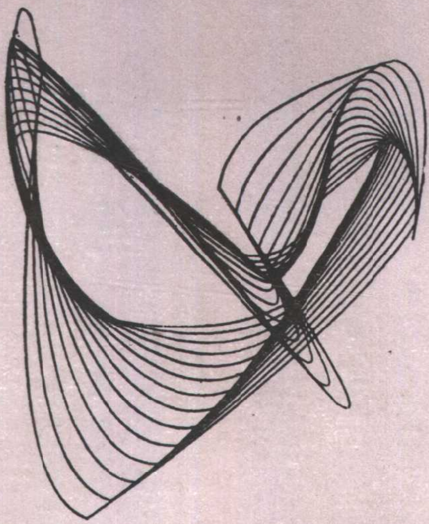
数学 IIB

〔日〕小平邦彦 编



吉林人民出版社

数　　学

ⅡB

（日本高中数学）

〔日〕小　平　邦　彦　编
马忠林　高绪珏　王家彦　任永太　译

吉林人民出版社

数　学　IIB

日本东京书籍株式会社

1977年

数　学

IIB

（日本高中数学）

〔日〕小平邦彦　编

马忠林 高绪珏 王家彦 任永太 译

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行

~~长春新华印刷厂~~印刷

787×1092毫米32开本　8½印张　160,000字

~~1979年4月第1版　1979年4月第1次印刷~~

印数：1－60,000册

书号：7091·1055　定价：0.75元

内 部 发 行

前　　言

这本书是为学完高中《数学Ⅰ》的学生继续学习而编写的数学教科书。

如在《数学Ⅰ》前言中所述，数学家对于凡是可能思考的事物，都可以自由地思考。所以说，数学是人类精神的自由创造物。另一方面，数学广泛地应用于各种科学领域，确实起着意想不到的作用，所以数学被看成是世间森罗万象的基础。

本书的第Ⅰ章，学习空间坐标和向量。空间坐标是把在《数学Ⅰ》中所学的平面上点的坐标，推广到空间的情形。同样地，空间的向量是把平面上的向量推广到空间的情形。

数学家本能地喜好这种推广或一般化，"一般化"已成为数学发展的一种动力。

在第Ⅱ章学习矩阵。矩阵不过是用数字或字母排列成矩形或正方形的表。当把它称为矩阵时，就把矩阵看作是一个量，从而定义矩阵的加法、减法、乘法等运算。

矩阵不仅对数学，就是对物理学也起着基本的重要作用。在现代物理学中，各种量的原理，可以考虑不是用数而是用矩阵来表示。在这里可以看出数学是森罗万象的基础这种说法所表现的一个方面。

在此后的第Ⅲ章里，学习数列与数学归纳法。数学归纳法在数学中是最基本的论证方法，现代数学，如果没有数学归纳法，很多都是不成立的。

在第Ⅳ章学习微分法，在第Ⅴ章学习积分法。从一个函数求出表示其变化率的函数的方法，就是微分法，反之，由表示变化率的函数求原函数的方法就是积分法。

在十七世纪后半叶，由于牛顿和莱布尼兹创始的微积分的应用，到十八世纪以后，科学技术达到了惊人的进步。

一般地，从若干个不加证明的基本法则出发，根据论证构成科学的体系，叫做公理的构造。这时，那些不加证明的基本法则叫做公理。

进入本世纪以来，所有的数学都倾向于公理的构造化，作为其典型的代表就是欧几里得几何学。在第Ⅵ章学习欧几里得平面几何学公理的构造。

学习数学只是读书和背诵是不够的，还要进行独立思考、计算问题和解问题。例如，学游泳只读游泳的书是不行的，还要到水里去游才行。同样的道理，学习数学时，就必须进行独立思考。

凡　　例

例　为帮助理解课文而举出的具体例子。

例题　例题是为帮助理解有关内容而提出的有代表性的题目；以框线围起来的〔解〕或〔证明〕是示范性的。

注意　*)是有助于理解的补充说明。

问　为立刻掌握刚学过的内容，以及为导入新内容而设的问题。

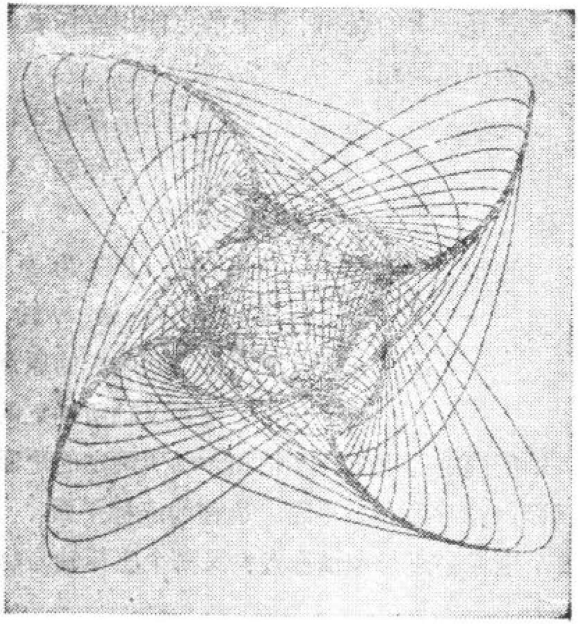
问题　在各节末尾，为练习该节所学内容而设的问题。

习题　在各章末尾列举了全章的复习题和应用题。A是以基本问题为主，而B是程度稍高一些的题目。

附录　卷末的补充问题，是更进一步的学习内容。

目　　录

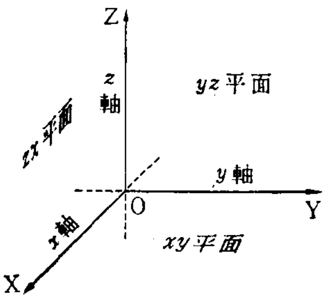
I. 空间座标和向量



第1节　空间座标

1　空间座标

已经学过直线上的点和平面上的点能用座标表示。在这里研究空间的座标问题。



空间的座标是由互相直交于一点 O 的三个座标轴 OX、OY、OZ 确定的。

它们是以 O 为原点的数轴，分别叫做x轴、y轴、z轴。点 O 叫做空间座标的原点。

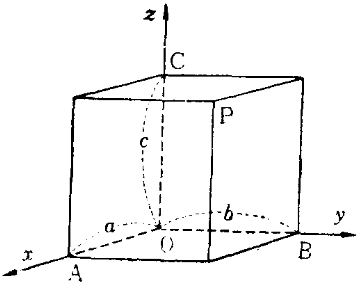
x 轴和 y 轴所确定的平面，y 轴和 z 轴所确定的平面，z 轴和 x 轴所确定的平面，分别叫做xy平面，yz平面和zx平面，统称为座标平面。

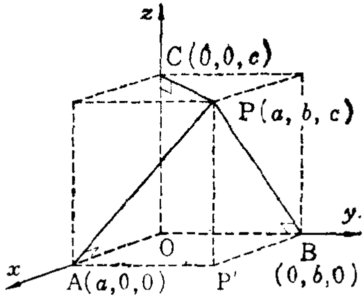
问 1　哪个座标平面与 x 轴垂直？又哪个座标轴与 zx 平面直交？

设 P 是已知的任意点。

通过点 P 与 yz 平面、zx 平面和 xy 平面平行的平面，分别与 x 轴、y 轴、z 轴相交于点 A、B、C。

点 A、B、C 在各座标轴上的座标，分别是 a、b、c





时，这三个数的组（a、b、c），叫做点P的空间座标，或简称座标。点P的座标是（a、b、c）时，用P（a、b、c）表示。

把a、b、c分别叫做点P的x座标、y座标、z座标。

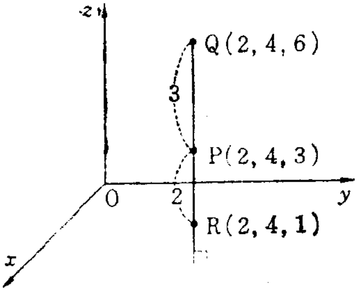
上述的点A、B、C分别是从点P向x轴、y轴、z轴所引垂线的垂足。

问 2 指出从点P（5、4、2）向xy平面所作垂线的垂足P'的座标。并指出向其他座标平面所作垂线垂足的座标。

问 3 求点P（3、7、－4）关于xy平面的对称点Q的座标。并求出它关于原点O的对称点R的座标。

平行移动与座标

如果将点P（2、4、3）平行于z轴移动3个单位得点Q，显然点Q的座标是（2、4、6）。又将点P平行于z轴移动－2个单位得点R，其座标为（2、4、1）。



问 4　试指出将点P（2、7、3）平行于x轴移动4个单位后点的座标。并说出将点P平行于y轴移动－5个单位后点的座标。

一般说来，将点P（x、y、z）平行于x轴移动α个单位后的点的座标是（$x+\alpha$、y、z）。

平行于y轴移动β个单位后的点的座标是(x、$y+\beta$、z)，平行于z轴移动γ个单位后的点的座标是（x、y、$z+\gamma$）。

这样的移动连续进行时，也是一个平行移动。把它叫做将原点移到点（α、β、γ）的平行移动。由此可知以下结论。

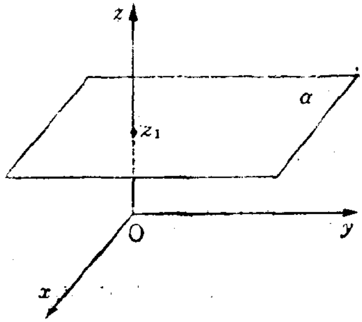
> 由于将原点O(0、0、0)移到点（α、β、γ）的平行移动，任意点（x、y、z）移到点（$x+\alpha$、$y+\beta$、$z+\gamma$）
>
> ——平行移动与座标——

问 5　由于将原点移到点（1、－1、2）的平行移动，下列各点移到什么样的点？

(2、3、4)，(－1、－3、－5)，(－1、1、－2)

问 6　如果经过平行移动，将点（4、2、－3)移到点(－1、6、8）时，点（1、1、1）移到什么样的点？

平行于座标平面的平面方程



设平行于座标平面，例如xy平面的平面为α，α与z轴相交，其交点的坐标为z_1时，则平面α上任意点的z座标都是z_1。

反之，z座标是z_1的点，都在平面α上。

这说明这个平面是集合$\{(x、y、z)\mid z=z_1\}$。

而$z=z_1$是平行于xy平面的平面α的方程。

问 7　$x=0$表示什么样的平面？

问 8　求通过点$(x_1、y_1、z_1)$，且平行于yz平面的平面方程。再求出平行于zx平面的平面方程。

内分点　外分点

例题　试证明：将连结两点$A(x_1,\ y_1,\ z_1)$、$B(x_2,\ y_2,\ z_2)$的线段AB，内分为$m:n$的点C的座标，表示如下。

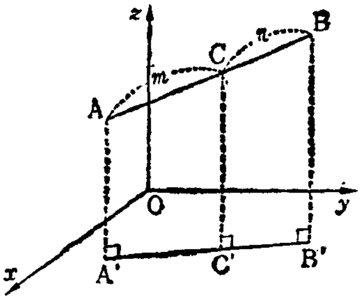
$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

〔证明〕　设点C的座标为$(x、y、z)$。

从点A、B、C向xy平面作垂线，其垂足分别是A'、B'、C'时，则其座标分别是

$(x_1、y_1、O)$，$(x_2、y_2、O)$，$(x、y、O)$。

更有下面的关系式成立：



$AC : CB = A'C' : C'B' = m : n$

由平面上内分点的公式

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$$

依同理，再考虑由点A、B、C向yz平面作垂线，可得出

$$z = \frac{mz_2 + nz_1}{m + n}$$

问 9 (1) 试就上述例题，证明：将线段AB外分为$m : n$的点D的坐标是：

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m - n}, \ \frac{my_2 - my_1}{m - n}, \ \frac{mz_2 - nz_1}{m - n}.\right)$$

（但$m \neq n$，$m > 0$，$n > 0$）

(2) 求线段AB中点的坐标。

问10 设有A（2、1、-3），B（-4、5、-1），求将线段AB内分为 3 : 1 的点C和外分为 5 : 3 的点D的坐标。

2 两点间的距离 球的方程

空间两点间的距离也和平面上的情形一样，可以用座标来表示。

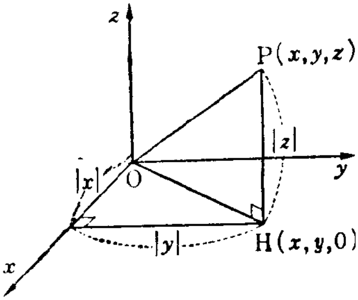
例题 1 试证明：原点O和点P (x, y, z)的距离OP，可由

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

来表示。

〔证明〕如果从点P向xy平面作垂线，其垂足为H时，点H的坐标为(x, y, O)，且$PH = |z|$。线段OH的长，由平面上距离的公式知

$$OH = \sqrt{x^2 + y^2}$$



但，因为$\triangle POH$是以$\angle H$为直角的直角三角形，所以

$$OP^2 = OH^2 + PH^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

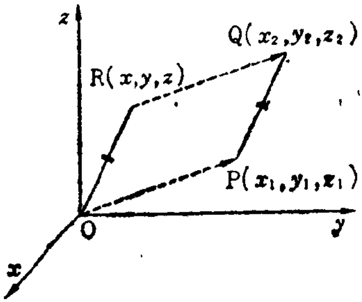
$$\therefore \quad OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

问 1　下列三点中，哪个点到原点的距离最远？

$A(2、3、5)$，$B(4、-4、2)$，$C(5、0、4)$

其次，再求任意两点$P(x_1, y_1, z_1)$，$Q(x_2, y_2, z_2)$间的距离。

由平行移动将原点O移到点P，这时，如果某一点$R(x, y, z)$移到点Q，则有下列关系式成立。



$$x + x_1 = x_2,$$

$$y + y_1 = y_2,$$

$$z + z_1 = z_2。$$

因此点R的座标是：

$$(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$