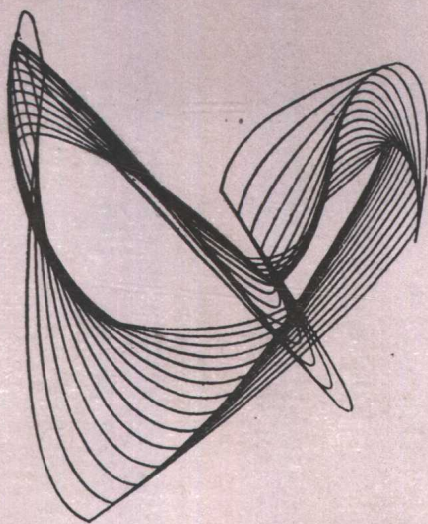


数学

ⅡB

[日]小平邦彦 编



吉林人民出版社

数 学

II B

(日本高中数学)

【日】 小 平 邦 彦 编
马忠林 高绪珏 王家彦 任永太 译

吉 林 人 民 出 版 社

数 学 IIB

日本东京书籍株式会社

1977年

数 学

IIB

(日本高中数学)

(日)小平邦彦 编

马忠林 高培国 王家彦 任永太 译

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 84页 160,000字

1979年4月第1版 1979年4月第1次印刷

印数：1—60,000册

书号：7091·1055 定价：0.75元

内部发行

前 言

这本书是为学完高中《数学 I》的学生继续学习而编写的数学教科书。

如在《数学 I》前言中所述，数学家对于凡是可能思考的事物，都可以自由地思考。所以说，数学是人类精神的自由创造物。另一方面，数学广泛地应用于各种科学领域，确实起着意想不到的作用，所以数学被看成是世间森罗万象的基础。

本书的第 I 章，学习空间坐标和向量。空间坐标是把《数学 I》中所学的平面上点的坐标，推广到空间的情形。同样地，空间的向量是把平面上的向量推广到空间的情形。

数学家本能地喜好这种推广或一般化，“一般化”已成为数学发展的一种动力。

在第 II 章学习矩阵。矩阵不过是用数字或字母排列成矩形或正方形的表。当把它称为矩阵时，就把矩阵看作是一个量，从而定义矩阵的加法、减法、乘法等运算。

矩阵不仅对数学，就是对物理学也起着基本的重要作用。在现代物理学中，各种量的原理，可以考虑不是用数而是用矩阵来表示。在这里可以看出数学是森罗万象的基础这种说法所表现的一个方面。

在此后的第Ⅲ章里，学习数列与数学归纳法。数学归纳法在数学中是最基本的论证方法，现代数学，如果没有数学归纳法，很多都是不成立的。

在第Ⅳ章学习微分法，在第Ⅴ章学习积分法。从一个函数求出表示其变化率的函数的方法，就是微分法，反之，由表示变化率的函数求原函数的方法就是积分法。

在十七世纪后半叶，由于牛顿和莱布尼兹创始的微积分的应用，到十八世纪以后，科学技术达到了惊人的进步。

一般地，从若干个不加证明的基本法则出发，根据论证构成科学的体系，叫做公理的构造。这时，那些不加证明的基本法则叫做公理。

进入本世纪以来，所有的数学都倾向于公理的构造化，作为其典型的代表就是欧几里得几何学。在第Ⅵ章学习欧几里得平面几何学公理的构造。

学习数学只是读书和背诵是不够的，还要进行独立思考、计算问题和解问题。例如，学游泳只读游泳的书是不行的，还要到水里去游才行。同样的道理，学习数学时，就必须进行独立思考。

凡 例

例 为帮助理解课文而举出的具体例子。

例题 例题是为帮助理解有关内容而提出的有代表性的题目；以框线围起来的〔解〕或〔证明〕是示范性的。

注意 *)是有助于理解的补充说明。

问 为立刻掌握刚学过的内容，以及为导入新内容而设的问题。

问题 在各节末尾，为练习该节所学内容而设的问题。

习题 在各章末尾列举了全章的复习题和应用题。 A 是以基本问题为主，而 B 是程度稍高一些的题目。

附录 卷末的补充问题，是更进一步的学习内容。

目 录

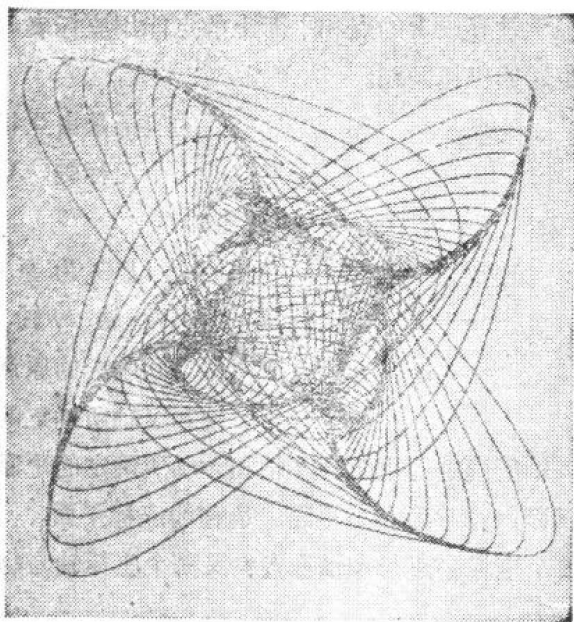
前 言	1
凡 例	3
I 空间座标和向量	1
第 1 节 空间座标	2
1 空间座标	2
2 两点间的距离 球的方程	6
问题	11
第 2 节 空间的向量	12
1 空间的向量	12
2 向量的运算	14
3 向量的分量	16
4 向量的内积	22
问题	29
第 3 节 空间的平面、直线的方程	30
1 位置向量	30
2 平面的方程	35
3 空间的直线方程	39
问题	43
习题 A 、 B	44
II 矩阵	46
第 1 节 矩阵	47
1 矩阵的意义	47

2 矩阵的加减法与实数倍	52
3 矩阵的乘法	58
4 乘法的性质	63
问题	67
第2节 逆矩阵与一次方程组	69
1 逆矩阵	69
2 一次方程组	73
问题	75
第3节 一次变换	76
1 一次变换的意义	76
2 一次变换的性质	80
3 一次变换的复合与逆变换	86
4 矩阵的运算与群	93
问题	97
习题A、B	98
研究 消去法	100
III 数列	104
第1节 有限数列	105
1 数列	105
2 等差数列	106
3 等比数列	110
4 各种数列	114
问题	121
第2节 数学归纳法、二项式定理	122
1 数学归纳法	122
2 递推式	126
3 二项式定理	130

问题	136
习题A、B	137
研究 算法	139
IV 微分和它的应用	142
第1节 微分法	142
1 极限值	142
2 导数	147
3 导函数	150
问题	156
第2节 微分法的应用	158
1 切线	158
2 函数的增、减与极大、极小	161
3 速度	173
问题	176
习题A、B	177
V 积分和它的应用	180
第1节 积分法	181
1 不定积分	181
2 定积分	185
问题	194
第2节 定积分的应用	196
1 面积	196
2 体积	203
3 直线上的运动	209
问题	212
习题A、B	213

VI 平面几何的公理构造	215
第1节 平面几何的公理	215
1 公理构造的意义	215
2 结合公理与度量公理	217
3 运动公理	224
4 图形的全等	229
5 三角形的全等	232
6 平行公理	237
问题	243
附录	244
补充问题	245
解答	251

I. 空间座标和向量



第1节 空间座标

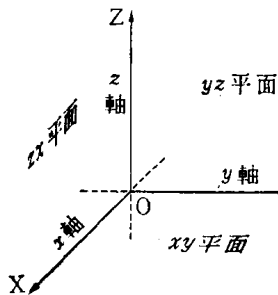
第2节 空间的向量

第3节 空间的平面、直线的方程

第1节 空间坐标

1 空间坐标

已经学过直线上的点和平面上的点能用坐标表示。在这里研究空间的坐标问题。



空间的坐标是由互相直交于一点 O 的三个坐标轴 OX 、 OY 、 OZ 确定的。

它们是以 O 为原点的数轴，分别叫做 x 轴、 y 轴、 z 轴。点 O 叫做空间坐标的原点。

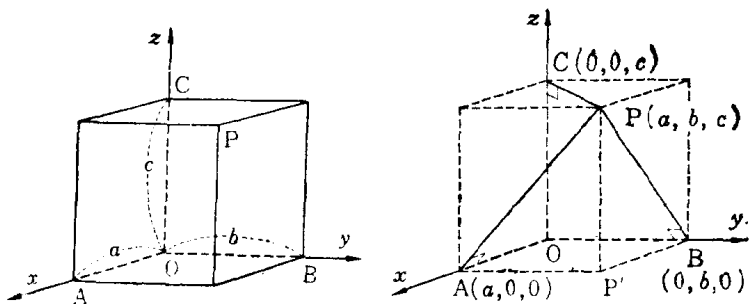
x 轴和 y 轴所确定的平面， y 轴和 z 轴所确定的平面， z 轴和 x 轴所确定的平面，分别叫做 xy 平面， yz 平面和 zx 平面，统称为坐标平面。

问1 哪个坐标平面与 x 轴垂直？又哪个坐标轴与 zx 平面直交？

设 P 是已知的任意点。

通过点 P 与 yz 平面、 zx 平面和 xy 平面平行的平面，分别与 x 轴、 y 轴、 z 轴相交于点 A 、 B 、 C 。

点 A 、 B 、 C 在各坐标轴上的坐标，分别是 a 、 b 、 c



时，这三个数的组 (a, b, c) ，叫做点 P 的空间坐标，或简称坐标。点 P 的坐标是 (a, b, c) 时，用 $P(a, b, c)$ 表示。

把 a, b, c 分别叫做点 P 的 x 坐标、 y 坐标、 z 坐标。

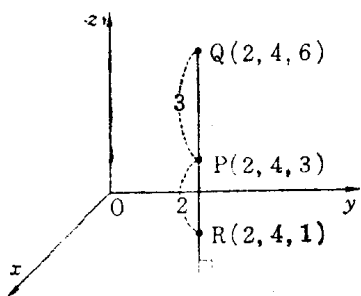
上述的点 A, B, C 分别是点 P 向 x 轴、 y 轴、 z 轴所引垂线的垂足。

问 2 指出从点 $P(5, 4, 2)$ 向 xy 平面所作垂线的垂足 P' 的坐标。并指出向其他坐标平面所作垂线垂足的坐标。

问 3 求点 $P(3, 7, -4)$ 关于 xy 平面的对称点 Q 的坐标。并求出它关于原点 O 的对称点 R 的坐标。

平行移动与坐标

如果将点 $P(2, 4, 3)$ 平行于 z 轴移动 3 个单位得点 Q ，显然点 Q 的坐标是 $(2, 4, 6)$ 。又将点 P 平行于 z 轴移动 -2 个单位得点 R ，其坐标为 $(2, 4, 1)$ 。



问 4 试指出将点 $P(2, 7, 3)$ 平行于 x 轴移动 4 个单位后点的座标。并说出将点 P 平行于 y 轴移动 - 5 个单位后点的座标。

一般说来, 将点 $P(x, y, z)$ 平行于 x 轴移动 a 个单位后的点的座标是 $(x + a, y, z)$ 。

平行于 y 轴移动 β 个单位后的点的座标是 $(x, y + \beta, z)$, 平行于 z 轴移动 γ 个单位后的点的座标是 $(x, y, z + \gamma)$ 。

这样的移动连续进行时, 也是一个平行移动。把它叫做将原点移到点 (α, β, γ) 的平行移动。由此可知以下结论。

由于将原点 $O(0, 0, 0)$ 移到点 (α, β, γ) 的平行移动, 任意点 (x, y, z) 移到点 $(x + \alpha, y + \beta, z + \gamma)$

——平行移动与座标——

问 5 由于将原点移到点 $(1, -1, 2)$ 的平行移动, 下列各点移到什么样的点?

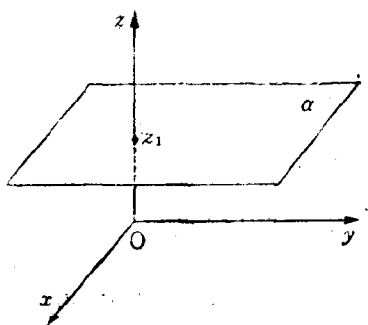
答 $(2, 3, -4), (-1, -3, -5), (-1, 1, -2)$

问 6 如果经过平行移动, 将点 $(4, 2, -3)$ 移到点 $(-1, 6, 8)$ 时, 点 $(1, 1, 1)$ 移到什么样的点?

平行于坐标平面的平面

方程

设平行于坐标平面，例如 xy 平面的平面为 α ， α 与 z 轴相交，其交点的坐标为 z_1 时，则平面 α 上任意点的 z 坐标都是 z_1 。



反之， z 坐标是 z_1 的点，都在平面 α 上。

这说明这个平面是集合 $\{(x, y, z) \mid z = z_1\}$ 。

而 $z = z_1$ 是平行于 xy 平面的平面 α 的方程。

问 7 $x = 0$ 表示什么样的平面？

问 8 求通过点 (x_1, y_1, z_1) ，且平行于 yz 平面的平面方程。再求出平行于 zx 平面的平面方程。

内分点 外分点

例题 试证明：将连结两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 、 $B(x_2, y_2, z_2)$ 的线段 AB ，内分为 $m:n$ 的点 C 的坐标，表示如下。

$$\left(\frac{mx_2 + ny_1}{m+n}, \frac{my_2 + nz_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nx_1}{m+n} \right)$$

〔证明〕 设点 C 的坐标为 (x, y, z) 。

从点 A 、 B 、 C 向 xy 平面作垂线，其垂足分别是 A' 、 B' 、 C' 时，则其坐标分别是

$$(x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, 0), (x, y, 0).$$

更有下面的关系式成立：

$$AC : CB = A'C' :$$

$$C'B' = m : n$$

由平面上内分点的公式

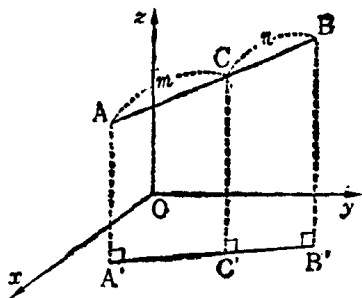
$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$$

依同理，再考虑由点

A 、 B 、 C 向 yz 平面作垂线，可得出

$$z = \frac{mz_2 + nz_1}{m + n}$$



问 9 (1) 试就上述例题，证明：将线段 AB 外分为 $m : n$ 的点 D 的坐标是：

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m - n}, \frac{my_2 - ny_1}{m - n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m - n} \right)$$

(但 $m \neq n$, $m > 0$, $n > 0$)

(2) 求线段 AB 中点的坐标。

问10 设有 $A(2, 1, -3)$, $B(-4, 5, -1)$, 求将线段 AB 内分为 $3 : 1$ 的点 C 和外分为 $5 : 3$ 的点 D 的坐标。

2 两点间的距离 球的方程

空间两点间的距离也和平面上的情形一样，可以用坐标来表示。

例题 1 试证明：原点 O 和点 $P(x, y, z)$ 的距离 OP ，可由

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

来表示。

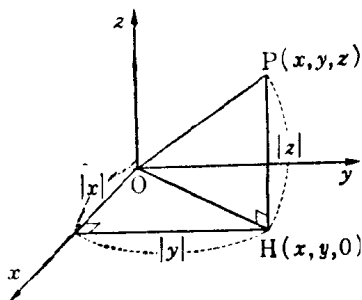
〔证明〕 如果从点 P 向 xy 平面作垂线，其垂足为 H 时，点 H 的坐标为 $(x, y, 0)$ ，且 $PH = |z|$ 。线段 OH 的长，由平面上距离的公式知

$$OH = \sqrt{x^2 + y^2}$$

但，因为 $\triangle POH$ 是以 $\angle H$ 为直角的直角三角形，所以

$$OP^2 = OH^2 + PH^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\therefore OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



问 1 下列三点中，哪个点到原点的距离最远？

$A(2, 3, 5), B(4, -4, 2), C(5, 0, 4)$

其次，再求任意两点 $P(x_1, y_1, z_1), Q(x_2, y_2, z_2)$ 间的距离。

由平行移动将原点 O 移到点 P ，这时，如果某一点 $R(x, y, z)$ 移到点 Q ，则有下列关系式成立。

$$x + x_1 = x_2,$$

$$y + y_1 = y_2,$$

$$z + z_1 = z_2.$$

因此点 R 的坐标是：

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

