拉普拉斯变换原理

〔美〕 C·J·沙万特 著
琼

陕西科学技术出版社

拉普拉斯变换原理

〔美〕C.J.沙万特 琼 著

李哲岩 严瑜 周肇锡 王省富 译

杜棣荣 校

陕 西 科 学 技 术 出 版 社

FUNDAMENTALS OF THE
LAPLACE TRANSFORMATION
据 1962 年英文版翻译

拉 普 拉 斯 变 换 原 理

〔美〕C.J.沙万特 琼 著

李哲岩 严瑜 周肇锡 王省富 译

杜棣荣 校

陕西科学技术出版社出版
(西安北大街 131 号)

陕西省新华书店发行 国营五二三厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 8.5 字数 182,000

1984 年10月第 1 版 1984 年10月第 1 次印刷

印数 1—2,900

统一书号：15202·82 定价：1.75 元

译 者 的 话

拉普拉斯变换，应用甚广。国内各理工科大学都开设这方面的课程，但由于教学时数的限制，往往不能满足学生们旺盛的求知欲。近年来，知识领域的扩大与科学技术的高度发展，促使教育界注重了对学生各种能力的培养，尤其是自学能力的培养。因此，向大学生提供教本以外的参考书，就显得十分必要。拉普拉斯变换原理便是一本合适的参考书，现在翻译出来，希望有益于读者们。

本书原为美国的大学教科书。我们在翻译时，曾对原书中的错、漏处，以及若干难于理解的地方，作了某些必要的修改和补充。译本中还删去了几幅与内容关系不密切的照片。

在翻译过程中，胡舜德副教授、陈辛耕副教授曾分别审阅了若干章节，张德珍副教授给予了很大的帮助，在此一并表示衷心感谢。

书中难免不妥甚至错误之处，欢迎读者批评指正。

序

为什么需要这样一本新书，讲述关于电学、力学和机电系统的微分方程解法呢？这有两个理由：第一，为了满足大学生学习拉普拉斯变换的需要。其次，为了帮助没有学过拉普拉斯变换的工程技术人员获得这一新的重要的学科知识。

由于科学的发展，更多的知识需要增加到大学课程中来。拉普拉斯变换原是研究生班开的课，现在也列入大学课程。现在许多大学在高年级已经开设了拉普拉斯变换，有时低年级也开这门课。这本教程正是为了满足这种要求而编写的。

此外，许多从事实际工作的工程人员，是在大学开设拉普拉斯变换这门课以前毕业的。由于运算微积应用之广，他们常常感到因为没有这方面的知识而发生困难。这本教科书为他们提供了一个自学拉普拉斯变换的机会，而不必正式去修大学课程。由于书中附录了为扩大解决实际问题范围的变换表，更增加了这本书的使用价值。

本书主要从学生角度编写的。书中有许多数值例题，并在每章结尾附有练习题。本教程简明扼要，但又不失却数学的严格性。某些章的最后几节，初学时可以跳过去，这些节的节数前用记号“△”标出。

第一章介绍拉普拉斯变换的方法。接下去的三章，讲述推导描述有关电学，力学，以及机电系统的方程。第五章介绍拉普拉斯逆变换。第六章研究利用拉普拉斯变换解常系数线性常

微分方程。第七章中列入了许多常用的拉普拉斯变换定理。第八章介绍拉普拉斯变换最大的优点之一——S平面分析。在许多实际问题中，并不需要求出时间解，这是因为所有必要的设计信息，不通过求逆变换也能得到。这种分析方法，即S平面分析法，仅这一点就足以充分说明了学习拉普拉斯变换的必要性。

本书的几个附录里，提供了本书正文内容所必须的数学基础的综合性资料。在附录F中，编进了E.C.Levy制订的极其完善的拉普拉斯变换对照表的一部分。

我向Carleton B. Solloway表示感谢，他对这本书的编写作出了极宝贵的贡献。早先，他写了几章并且对这本书的其它部分提出了许多有益的意见。我衷心感谢J.Aseltine博士和南加里福尼亚大学的学生对本书提出的许多有益的改进意见。衷心感谢E.C.Levy同意把他的完善的变换表当中的一部分编入本书。特别应当感谢G.Fulmer打印出了本书的原稿。

C. J. 沙万特 琼

目　录

1

拉普拉斯变换引论

1-1. 引言

许多物理系统的设计和分析研究，都以常系数线性常微分方程为基础。其大致研究过程在图 1-1 中列出。

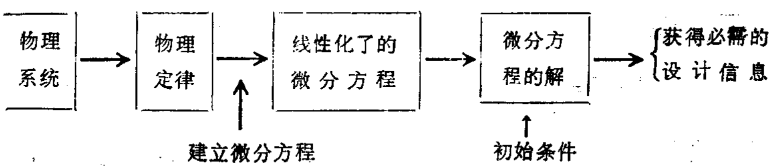

图1-1　物理系统的解

可以利用物理定律建立物理系统的方程组；而这些描写系统的方程，常常需要线性化。要实现这一点，必须限制解在一个小范围内成立。在我们建立了一组线性常微分方程以后，还需要寻求这些方程满足某些初始条件的解。

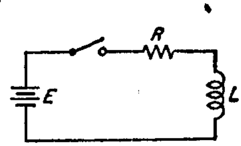

图 1-2　电路

作为例子我们考虑如图 1-2 所示的电路，它是由电阻器、电感同电压电源串联而成。当$\dfrac{di}{dt}$是常数时，按照图 1-3 可以看出，对于大的电流通过电感的电压呈饱和状态。假定我们

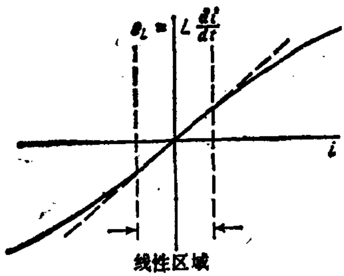

图 1-3　$L(i)\frac{di}{dt}$ 对 i 的变化

希望求出在电路接通后的电流。在这种情况下需要用基尔霍夫定律来建立微分方程（此时仅有一个方程），即是

$$L(i)\frac{di}{dt}+Ri=E \tag{1-1}$$

这个方程是线性的——这是由于限制了电流值的范围，同时设电感是常数，即设

$$L(i)=L_0 \tag{1-2}$$

1-2．积分解法

对这种微分方程，有几种求解方法。例如，在上述情形我们可以直接积分方程。该方程可先重新整理为

$$\frac{E}{R}-i=\frac{L_0}{R}\ \frac{di}{dt} \tag{1-3}$$

再写成如下的积分形式，其中积分限包括了初始条件[即$i(0)=0$]。

$$\int_0^t \frac{R}{L_0}dt=\int_0^i \frac{di}{\frac{E}{R}-i} \tag{1-4}$$

求积分可得

$$\frac{R}{L_0}t=-\log\left(\frac{E}{R}-i\right)+\log\frac{E}{R}=-\log\frac{\frac{E}{R}-i}{\frac{E}{R}}$$ *

---

*本书中所用 log 表示自然对数，即 $\log x=\ln x$，下同——译者注。

从而得到解是

$$i=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{Rt}{L_0}}\right) \tag{1-5}$$

对于一阶微分方程，通常我们都能够借助于积分表计算积分，从而求出解来。

1-3．常系数线性常微分方程的古典解法

常系数线性常微分方程的另一种解法是古典解法。我们从线性微分方程

$$E=Ri+L_0\frac{di}{dt} \tag{1-6}$$

出发，来说明这种方法。方程（1-6）的解可分为两部分：补函数 i_c 和特解 i_p（补函数，即与非齐次微分方程相对应的齐次微分方程的通解——译注)。其中第一部分的求法是：设方程（1-6)中 $E=0$，并设此时其解的形式为$i_c=Ae^{Pt}$，代入(1-6)式所对应的齐次方程

$$L_0\frac{di_c}{dt}+Ri_c=0$$

得

$$L_0APe^{Pt}+RAe^{Pt}=0 \tag{1-7}$$

消去因式 Ae^{Pt} 后，得

$$L_0P+R=0$$

求出这个方程的解为

$$p=-\frac{R}{L_0}$$

于是得补函数

$$i_c=Ae^{-\frac{Rt}{L_0}} \tag{1-8}$$

其中 A 是任意常数；再应用初始条件于通解 $i=(i_c+i_p)$，便可以确定 A 的值。又由于驱动函数（即方程（1-6）中的 E）是常数，所以特解是常数

$$i_p=\frac{E}{R}$$

而通解是 $i=(i_c+i_p)$，于是

$$i=\frac{E}{R}+Ae^{-\frac{Rt}{L_0}} \tag{1-9}$$

而我们所要求的解可以通过计算 A 求得。由初始条件：当 $t=0$ 时 $i=0$，有

$$0=\frac{E}{R}+A$$

因此 $A=-\frac{E}{R}$，于是解为

$$i=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{Rt}{L_0}}\right) \tag{1-10}$$

显然，它与式（1-5）是一致的。

古典解法在许多教科书中都有介绍[3],[22],[27]，因此这里仅作简要的复习。一般形式的微分方程为

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_0y=f(t) \tag{1-11}$$

它的解 y 分为两部分：

y_c = 补函数，它是驱动函数等于零时的微分方程的解（即齐次方程的通解）。

y_p = 特别积分，它是对应于方程(1-11)中特殊的驱动函数的解。

补函数与特别积分是分别求出的，然后相加得解 $y=y_c+$

y_p，这就是方程（1—11）的通解。再将初始条件应用于这个和式，便可由此得到确定的解。

补函数。设常系数线性齐次方程

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_0y=0 \qquad (1\text{-}12)$$

的解为

$$y_c=Ae^{Pt} \qquad (1\text{-}13)$$

然后把它代入微分方程（1-12），得

$$a_nAp^ne^{pt}+a_{n-1}Ap^{n-1}e^{pt}+\cdots+a_0Ae^{pt}=0 \qquad (1\text{-}14)$$

消去因式 Ae^{pt}，于是得到特征方程

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_0=0 \qquad (1\text{-}15)$$

为了继续求解，必须解这个代数方程。在任何一种解法中都必须解特征方程。关于多项式求根问题，我们放在附录 D 中研究。方程（1-15）分解为

$$(p+p_1)(p+p_2)(p+p_3)^2(p^2+2\zeta_1\omega_1p+\omega_1{}^2)\cdots \qquad (1\text{-}16)$$

后，补函数便可以据此写成各项和的形式。对于单根 p_1和p_2，我们分别得到指数函数 Ae^{-p_1t} 和 Be^{-p_2t}。对于每一个多重根，我们得到形式为指数函数乘以 t 的多项式：

对于二重根： $(A+Bt)e^{-p_3t}$

对于三重根： $(A+Bt+Ct^2)e^{-p_3t}$

其他依此类推。

对于二次项 $p^2+2\zeta_1\omega_1p+\omega_1{}^2$， 我们得到阻尼正弦曲线

$e^{-\zeta_1\omega_1t}(E\sin\sqrt{1-\zeta_1{}^2}\,\omega_1t+F\cos\sqrt{1-\zeta_1{}^2}\,\omega_1t)$ ，其中$\zeta_1<1$。

于是方程（1-12）的补函数可写为

$$Ae^{-p_1t}+Be^{-p_2t}+(C+Dt)e^{-p_3t}+$$

$$e^{-\zeta_1\omega_1 t}\,(E\sin\sqrt{1-\zeta_1{}^2}\,\omega_1 t+F\cos\sqrt{1-\zeta_1{}^2}\,\omega_1 t)+\cdots \tag{1-17}$$

对于重复根，其讨论方法类似于重实根的方法。

例如，求方程

$$\frac{d^3y}{dt^3}+3\frac{d^2y}{dt^2}-4y=0 \tag{1-18}$$

的通解。

设 $y=Ae^{pt}$，代入方程得

$$Ap^3e^{pt}+3Ap^2e^{pt}-4Ae^{pt}=0$$

约去各项公因子 Ae^{pt} 后，得特征方程

$$p^3+3p^2-4=0 \tag{1-19}$$

用附录 D 的方法分解特征方程为

$$(p+2)^2(p-1)=0 \tag{1-20}$$

于是通解为

$$y=(A+Bt)e^{-2t}+Ce^t \tag{1-21}$$

求出特别积分后，再利用初始条件定出其中常数，便得到解。

特别积分。求特别积分的方法很多。其中最直接的方法是**待定系数法**。这方法可以应用于任意具有如下形式的驱动函数或有如下形式的和的驱动函数

$$f(t)=Kt^ne^{at}\sin(\omega t\pm\varphi) \tag{1-22}$$

其特别积分 y_p 的求法如下：

把驱动函数 $f(t)=f_1(t)+f_2(t)+\cdots+f_n(t)$ 中的各项分开，我们对单独的每一项 $f_i(t)$ 分别写出它所对应的特别积分的形式 y_{p_i}。如果与 $f_i(t)$ 相类似的项不出现在补函数 y_c 中，则 y_{p_i} 的形式与 $f_i(t)$ 相同；如果有类似于 $f_i(t)$ 的项出现在 y_c 中，则其对应的特别积分 y_{p_i} 的形式为 $f_i(t)$ 乘以 t 的 α 次幂，式中