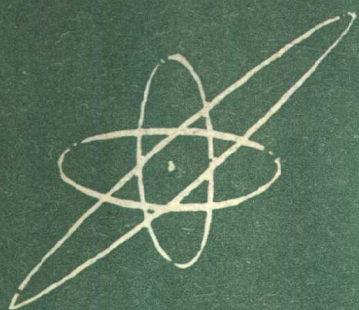




SHUXUE

数 学

几 何 · 第三册

青年自学丛书

四川人民出版社





数 学

必修·选修



湖南人民出版社

青年自学丛书

数 学

几何·第三册

主 编 成 都 市 教 育 局

编写单位 成 都 市 锦 江 中 学

成 都 市 第 十 六 中 学

成 都 市 盐 市 口 中 学

执 笔 钟 策 安 朱 文 虎

~~李维宁~~

四川人民出版社

一九七九年·成都

青年自学丛书 数 学 分析 第三册

四川人民出版社出版 重庆新华印刷厂印刷

四川省新华书店重庆发行所发行

开本787×1092毫米 1/32 印张13.5 字数278千

1979年8月第一版 1979年8月第一次印刷

印数：1—107,490册

书号：13118·15

定价：0.92元

前 言

“一定要极大地提高整个中华民族的科学文化水平”。这是英明领袖华主席、党中央高瞻远瞩地向全党、全军、全国各族人民发出的庄严号召。这是激动人心的动员令，这是气吞山河的宣言书，这同样是对广大青年亲切的召唤。

青年是我们的希望，是我们的未来。为了适应广大青年向科学进军的需要，我们组织编写了一套“青年自学丛书”，供广大青年自学、在校中学生课外阅读和中学教师参考。

这套“青年自学丛书”的数理化部份，共十七册，即《数学》八册（《代数》三册、《几何》三册、《三角》二册）、《物理》四册、《化学》五册。考虑到这套丛书具有自学的特点，编写时注意了基础理论、基本概念、基本规律和学习难点的讲述，例题较详，习题较多，循序渐进，由浅入深；文字上努力做到生动活泼，明白易懂。同时，参照全国中小学通用教材教学大纲精神，还介绍了一些先进知识。要求通过对丛书的自学，使读者能达到高中或略高于高中的水平。

这是“青年自学丛书”《数学》的《几何》读本，按照平面几何、解析几何、立体几何等方面的内容，编成三册。

这套丛书的编写出版，得到中共成都市委宣传部的亲切关怀和有关学校的支持。四川师范学院数学系协助了丛书《数学》读本的审稿工作。在此，我们谨致谢意。

由于时间仓促和编者水平有限，本书内容可能有缺点或错误。鉴于当前需要迫切，先以“试用本”出版，广泛听取意见。我们热忱欢迎广大读者批评指正，以便再版时修订。

编 者

一九七八年八月

目 录

第十三章 曲线与方程 (1)

13·1 曲线与方程 13·2 由曲线求它的方程 13·3 由方程描
绘出它的曲线 13·4 方程的讨论 13·5 两条曲线的交点

复习题 (29)

第十四章 直线 (31)

14·1 直线方程的几种形式 14·2 直线方程的一般式

14·3 已知方程作直线的方法 14·4 两直线平行、垂直的条件

14·5 直线与直线的位置关系 14·6 三点共线与三线共点的条件

14·7 直线方程的法线式 14·8 点到直线的距离及其应用

14·9 二元一次不等式的图象解法 14·10 直线系

14·11 经过两条直线交点的直线系 14·12 经验公式

复习题 (95)

第十五章 圆锥曲线 (99)

一 圆 (99)

15·1 圆的方程 15·2 点与圆的位置关系 15·3 三条件决定圆

15·4 四点共圆条件 15·5 直线与圆的位置关系 15·6 圆的切线
方程 15·7 圆系

二 椭圆 (138)

15·8 椭圆的定义 15·9 椭圆的标准方程 15·10 椭圆的性质

15·11 椭圆方程续论 15·12 椭圆的尺规描点法

三 双曲线 (167)

15·13 双曲线的定义和它的标准方程 15·14 双曲线的性质

15·15 双曲线方程续论 15·16 双曲线的尺规描点法

四 抛物线	(201)
15·17 抛物线的定义和它的标准方程 15·18 抛物线的性质	
15·19 抛物线方程续论 15·20 抛物线上点的尺规作图法	
五 圆锥曲线的定义和方程	(216)
15·21 圆锥曲线的定义 15·22 圆锥曲线的方程	
复习题	(222)
第十六章 坐标变换	(223)
一 坐标轴的平移	(224)
16·1 平移变换公式 16·2 圆锥曲线的标准型方程 16·3 方程 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的讨论 16·4 平移法对一般二元二次方程的影响	
二 坐标轴的旋转	(245)
16·5 坐标轴的旋转变换公式 16·6 利用转轴消去一般二次方程中的 xy 项 16·7 二次曲线的类型判定	
三 坐标轴的一般变换	(258)
16·8 坐标轴的一般变换公式 16·9 坐标变换与曲线的分类	
复习题	(267)
第十七章 一般二次曲线方程研究	(268)
一 二次曲线的性质	(268)
17·1 二次曲线的中心 17·2 二次曲线的主轴方向 17·3 有心二次曲线方程的讨论 17·4 无心二次曲线方程的讨论	
二 坐标变换下的不变量	(283)
17·5 平移变换下的不变量 17·6 旋转变换下的不变量	
17·7 二元二次方程的轨迹的判定	
三 一般二元二次方程系数方程的轨迹作图法	(294)
17·8 解法步骤 17·9 例题	
四 圆锥曲线系和过五点的锥线	(309)

17·10 经过两个圆锥曲线交点的圆锥曲线系 17·11 经过
五点的圆锥曲线

复习题 (314)

第十八章 切线和法线 (315)

一 曲线的切线和法线 (315)

18·1 曲线的切线和法线的定义 18·2 切线的斜率 18·3 切
线和法线的方程

二 圆锥曲线的切线和法线 (322)

18·4 一般二次曲线的切线 18·5 圆锥曲线的切线方程
18·6 与切线和法线有关的例

三 圆锥曲线的切线和法线的性质 (339)

18·7 抛物线的切线和法线的性质 18·8 椭圆的切线 和法线
的性质 18·9 双曲线的切线和法线的性质 18·10 例题

复习题 (347)

第十九章 极坐标 (349)

19·1 极坐标 19·2 极坐标与直角坐标的互换 19·3 极坐标
方程的曲线 19·4 求轨迹的极坐标方程 19·5 圆锥曲线的极坐
标方程

复习题 (379)

第二十章 参数方程 (382)

20·1 参数方程 20·2 参数方程化为直角坐标方程 20·3 参数方
程的图形 20·4 化普通方程为参数方程 20·5 直线和圆锥曲线
的参数方程 20·6 利用参数方程求轨迹 20·7 圆锥曲线的直径
和共轭直径

复习题 (420)

第十三章 曲线与方程

在第一册5.3、5.4和5.7节里，分别介绍了平面直角坐标系的定义和点的坐标及其表示法；两点 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 的距离公式： $|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ；用定

比 λ 分线段 P_1P_2 的分点 P 的坐标公式： $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ ， $y =$

$\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ 。（其中 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 是线段 P_1P_2 的端点

和终点， $\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda$ ，且 $\lambda \neq -1$ ）。

本册主要以平面直角坐标系为工具，用解析的方法研究在平面内的曲线（动点的轨迹）和含有两个变量的方程之间的关系以及有关的性质等，为进一步学习高等数学奠定一些基础。

本章主要介绍曲线与方程的关系，具体研究下列两个问题：

1. 由曲线求它的方程；
2. 由方程描绘出它的曲线。

另外还介绍求两条曲线的交点。

13.1 曲线与方程

我们知道，在建立了平面直角坐标系后，那么在坐标平

面内的点集*和由实数组成的数对集**之间具有一一对应的关系。***在坐标平面内的曲线（包括直线在内）就可以看成适合于某种条件的点集，也就是把它看成受某种条件制约的动点的轨迹。那么由于点的位置移动变化受着所给定条件的制约，相应于表示点的坐标 x 和 y 的两个实数在彼此的变动中，也是具有相互制约的条件关系，而方程 $f(x, y) = 0$ 就是反映表示两个实数 x 和 y 在彼此的变动中受着某种条件制约关系的数对集。据此，我们把曲线与方程之间的关系定义如下：

设集 C 表示某曲线 C 上点的坐标的数对集，集 F 表示满足某方程 $f(x, y) = 0$ 的数对集，如果具有集 $C = \text{集 } F$ ****的关系，那么这个方程 $f(x, y) = 0$ 叫做这条曲线 C 的方程，这条曲线 C 叫做这个方程 $f(x, y) = 0$ 的曲线。

由定义可知，曲线与它的方程之间应有下列两条关系：

1. 曲线上所有点的坐标都是适合于它的方程；
2. 坐标适合于这个方程的所有点都在这条曲线上。

我们还可以根据上述的两条关系，对曲线和方程另作定义如下：

如果根据某曲线 C 上的点所需要满足的条件，列出点的

* 以点为元素组成的集合叫做点集。

** 以数对为元素组成的集合叫做数对集。例如用数对 $(-1, 0)$ ， $(0, -1)$ ， $(1, 2)$ ， $(2, -1)$ 为元素组成一个数对集。

*** 在集合 A 与集合 B 中，如果集合 A 的每一个元素都对应于集合 B 的每一个元素，反之集合 B 的每一个元素也对应于集合 A 的每一个元素，那么叫做集合 A 与集合 B 具有一一对应关系。例如平面内的一点与一个实数对对应，反之一个实数对与平面内一点对应，所以平面内的点与实数对具有一一对应关系。

**** 两个集合 C 与 F ，如果集 C 的每一个元素都是集 F 的元素，反之，集 F 的每一个元素都是集 C 的元素，那么叫做集 C 与集 F 相等，记为 $C = F$ 。

坐标 x 和 y 之间的一个方程 $f(x, y) = 0$, 而这个方程 $f(x, y) = 0$ 和曲线 C 之间具有上述的两条关系, 那么我们把这个方程 $f(x, y) = 0$ 叫做曲线 C 的方程, 曲线 C 叫做方程 $f(x, y) = 0$ 的曲线.

上面指出的曲线和方程之间的两条关系, 是确定曲线的方程的充要条件. 其中第一条关系是充分条件, 第二条关系是必要条件. 这与我们证明轨迹问题要思考它的纯粹性和完备性是一致的.

由于曲线与方程之间建立了上述的关系后, 那么就把研究曲线的几何问题就可以转化为研究方程的代数问题了.

例1 下列各点是否在方程 $x^2 - 4y = 0$ 的曲线上?

(1) $(-4, 4)$; (2) $(-2, 3)$;

(3) $(2\sqrt{3}, 3)$; (4) $(0, 0)$.

解 根据曲线与它的方程的充要条件可知, 如果题设已知各点的坐标满足于方程 $x^2 - 4y = 0$ 时, 那么这些已知点就在方程 $x^2 - 4y = 0$ 的曲线上. 所以需要把已知各点的坐标分别代入方程 $x^2 - 4y = 0$ 去进行检验.

(1) $\because (-4)^2 - 4 \times 4 = 0$, $\therefore$ 点 $(-4, 4)$ 在方程 $x^2 - 4y = 0$ 的曲线上;

(2) $\because (-2)^2 - 4 \times 3 \neq 0$, $\therefore$ 点 $(-2, 3)$ 不在方程 $x^2 - 4y = 0$ 的曲线上;

(3) $\because (2\sqrt{3})^2 - 4 \times 3 = 0$, $\therefore$ 点 $(2\sqrt{3}, 3)$ 在方程 $x^2 - 4y = 0$ 的曲线上;

(4) $\because 0^2 - 4 \times 0 = 0$, $\therefore$ 原点 $(0, 0)$ 在方程 $x^2 - 4y = 0$ 的曲线上.

答: $(-4, 4)$ 、 $(2\sqrt{3}, 3)$ 和 $(0, 0)$ 三点在方程 $x^2 - 4y = 0$ 的曲线上, 点 $(-2, 3)$ 则不在方程 $x^2 - 4y = 0$ 的曲线

上。

读者注意本例的方程 $x^2 - 4y = 0$ 无常数项，原点在这个方程的曲线上。反之曲线是通过原点的，那么它的方程就无常数项。

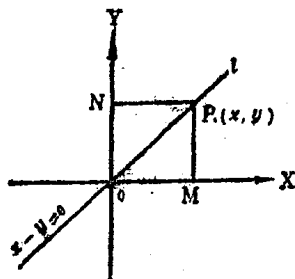


图13-1

例2 如图13-1. 直线 l 是在第一、第三象限内两轴所成角的平分线，证明直线 l 的方程是 $x - y = 0$.

证明：(1) 充分条件。

设 $P(x, y)$ 是直线 l 上的任意一点，作 $PM \perp x$ 轴于 M ，作 $PN \perp y$ 轴于 N 。

$\because$ 直线 l 是角的平分线，

$\therefore MP = NP$. 但 $NP = OM$, $MP = ON$.

$\therefore ON = OM$. 又 ON 表示 P 点的纵坐标 y , OM 表示 P 点的横坐标 x , 故得 $y = x$.

因此知, $P(x, y)$ 的坐标满足于方程 $x - y = 0$;

(2) 必要条件。

设有满足 $x - y = 0$ 的任一数对 x 和 y 。

$\because x - y = 0, \therefore x = y$.

那么用这一数对 x 和 y 表示一点 P 的坐标，则 P 点就具有到角的两边等距的性质，故 P 点必在角的平分线 l 上。

由(1)和(2)知，直线 l 的方程是 $x - y = 0$ 。

13.2 由曲线求它的方程

曲线是点集。要求某曲线 C 的方程 $f(x, y) = 0$ ，必然要

从曲线上的点所受给定的制约条件去思考，把给定的条件用坐标 x 和 y 的关系转化为代数问题建立曲线 C 的方程 $f(x, y) = 0$ ，最后根据充要条件证明所求方程的真实性。

先举两例如下：

例1 设线段 AB 的两端点 A 和 B 的坐标分别是 $(-2, 5)$ 和 $(4, -1)$ 。试求线段 AB 的垂直平分线的方程。

解 如图13-2。设 $P(x, y)$ 是线段 AB 的垂直平分线 l 上的任意一点，依据线段的垂直平分线的性质，则有

$$|PA| = |PB|, \quad (1)$$

由两点间的距离公式，

得

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2}, \quad (2)$$

两边平方得

$$(x+2)^2 + (y-5)^2 = (x-4)^2 + (y+1)^2, \quad (3)$$

化简后得

$$x - y + 1 = 0. \quad (4)$$

1. 充分条件。因 AB 垂直平分线 l 上的任一点必然满足关系式(1)，它的坐标 (x, y) 必然满足方程(2)，而方程(4)是由方程(2)推导出的，所以直线 l 上的任一点的坐标 (x, y) 必定满足方程(4)。

2. 必要条件。设点 $P_1(x_1, y_1)$ 的坐标满足于方程(4)，则有

$$x_1 - y_1 + 1 = 0,$$

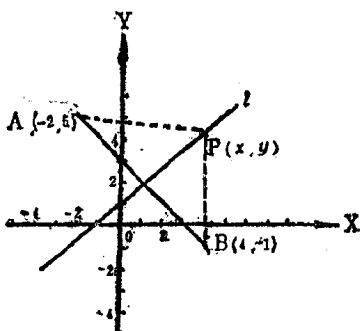


图13-2

经过配方可得

$$(x_1 + 2)^2 + (y_1 - 5)^2 = (x_1 - 4)^2 + (y_1 + 1)^2,$$

两边开平方取算术根得

$$\sqrt{(x_1 + 2)^2 + (y_1 - 5)^2} = \sqrt{(x_1 - 4)^2 + (y_1 + 1)^2},$$

$$\text{但 } |P_1 A| = \sqrt{(x_1 + 2)^2 + (y_1 - 5)^2},$$

$$|P_1 B| = \sqrt{(x_1 - 4)^2 + (y_1 + 1)^2},$$

$$\therefore |P_1 A| = |P_1 B|.$$

所以 P_1 点到线段 AB 的两端等距。

因此可知，方程 $x - y + 1 = 0$ 是线段 AB 的垂直平分线方程。

例 2 以点 $C(2, -3)$ 为圆心，半径长是 5 作圆，求这个圆的方程。

解 如图 13-3。设 $P(x, y)$ 是圆 C 上的任意一点，则有

$$|PC| = 5, \quad (1)$$

即是

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2} = 5, \quad (2)$$

两边平方得

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25, \quad (3)$$

化简后得

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0. \quad (4)$$

1. 充分条件。因圆 C 上的任一点必然满足关系式 (1)，它的坐标 (x, y) 必然满足方程 (2)，而方程 (4) 是由方程 (2)

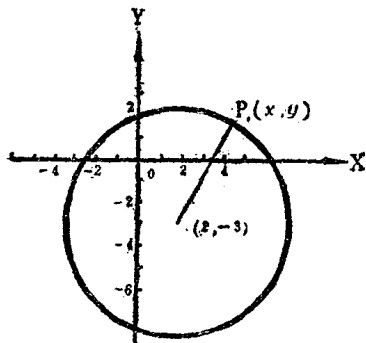


图 13-3

推导出的，所以圆C上的任一点的坐标 (x, y) 必定满足方程(4)。

2. 必要条件。设点 $P_1(x_1, y_1)$ 的坐标满足于方程(4)，则有

$$x_1^2 + y_1^2 - 4x_1 + 6y_1 - 12 = 0,$$

配方后得

$$(x_1 - 2)^2 + (y_1 + 3)^2 = 25,$$

两边开平方取算术根得

$$\sqrt{(x_1 - 2)^2 + (y_1 + 3)^2} = 5,$$

$$\text{但 } |P_1C| = \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (y_1 + 3)^2},$$

$$\therefore |P_1C| = 5.$$

所以 P_1 点必在圆C上。

因此可知，圆C的方程是 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ 。

从以上的两个例题，我们可以看出由曲线求它的方程的法则是：

1. 设点 在曲线上任意取一点 $P(x, y)$ ；
2. 列式 根据曲线上的点所要满足的条件列出等式；
3. 转换 把列出满足条件的等式转换为用坐标 x 和 y 来表示的方程；
4. 化简 把得到的方程进行整理化简后就得到所要求的方程；

5. 证明 证明得到的方程就是所要求的曲线的方程。

注意，一般对由曲线求它的方程，在经过整理化简后得到所求的方程，都是对证明省略了的。严格的说，要在化简的过程中都是与得到的方程是同解变形的过程，才对证明的步骤可以略去。

一般在直角坐标平面内的曲线的方程都是含有两个变数

x 和 y 的二元方程 $f(x, y) = 0$,但是也有特殊情形是只含有一个变数 x 或 y 的一元方程 $f(x) = 0$ 或 $f(y) = 0$.下面例题就是一元方程的情形.

例3 求与 y 轴距离是3, 平行于 y 轴的直线方程.

解 如图13-4. 设 $P(x, y)$ 是平行于 y 轴且距离是3的直线上的任一点, 作 $PN \perp y$ 轴于 N , 则有

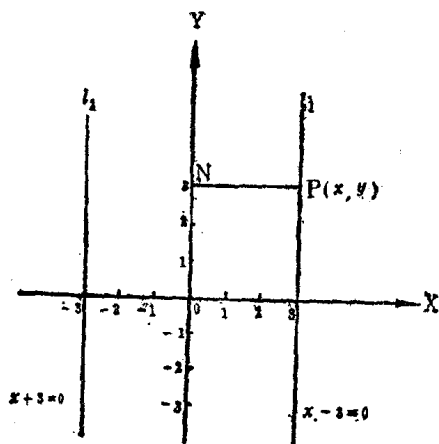


图13-4

$$|NP| = 3. \text{ 但 } NP = |x|,$$

故得 $|x| = 3$. 即 $x = \pm 3$,

故知所求直线方程是 $x - 3 = 0$ 与 $x + 3 = 0$.

证明从略.

本例所求的直线方程是两个一元方程, 即直线 l_1 , $x - 3 = 0$ 与直线 l_2 : $x + 3 = 0$. 这两条平行于 y 轴的直线到 y 轴的距离都是3.

两个方程都是只有一个变数 x ，这说明另一个变数 y 是可以任取任何实数。因为 $x+3=0$ 与 $x+0\cdot y+3=0$ 的形式是一致的。

读者从本例的情形可以推想与 x 轴平行距离是 a 的直线方程是什么？两条坐标轴所在的直线方程又是什么？

13.3 由方程描绘出它的曲线

由曲线与方程的定义知，要描绘方程 $f(x, y) = 0$ 的曲线 C ，必须把满足方程 $f(x, y) = 0$ 的数对集的元素，在坐标平面内描绘出每个元素（即数对）的对应点，再把描绘出的所有点连接成一条平滑的曲线，那么这条曲线就是所要描绘的方程 $f(x, y) = 0$ 的曲线 C 。这种用描点法作方程的曲线是我们常用的方法。请看下面的例题。

例 1 描绘方程 $3x - y - 1 = 0$ 的曲线。

解 (1) 把满足方程 $3x - y - 1 = 0$ 的数对集的元素列表。据此，就 y 解方程，得

$$y = 3x - 1,$$

列表：

x	$\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$
y	$\cdots -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \cdots$

(2) 在坐标平面内，把表中的每一个数对，以数 x 为横坐标，数 y 为纵坐标，依次作出相对应的点，如 $(-3, -10)$ ， $(-2, -1)$ ， $(-1, -4)$ 等点。

(3) 把描绘出的所有点，依次连接成一条平滑的曲线，如图13-5。得到的直线 l 就是方程 $3x - y - 1 = 0$ 的曲线。

例 2 描绘方程 $x^2 + y^2 = 25$ 的曲线。