为第二册；第三篇线性代数和第四篇线性规划为第三册。现在因用书的特殊需要，把第一篇初等代数与第三篇线性代数合成一册为上册；把第二篇微积分与第四篇线性规划合成一册为下册。上册主要适用于经济类中等职工中专和中专自学考试，下册主要适用于经济类高中中专及大专自学考试，也可供具有高中文化程度的经济工作者自学。下册第四篇线性规划的数学模型及其解法要求读者具有一定的线性代数知识。对于未曾学过线性代数的读者来说，在学习下册线性规划部分之前，需先学习上册第二篇线性代数。

为了加强实践性环节的教学，提高学生在经济数学方面的应用能力，本书在编写过程中，强调“三基”训练，侧重于数学理论和方法在经济管理中的应用，尽量避免繁琐的数学推理证明。

参加上册编写的有水赛霓、俞正雄、柴彭颐同志；参加下册编写的有闵育、张宝健、柴彭颐同志。全书由闵育副教授和柴彭颐同志主编。

本教材得到了浙江财经学院沈珏铭副教授审阅和修改。

在编写过程中，还得到了浙江省金华财政学校、浙江省湖州税务学校、浙江省嘉兴会计学校、宁波财政学校、杭州财政职工中专的领导和一些同行的支持与帮助，在此一并致谢。

由于编者水平有限，疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

《经济应用数学》编写组

1990 年 8 月

目　　录

第三篇　微　积　分

第十五章　函　　数……………………………………(1)
§ 15.1　区间与邻域……………………………………(1)
§ 15.2　函数概念……………………………………(3)
§ 15.3　函数的几种特性……………………………………(11)
§ 15.4　反函数……………………………………(14)
§ 15.5　基本初等函数……………………………………(16)
§ 15.6　复合函数·初等函数……………………………………(23)
§ 15.7　常用的经济函数……………………………………(25)
习题十五……………………………………(31)
第十六章　极限与连续……………………………………(36)
§ 16.1　数列的极限……………………………………(36)
§ 16.2　函数的极限……………………………………(42)
§ 16.3　变量的极限……………………………………(51)
§ 16.4　无穷大量和无穷小量……………………………………(52)
§ 16.5　极限的运算法则……………………………………(58)
§ 16.6　极限存在的准则·两个重要极限……(65)
§ 16.7　函数的连续性……………………………………(73)
习题十六……………………………………(84)
第十七章　导数与微分……………………………………(89)
§ 17.1　引出导数概念的实例……………………………………(89)
§ 17.2　导数的概念……………………………………(93)

§ 17.3 导数的基本公式和运算法则 ……… (99)
§ 17.4 隐函数的导数及对数求导法 ……… (114)
§ 17.5 高阶导数 ……………………………… (117)
§ 17.6 导数在经济学上的应用 …………… (119)
§ 17.7 微分的概念 ………………………… (128)
§ 17.8 微分的应用 ………………………… (134)
习题十七 ………………………………………… (137)
第十八章 中值定理与导数的应用 ……………… (142)
§ 18.1 微分中值定理 ……………………… (142)
§ 18.2 罗彼塔法则 ………………………… (147)
§ 18.3 函数的单调增减性 ………………… (154)
§ 18.4 函数的极值和应用 ………………… (156)
§ 18.5 函数的作图 ………………………… (167)
习题十八 ………………………………………… (174)
第十九章 不定积分 …………………………… (178)
§ 19.1 原函数与不定积分的概念 ………… (178)
§ 19.2 不定积分的性质和基本积分公式 … (182)
§ 19.3 换元积分法 ………………………… (187)
§ 19.4 分部积分法 ………………………… (199)
§ 19.5 有理函数的积分 …………………… (203)
§ 19.6 不定积分在经济学上的应用 ……… (207)
习题十九 ………………………………………… (210)
第二十章 定积分 ……………………………… (214)
§ 20.1 定积分的概念 ……………………… (214)
§ 20.2 定积分的基本性质 ………………… (220)
§ 20.3 定积分与不定积分的联系 ………… (224)
§ 20.4 定积分的换元积分法 ……………… (230)

§ 20.5　定积分的分部积分法……………………(236)
§ 20.6　定积分的应用……………………………(238)
§ 20.7　广义积分…………………………………(254)
习题二十……………………………………………(260)
第二十一章　多元函数……………………………(265)
§ 21.1　空间解析几何简介……………………………(265)
§ 21.2　多元函数的概念……………………………(271)
§ 21.3　二元函数的极限与连续性…………………(274)
§ 21.4　偏导数……………………………………(277)
§ 21.5　全微分……………………………………(281)
§ 21.6　复合函数的微分法…………………………(285)
§ 21.7　隐函数的微分法……………………………(291)
§ 21.8　二元函数的极值……………………………(293)
§ 21.9　二元函数在经济学上的应用………………(302)
§ 21.10　二重积分…………………………………(309)
习题二十一…………………………………………(320)
第二十二章　微分方程简介…………………………(325)
§ 22.1　微分方程的一般概念………………………(325)
§ 22.2　一阶微分方程………………………………(329)
§ 22.3　几个特殊类型的二阶微分方程……………(340)
习题二十二…………………………………………(343)

第四篇　线性规划

第二十三章　线性规划的数学模型…………………(347)
§ 23.1　线性规划数学模型的一般形式……………(347)
§ 23.2　线性规划数学模型的标准形式……………(356)

习题二十三……………………………………………………（ 361 ）
第二十四章　线性规划问题的解…………………………（ 364 ）
§ 24.1　基本概念 …………………………………………（ 364 ）
§ 24.2　图解法 ……………………………………………（ 368 ）
§ 24.3　线性规划问题解的性质 …………………………（ 373 ）
习题二十四……………………………………………………（ 374 ）
第二十五章　单纯形法……………………………………（ 376 ）
§ 25.1　单纯形法的基本思路 ……………………………（ 376 ）
§ 25.2　单纯形法 …………………………………………（ 384 ）
§ 25.3　两阶段法 …………………………………………（ 406 ）
习题二十五……………………………………………………（ 414 ）
第二十六章　平衡运输问题表上作业法…………………（ 420 ）
§ 26.1　平衡运输问题的数学模型 ………………………（ 420 ）
§ 26.2　表上作业法 ………………………………………（ 425 ）
习题二十六……………………………………………………（ 438 ）
习题答案……………………………………………………（ 441 ）

第十五章　函　　数

初等数学是研究常量的数学，而高等数学则是研究变量的数学。作为高等数学重要组成部分之一的微积分学，它以极限为基本工具，分析研究变量与变量之间的依存关系，发掘事物发展的内在规律。它已成为现代数学的基础。

函数是反映变量间依存关系的一个重要数学概念，是微积分首先要讨论的对象。本章首先复习函数的概念、性质和一些初等函数的有关知识，然后介绍一些经济学中常见的函数，为学习以后的内容打下基础。

§15.1　区间与邻域

一、区　　间

在以后某些问题的讨论中，常常要限制在一部分实数范围内考虑，而这部分实数往往是介于某两个实数之间的一切实数。通常可以用“区间”这一术语来表示这部分实数。

定义 15.1　介于数轴上某两点 a、b（设 $a<b$）之间的全部点（即两实数 a、b 之间的全体实数）叫做区间。a、b 叫做区间的端点。

区间可分为下面几种类型：

（1）满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x，称为以 a、b 为端点的开区间。记作 (a, b)，见图 15-1。

(2) 满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的一切实数 x，称为以 a，b 为端点的闭区间。记作 $[a, b]$，见图15-2。

(3) 满足不等式 $a < x \leqslant b$ 或 $a \leqslant x < b$ 的一切实数 x，称为以 a，b 为端点的半开半闭区间。分别记作 $(a, b]$ 或 $[a, b)$，见图 15-3 。

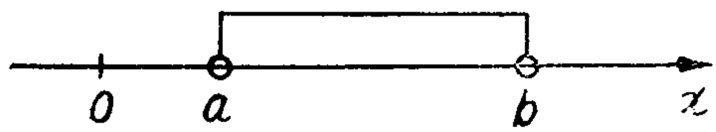


图 15-1

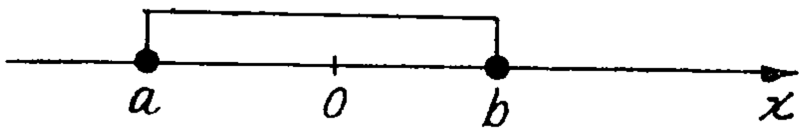


图 15-2

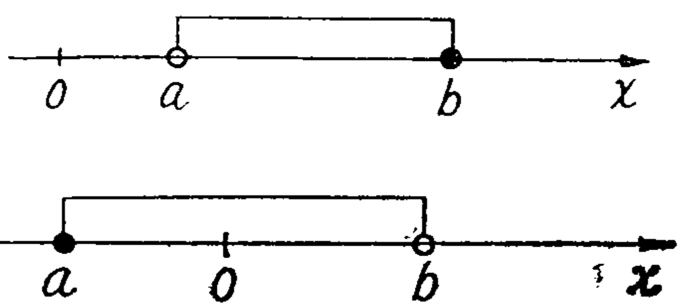


图 15-3

以上三类区间为有限区间。有限区间右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$，称为区间长。

还有下面几类无限区间：

(4) $(a, +\infty)$ 或 $[a, +\infty)$ 分别表示大于 a 或大于等于 a 的全体实数。

(5) $(-\infty, b)$ 或 $(-\infty, b]$ 分别表示小于或小于等于

b 的全体实数。

(6) $(-\infty, +\infty)$表示全体实数。

二、邻　　域

定义 15.2　设 a，δ 为实数，且 $\delta>0$。满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的实数 x 的全体称为点 a 的 δ 邻域。点 a 称为这个邻域的中心，δ 称为这个邻域的半径。

由上述不等式 $|x-a|<\delta$ 得

$$a-\delta<x<a+\delta.$$

所以点 a 的 δ 邻域就是以点 a 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$。见图 15-4。

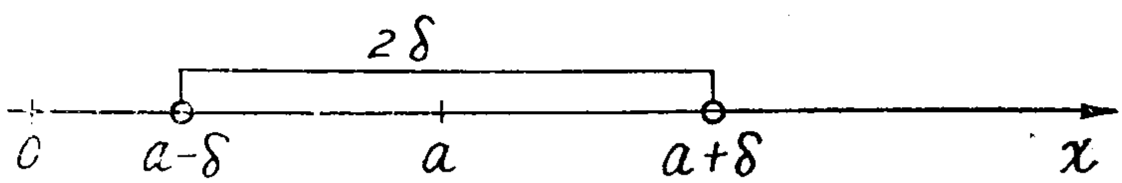


图 15-4

例如：$|x-3|<1/2$，表示点 3 的 1/2 邻域，也就是开区间(2.5，3.5)。

如果以点 a 为中心的邻域中不包括点 a 本身，即 $x\neq a$，则可表示为$0<|x-a|<\delta$。称为点 a 的 δ 无心邻域。

§15.2　函数概念

一、函数的定义

客观世界中各种不同的、变化着的量，它们的变化不是孤立的，而是相互联系、相互依赖、有着一定的规律的。这

反映在数量上，就是变量之间的依赖关系，也就是数学上讨论的函数关系。下面我们在中学已有知识的基础上进一步阐述函数的概念。

例 1 某商店出售洗衣机。设洗衣机的单价为 k 元/台，则洗衣机销售量 x 台和销售额 y 元都是变量。如果不考虑其它因素，那末它们的数量之间存在着关系

$$y = kx.$$

例 2 某企业上半年的生产过程中，根据每月生产量统计，月份 t 与生产量 q 是两个变量，这两者的关系可以由下表15-1来表示：

表 15-1 上半年产量表 单位：件

月份 (t)	1	2	3	4	5	6
产量 (q)	1021	1028	1015	1012	1030	1025

它反映了上半年产量 q 与月份 t 的对应关系。

例 3 某地区一天中气温 T 与时间 t 是两个变量。该地区某气象站用温度自动记录仪记录的一天气温变化曲线如图15-5。

这条曲线表现了气温 T 随时间 t 变化的规律。在这里 t 的变化范围是 $0 \leqslant t < 24$，在这一范围内，每给定 t 的一个值，就可从图中确定出 T 的对应值。

以上三个例题的实际内容虽然各不相同，变量之间的对应关系也是用不同方式表达的，但都具有相同的本质，即在某一变化过程中有两个变量，当其中一个变量在某个范围内每取一个数值时，另一变量按一定的规律总有确定的值和它

对应。两个变量之间的这种对应关系，就是函数概念的实质。

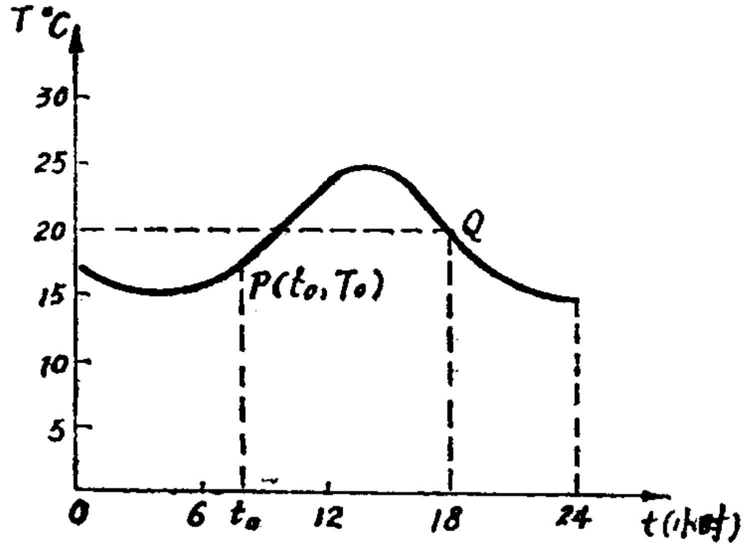


图 15-5

定义 15.3 设有两个变量 x 和 y，若对于变量 x 在某范围 D 中任取一数值时，变量 y 按一定的对应规则 f 都有一个确定的值和它对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作

$$y=f(x)$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量或函数，f 表示 y 与 x 之间的对应规则即函数关系，自变量 x 的变化范围 D 称为函数的定义域，记为 $D(f)$，对应的因变量 y 值的全体称为函数的值域，记为 $Z(f)$。

例如上面的三个例题，在例 1 中，销售额 y 是销售量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，定义域是不大于该店洗衣机总台数的全体自然数；在例 2 中，月产量 q 是月份 t 的函数，记作 $q=f(t)$，定义域是不大于 6 的正整数的全体；在例 3 中，气温 T 是时刻 t 的函数，记作 $T=f(t)$，定义域是$[0,24)$。

二、函数的两个要素

由函数的定义可知，函数的内容包括自变量、因变量和一个对应规则。只要给定了定义域和对应规则，因变量就随之确定，因此，函数的定义域与对应规则是函数定义中的两个重要因素。

1．对应规则

函数定义中的字母“f”表示函数的对应规则，它指的是由自变量 x 去找对应的因变量 y 的规则。在不同的函数中，对应规则 f 表达的方式是不一样的。如例 1 是由公式表达对应规则的，自变量 x 的每一个值都是通过公式计算得出对应的函数值 y 的。例 2 是由一个表格表达对应规则的，自变量 x 的每一个值都是通过表格去找到对应的函数值 y 的。例 3 则由平面直角坐标系内的一条曲线来表达对应规则的，自变量 x 的每一个值都是通过曲线上的点去找到对应的函数值 y 的。所以，“f”只是一个抽象的对应规则，只有在具体的函数中，它才是具体的。以公式表达对应规则的函数为例，假设给定一个函数 $y=x^2+1$，即 $f(x)=x^2+1$，那么对应规则“f”就是“自变量的平方加 1”。例如当 $x=2$ 时，通过“自变量的平方加 1”的对应规则，计算得对应的函数值 $y=5$。于是我们知道，函数 $f(x)$ 的具体表达式的运算程序，就是函数 $f(x)$ 的对应规则。所以当我们要求 $x=2$ 时函数 $f(x)=3x^2-2x+1$ 的值时，只要把 $f(x)$ 的表达式中的 x 换成 2 后进行计算就是了，即 $f(2)=3(2)^2-2(2)+1=9$。一般地，当我们要求这个函数在 $x=a$ 时的函数值时，只要把 x 换成 a，即 $f(a)=3(a)^2-2a+1$。

符号 $f(a)$ 表示 $x=a$ 时函数 $f(x)$ 的值，也记作 $y|_{x=a}$。

例 4 已知函数 $y=f(x)=x^2-5x+6$，求 $f(0)$，$f(3)$。

解 $f(0)=y|_{x=0}=0^2-5\cdot 0+6=6$，

$$f(3)=y|_{x=3}=3^2-5\cdot 3+6=0.$$

例 5 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$。

解 $f[f(x)]=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1-\dfrac{1}{x}$，

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{1}{1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=x.$$

如果同时讨论几个不同的函数，如 x^2+1，x^2-x+1，x^3-1，就需要用不同的字母表示对应规则，以免产生混淆。如分别表示为：$f(x)=x^2+1$，$\varphi(x)=x^2-x+1$，$F(x)=x^3-1$。

2．函数定义域

函数定义域的确定分两种情况：一种是只有一个数学表达式的函数，其定义域是使表达式有意义的全体实数。这一般要考虑在分式中，分母不能为零；在根式中，负数不能开偶次方；在对数中，真数要大于零，底数要大于零且不等于1；等等。另一种是有关实际问题的函数，其定义域要根据实际问题来确定。在许多经济问题中，要从各种经济量的实际意义来确定，例如生产量 x 不能是负的，等等。

例 6 确定函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域。

解 要使函数有意义，必须要 $1-x^2\geqslant 0$，于是

$$|x|\leqslant 1.$$

所以定义域为闭区间 $[-1,1]$。

例 7 求函数 $y=\lg(4-3x-x^2)+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ 的定义域。

解 要使函数有意义，必须使 $\lg(4-3x-x^2)$ 和 $\frac{1}{\sqrt{x+3}}$ 这两个项都有意义，所以得不等式组：

$$\begin{cases} 4-3x-x^2>0 \\ x+3>0 \end{cases}.$$

解此不等式组得

$$-3<x<1.$$

故定义域为开区间$(-3, 1)$。

例8 某企业每天的总成本C(元)是它的日产量x(吨)的函数：$C=150+6x$。若每天生产的最大能力是100吨，则其定义域为闭区间$[0,100]$。

两个函数只有当它们的定义域和对应规则都相同时，才是相同的函数。两者或两者之一不相同时，就是不同的函数。

例如，函数 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $y=1$，它们的定义域和对应规则都相同，所以它们是相同的函数。

又如，函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$，它们的定义域不同，所以它们是不同的函数。

三、函数的表示法

由前面的几个例题可以看出，表示函数对应关系的方法是多种多样的，常见的有：(1) 公式法，即用数学式子把自变量与因变量之间的对应关系表达出来，亦称解析法，如例1。这种表示法在高等数学中是最常用的方法，便于分析论证。(2) 列表法，即把自变量与因变量的对应值用表格列出，如例2。这种表示法在经济问题研究中常被采用，它便

于应用。(3) 图示法，即由直角坐标平面上，以自变量的值为横坐标，以对应的函数值为纵坐标的点所构成的图形来表示函数关系。这种图形叫做函数图形或图象，如例 3 。这种表示法使函数关系更具有直观性，在工业企业管理上常被采用。

有些函数，对于其定义域内自变量值的不同范围有不同的对应规则，不能用一个统一的数学表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为分段函数。

例如：

$$f(x)=\begin{cases} -1 & x<-1 \\ \sqrt{1-x^2} & -1\leqslant x\leqslant 1. \\ x-1 & x>1 \end{cases}$$

这是一个用三个式子表示的分段函数，它的定义域是区间 $(-\infty, +\infty)$。它的图象如图 15-6 所示。

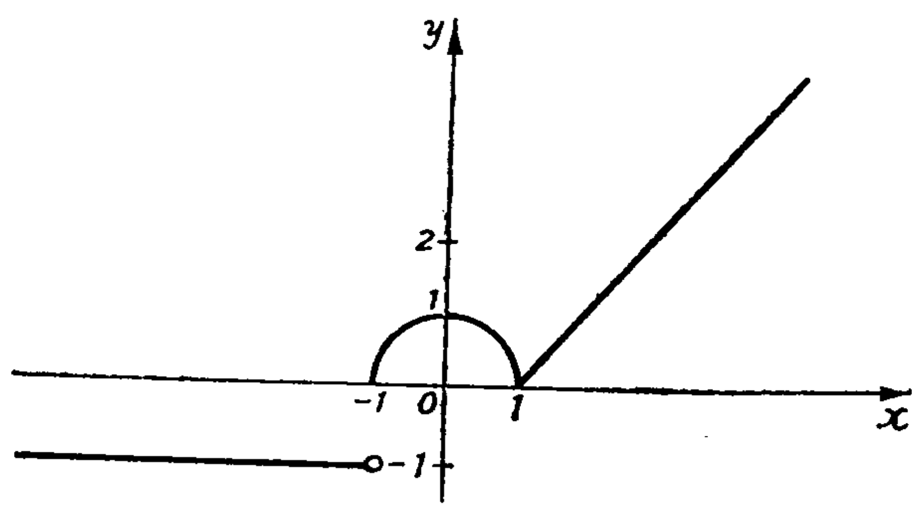


图 15-6

分段函数不是几个函数而是一个函数，有几个不同的表达式子。它在生产实际中有广泛的应用。

例 9 我国小型国营企业所得税规定按八级超额累进税