SHUXUE

# 数学

## 几何·第三册

青年自学丛书

四川人民出版社

# 数学

青年自学丛书

# 数学

## 几何·第三册

主　　编　成都市教育局
编写单位　成都市锦江中学
　　　　　成都市第十六中学
　　　　　成都市盐市口中学
执　　笔　钟策安　　朱文虎
　　　　　~~李维章~~

四川人民出版社
一九七九年·成都

青年自学丛书　数学　几何　第三册

四川人民出版社出版　　重庆新华印刷厂印刷

四川省新华书店重庆发行所发行

开本787×1092毫米　1/32　印张13.5　字数278千

1979年8月第一版　　1979年8月第一次印刷

印数：1—107,490册

书号：13118·15　　定价：0.92元

# 前　言

“一定要极大地提高整个中华民族的科学文化水平”。这是英明领袖华主席、党中央高瞻远瞩地向全党、全军、全国各族人民发出的庄严号召。这是激动人心的动员令，这是气吞山河的宣言书，这同样是对广大青年亲切的召唤。

青年是我们的希望，是我们的未来。为了适应广大青年向科学进军的需要，我们组织编写了一套“青年自学丛书”，供广大青年自学、在校中学生课外阅读和中学教师参考。

这套“青年自学丛书”的数理化部份，共十七册，即《数学》八册（《代数》三册、《几何》三册、《三角》二册）、《物理》四册、《化学》五册。考虑到这套丛书具有自学的特点，编写时注意了基础理论、基本概念、基本规律和学习难点的讲述，例题较详，习题较多，循序渐进，由浅入深；文字上努力做到生动活泼，明白易懂。同时，参照全国中小学通用教材教学大纲精神，还介绍了一些先进知识。要求通过对丛书的自学，使读者能达到高中或略高于高中的水平。

这是“青年自学丛书”《数学》的《几何》读本，按照平面几何、解析几何、立体几何等方面的内容，编成三册。

这套丛书的编写出版，得到中共成都市委宣传部的亲切关怀和有关学校的支持。四川师范学院数学系协助了丛书《数学》读本的审稿工作。在此，我们谨致谢意。

由于时间仓促和编者水平有限，本书内容可能有缺点或错误。鉴于当前需要迫切，先以“试用本”出版，广泛听取意见。我们热忱欢迎广大读者批评指正，以便再版时修订。

编　者

一九七八年八月

# 目　录

# 第十三章　曲线与方程

在第一册5.3、5.4和5.7节里，分别介绍了平面直角坐标系的定义和点的坐标及其表示法；两点$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$的距离公式：$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$；用定比$\lambda$分线段$P_1P_2$的分点$P$的坐标公式：$x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$，$y = \dfrac{y_1 + y_2}{1 + \lambda}$。(其中$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$是线段$P_1P_2$的端点和终点，$\dfrac{P_1P}{PP_2} = \lambda$，且$\lambda \neq -1$)。

本册主要以平面直角坐标系为工具，用解析的方法研究在平面内的曲线(动点的轨迹)和含有两个变量的方程之间的关系以及有关的性质等，为进一步学习高等数学奠定一些基础。

本章主要介绍曲线与方程的关系，具体研究下列两个问题：

1. 由曲线求它的方程；
2. 由方程描绘出它的曲线.

另外还介绍求两条曲线的交点.

## 13·1 曲线与方程

我们知道，在建立了平面直角坐标系后，那么在坐标平

面内的点集*和由实数组成的数对集**之间具有一一对应的关系. ***在坐标平面内的曲线（包括直线在内）就可以看成适合于某种条件的点集，也就是把它看成受某种条件制约的动点的轨迹. 那么由于点的位置移动变化受着所给定条件的制约，相应于表示点的坐标$x$和$y$的两个实数在彼此的变动中，也是具有相互制约的条件关系，而方程$f(x, y)=0$就是反映表示两个实数$x$和$y$在彼此的变动中受着某种条件制约关系的数对集. 据此，我们把曲线与方程之间的关系定义如下：

设集C表示某曲线$C$上点的坐标的数对集，集F表示满足某方程$f(x, y)=0$的数对集，如果具有集C＝集F**** 的关系，那么这个方程$f(x, y)=0$叫做这条曲线$C$的方程，这条曲线$C$叫做这个方程$f(x, y)=0$的曲线.

由定义可知，曲线与它的方程之间应有下列两条关系：

1. 曲线上所有点的坐标都是适合于它的方程；

2. 坐标适合于这个方程的所有点都在这条曲线上.

我们还可以根据上述的两条关系，对曲线和方程另作定义如下：

如果根据某曲线$C$上的点所需要满足的条件，列出点的

---

* 以点为元素组成的集合叫做点集.

** 以数对为元素组成的集合叫做数对集. 例如用数对$(-1,0)$，$(0,-1)$，$(1,2)$，$(2,-1)$为元素组成一个数对集.

*** 在集合$A$与集合$B$中，如果集合$A$的每一个元素都对应于集合$B$的每一个元素，反之集合$B$的每一个元素也对应于集合$A$的每一个元素，那么叫做集合$A$与集合$B$具有一一对应关系. 例如平面内的一点与一个实数对对应，反之一个实数对与平面内一点对应，所以平面内的点与实数对具有一一对应关系.

**** 两个集合C与F，如果集C的每一个元素都是集F的元素，反之，集F的每一个元素都是集C的元素，那么叫做集C与集F相等，记为C＝F.

坐标 $x$ 和 $y$ 之间的一个方程 $f(x, y)=0$，而这个方程 $f(x, y)=0$ 和曲线 $C$ 之间具有上述的两条关系，那么我们把这个方程 $f(x, y)=0$ 叫做曲线 $C$ 的方程，曲线 $C$ 叫做方程 $f(x, y)=0$ 的曲线。

上面指出的曲线和方程之间的两条关系，是确定曲线的方程的充要条件。其中第一条关系是充分条件，第二条关系是必要条件。这与我们证明轨迹问题要思考它的纯粹性和完备性是一致的。

由于曲线与方程之间建立了上述的关系后，那么就把研究曲线的几何问题就可以转化为研究方程的代数问题了。

**例1**　下列各点是否在方程 $x^2-4y=0$ 的曲线上？

(1) $(-4, 4)$；　　(2) $(-2, 3)$；

(3) $(2\sqrt{3}, 3)$；　　(4) $(0, 0)$。

**解**　根据曲线与它的方程的充要条件可知，如果题设已知各点的坐标满足于方程 $x^2-4y=0$ 时，那么这些已知点就在方程 $x^2-4y=0$ 的曲线上。所以需要把已知各点的坐标分别代入方程 $x^2-4y=0$ 去进行检验。

(1) $\because$ $(-4)^2-4\times4=0$，$\therefore$ 点 $(-4, 4)$ 在方程 $x^2-4y=0$ 的曲线上；

(2) $\because$ $(-2)^2-4\times3\neq0$，$\therefore$ 点 $(-2, 3)$ 不在方程 $x^2-4y=0$ 的曲线上；

(3) $\because$ $(2\sqrt{3})^2-4\times3=0$，$\therefore$ 点 $(2\sqrt{3}, 3)$ 在方程 $x^2-4y=0$ 的曲线上；

(4) $\because$ $0^2-4\times0=0$，$\therefore$ 原点 $(0, 0)$ 在方程 $x^2-4y=0$ 的曲线上。

**答**：$(-4, 4)$、$(2\sqrt{3}, 3)$ 和 $(0, 0)$ 三点在方程 $x^2-4y=0$ 的曲线上，点 $(-2, 3)$ 则不在方程 $x^2-4y=0$ 的曲线

上。

读者注意本例的方程 $x^2-4y=0$ 无常数项，原点在这个方程的曲线上。反之曲线是通过原点的，那么它的方程就无常数项。

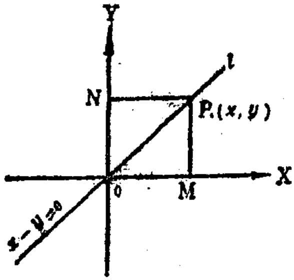


图13-1

**例2** 如图 13-1。直线 $l$ 是在第一、第三象限内两轴所威角的平分线，证明直线 $l$ 的方程是 $x-y=0$。

证明：(1) 充分条件。

设 $P(x, y)$ 是直线 $l$ 上的任意一点，作 $PM\perp x$ 轴于 $M$，作 $PN\perp y$ 轴于 $N$。

$\because$ 直线 $l$ 是角的平分线，

$\therefore$ $MP=NP$。 但 $NP=OM$，$MP=ON$。

$\therefore$ $ON=OM$。 又 $ON$ 表示 $P$ 点的纵坐标 $y$，$OM$ 表示 $P$ 点的横坐标 $x$，故得 $y=x$。

因此知，$P(x, y)$ 的坐标满足于方程 $x-y=0$；

(2) 必要条件。

设有满足 $x-y=0$ 的任一数对 $x$ 和 $y$。

$\because$ $x-y=0$， $\therefore$ $x=y$。

那么用这一数对 $x$ 和 $y$ 表示一点 $P$ 的坐标，则 $P$ 点就具有到角的两边等距的性质，故 $P$ 点必在角的平分线 $l$ 上。

由 (1) 和 (2) 知，直线 $l$ 的方程是 $x-y=0$。

### 13·2 由曲线求它的方程

曲线是点集．要求某曲线 $C$ 的方程 $f(x, y)=0$，必然要

从曲线上的点所受给定的制约条件去思考，把给定的条件用坐标$x$和$y$的关系转化为代数问题建立曲线$C$的方程$f(x,y)=0$，最后根据充要条件证明所求方程的真实性。

先举两例如下：

**例1** 设线段$AB$的两端点$A$和$B$的坐标分别是$(-2,5)$和$(4,-1)$。试求线段$AB$的垂直平分线的方程。

**解** 如图13-2。设$P(x,y)$是线段$AB$的垂直平分线$l$上的任意一点，依据线段的垂直平分线的性质，则有

$$|PA|=|PB|, \tag{1}$$

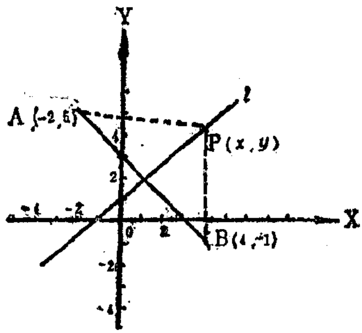

图13-2

由两点间的距离公式，得

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}, \tag{2}$$

两边平方得

$$(x+2)^2+(y-5)^2=(x-4)^2+(y+1)^2, \tag{3}$$

化简后得

$$x-y+1=0. \tag{4}$$

1．充分条件．因$AB$垂直平分线$l$上的任一点必然满足关系式(1)，它的坐标$(x,y)$必然满足方程(2)，而方程(4)是由方程(2)推导出的，所以直线$l$上的任一点的坐标$(x,y)$必定满足方程(4)。

2．必要条件．设点$P_1(x_1,y_1)$的坐标满足于方程(4)，则有

$$x_1-y_1+1=0,$$

经过配方可得

$$(x_1+2)^2+(y_1-5)^2=(x_1-4)^2+(y_1+1)^2,$$

两边开平方取算术根得

$$\sqrt{(x_1+2)^2+(y_1-5)^2}=\sqrt{(x_1-4)^2+(y_1+1)^2},$$

但 $|P_1A|=\sqrt{(x_1+2)^2+(y_1-5)^2}$,

$|P_1B|=\sqrt{(x_1-4)^2+(y_1+1)^2}$,

$\therefore\quad |P_1A|=P_1B|$.

所以$P_1$点到线段$AB$的两端等距.

因此可知，方程$x-y+1=0$是线段$AB$的垂直平分线方程.

**例 2** 以点$C(2, -3)$为圆心，半径长是5作圆，求这个圆的方程.

**解** 如图13-3. 设$P(x, y)$是圆$C$上的任意一点，则有

$$|PC|=5, \tag{1}$$

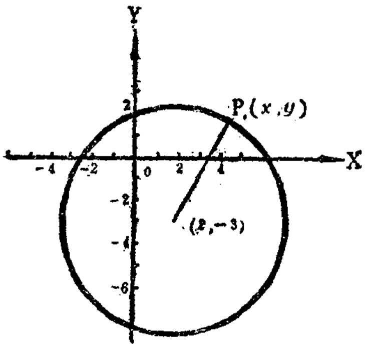


图13-3

即是

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}=5, \tag{2}$$

两边平方得

$$(x-2)^2+(y+3)^2=25, \tag{3}$$

化简后得

$$x^2+y^2-4x+6y-12=0. \tag{4}$$

1. 充分条件. 因圆$C$上的任一点必然满足关系式(1)，它的坐标$(x, y)$必然满足方程(2)，而方程(4)是由方程(2)

推导出的，所以圆$C$上的任一点的坐标$(x, y)$必定满足方程(4)。

2．必要条件．设点$P_1(x_1, y_1)$的坐标满足于方程(4)，则有

$$x_1^2+y_1^2-4x_1+6y_1-12=0,$$

配方后得

$$(x_1-2)^2+(y_1+3)^2=25,$$

两边开平方取算术根得

$$\sqrt{(x_1-2)^2+(y_1+3)^2}=5,$$

但 $|P_1C|=\sqrt{(x_1-2)^2+(y_1+3)^2}$,

$\therefore$ $|P_1C|=5$.

所以$P_1$点必在圆$C$上.

因此可知，圆$C$的方程是$x^2+y^2-4x+6y-12=0$.

从以上的两个例题，我们可以看出由曲线求它的方程的法则是：

1．**设点** 在曲线上任意取一点$P(x, y)$；

2．**列式** 根据曲线上的点所要满足的条件列出等式；

3．**转换** 把列出满足条件的等式转换为用坐标$x$和$y$来表示的方程；

4．**化简** 把得到的方程进行整理化简后就得到所要求的方程；

5．**证明** 证明得到的方程就是所要求的曲线的方程.

注意．一般对由曲线求它的方程，在经过整理化简后得到所求的方程，都是对证明省略了的．严格的说，要在化简的过程中都是与得到的方程是同解变形的过程，才对证明的步骤可以略去.

一般在直角坐标平面内的曲线的方程都是含有两个变数

$x$和$y$的二元方程$f(x,\ y)=0$，但是也有特殊情形是只含有一个变数$x$或$y$的一元方程$f(x)=0$或$f(y)=0$。下面例题就是一元方程的情形。

**例 3**　求与$y$轴距离是 3，平行于$y$轴的直线方程.

**解**　如图13-4. 设$P(x,\ y)$是平行于$y$轴且距离是 3 的直线上的任一点，作$PN\perp y$轴于$N$，则有

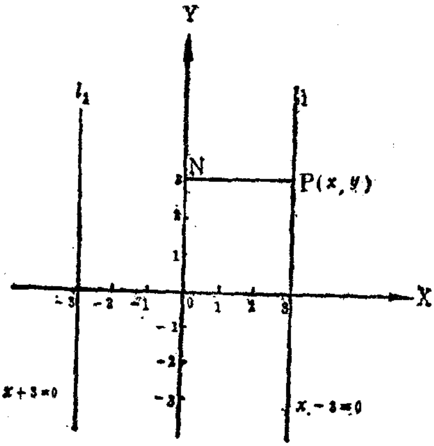


图13-4

$|NP|=3$. 但　$NP=x$,

故得　$|x|=3$. 即　$x=\pm 3$,

故知所求直线方程是$x-3=0$与$x+3=0$。

证明从略.

本例所求的直线方程是两个一元方程，即直线$l_1$: $x-3=0$与直线$l_2$: $x+3=0$。这两条平行于$y$轴的直线到$y$轴的距离都是 3。

两个方程都是只有一个变数$x$，这说明另一个变数$y$是可以任取任何实数．因为$x\mp3=0$与$x+0\cdot y\mp3=0$的形式是一致的．

读者从本例的情形可以推想与$x$轴平行距离是$a$的直线方程是什么？两条坐标轴所在的直线方程又是什么？

### 13·3 由方程描绘出它的曲线

由曲线与方程的定义知，要描绘方程$f(x, y)=0$的曲线$C$，必须把满足方程$f(x, y)=0$的数对集的元素，在坐标平面内描绘出每个元素（即数对）的对应点，再把描绘出的所有点连接成一条平滑的曲线，那么这条曲线就是所要描绘的方程$f(x, y)=0$的曲线$C$．这种用描点法作方程的曲线是我们常用的方法．请看下面的例题．

**例1** 描绘方程$3x-y-1=0$的曲线．

**解** (1) 把满足方程$3x-y-1=0$的数对集的元素列表．据此，就$y$解方程，得

$$y=3x-1,$$

列表：

| x | ……−3，−2，−1，0，1，2，3，4，…… |
|---|---|
| y | ……−10，−7，−4，−1，2，5，8，11，…… |

(2) 在坐标平面内，把表中的每一个数对，以数$x$为横坐标，数$y$为纵坐标，依次作出相对应的点，如$(-3, -10)$，$(-2, -1)$，$(-1, -4)$等点．

(3) 把描绘出的所有点，依次连接成一条平滑的曲线，如图13-5．得到的直线$l$就是方程$3x-y-1=0$的曲线．

**例2** 描绘方程$x^2+y^2=25$的曲线．