成人中等数学学习手册

北京市成人教育学院编

北 京 出 版 社

成人中等数学学习手册

北京市成人教育学院编

*

北 京 出 版 社 出 版

（北京北三环中路6号）

新华书店北京发行所发行

北 京 印 刷 一 厂 印 刷

*

850×1168毫米 32开本 14.5印张 373,000字

1987年8月第1版 1987年8月第1次印刷

印数 1—9,000

ISBN 7-200-00277-1/G·58

书号：7071·1161 定价：3.35元

前　　言

为了帮助读者学习中等数学知识，掌握中等数学的基本思想和方法，提高综合运用数学知识的解题能力，编写了《成人中等数学学习手册》一书。

本书共分四部分。第一部分是基础知识，按照中学数学的知识结构，对数学的概念，定义、定理、法则和公式，作了系统全面和简明的介绍，着重说明知识的区别联系。还对某些数学内容和方法作了必要的补充，目的在于加深读者对于中等数学基础知识的理解。第二部分是常用数学方法，这一部分目的就是为了帮助读者探索解题的一般途径，掌握解题的基本思路，学会解题的常用方法。第三部分是综合应用举例，这一部分力求加强数学内容各分支的横向联系，掌握一些解题技巧，培养读者的智力和技能，属于中学数学的提高部分。目的是为准备升入大学或继续深造的读者学习。第四部分是中等数学用表，以便学习中使用。

本书条目清楚，浅显易懂，备忘查阅，简便易行。可作为青年职工、农民各类成人中学、中等专业学校学员学习数学的工具书，也可供各类中学、中专、业余学校的教师参考。

本书由北京成人教育学院张世魁主编，杨文智、万福、段云鑫、沙作钧编著。

本书出版后，希望广大读者对它提出宝贵意见，以便我们修改订正。

一九八六年三月

目　录

第一部分　基础知识

第二部分　常用数学方法

第三部分　综合应用举例

第四部分　中等数学用表

第一部分　基础知识

代　数

一　集　合

（一）有关概念

1．**集合**："集合"是数学中原始的、不加定义的概念.把具有某种属性的一些对象看作一个整体，就形成了一个集合.

集合通常用大写字母A、B、M、N、X、Y等来表示.

集合可以简称"集".

2．**集合的元素**：组成集合的各个对象叫做这个集合的元素.

对于一个给定的集合，集合里的元素必须是确定的.也就是说，我们可以判断任何对象是不是这个集合中的元素.

集合中的元素通常用小写字母a、b、c、x、y等表示.

3．**属于和不属于**：若a是集合A的元素，则元素a属于集合A，记作$a\in A$，读作"a属于A".若b不是集合A的元素，则元素b不属于集合A，记作$b\overline{\in}A$或$b\notin A$，读作"b不属于A".

4．**全集**：包含全部元素的原集合叫做全集，记作I.

5．**空集**：不包含任何元素的集合叫做空集，记作ϕ.

（二）集合的表示方法

1．**列举法**：把集合里的元素一一列举出来，写在大括号里用来表示集合的方法，叫做列举法.这一表示法一般适用于当集合的元素是有限个时.例如，由a、b、c、d、e组成的集合，可以记作$\{a, b, c, d, e\}$.有时，集合中的元素虽有无限个，但可以逐个地去数，也可以用列举法.例如，全体自然数组成的集

合，可以记作$\{1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots\}$.

2．**描述法**：把描述集合里元素的公共属性或表示集合里元素的规律，写在大括号内用来表示集合的方法，叫做描述法.例如，全体偶数组成的集合，可以记作{所有偶数}或$\{x|x=2n$，n是整数}.

注意：（1）当集合里只有一个元素a时，这个集合称为单元素集合，可以记作$\{a\}$．但$\{a\}$与a不同，前者是一个集合，后者是一个元素；

（2）有的书上表示集合时用竖线或分号代替冒号，如$\{x|x=2n$，n是整数}或$\{x$：$x=2n$，n是整数}.

（三）集合之间的关系

1．**包含关系**：若集合A中的每一个元素都是集合B的元素，则称“集合A包含于集合B”或“集合B包含集合A”，记作$A\subseteq B$或$B\supseteq A$.

2．**子集**：如果集合$A\subseteq B$，则称集合A为集合B的子集.

显然有：

任何一个集合是它本身的子集．即$A\subseteq A$.

任何一个集合是全集的子集．即$A\subseteq I$.

空集是任何集合的子集．即$\phi\subseteq A$.

3．**相等的集合**：对于集合A、B，若$A\supseteq B$，同时$A\subseteq B$，则集合A、B叫做相等的集合，记作$A=B$.例如，$\{1,2,3\}=\{3,2,1\}$.（注意，集合中的元素，没有顺序性）.

4．**真子集**：若A是B的子集合，且$A\neq B$，则A叫做B的真子集，记作$A\subset B$或$B\supset A$.

关于集合的一些属性，可以直观地用图形来说明，这种图形称为韦恩（Venn）图．真子集的图示如图1—1.

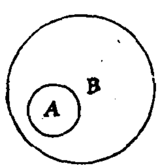

图 1-1

例如，集合$\{a,b,c\}$的所有子集有8个.

即 ϕ，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{b,c\}$，$\{a,c\}$，$\{a,b,c\}$.

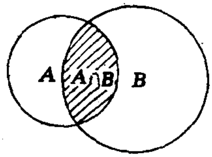

图 1-2

其中，前 7 个是真子集.

（四）集合的运算

1．交集：两个集合A、B的公共元素所组成的集合，叫做A与B的交集．记作$A\cap B$（读作A交B）.可用图 1—2 说明.

显然有：

$A\cap I=A$，$A\cap\phi=\phi$，$A\cap A=A$.

2．并集：由所有属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合，叫做A与B的并集．记作$A\cup B$（读作A并B）.可用图 1—3 说明.

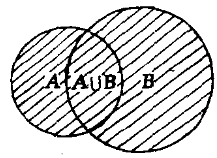

图 1-3

显然有：

$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup I=I$.

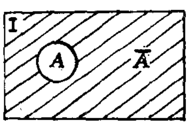

图 1-4

3．补集：从全集I中去掉集合A的全部元素后剩下的元素组成的集合叫做A的补集，记作$\overline{A}$.可用图1-4表示.

显然有：

$A\cup\overline{A}=I$，$A\cap\overline{A}=\phi$，$\overline{\overline{A}}=A$.

4．运算法则：（1）**交换法则**：$A\cap B=B\cap A$

$A\cup B=B\cup A$；

（2）**结合法则**：$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

（3）**分配法则**：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

（4）**摩根法则**：$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

（五）集合的分类

1．一一对应：具有下面三个条件的对应叫做集合A、B之间

的一一对应.

（1）对于集合A中的每一个元素，在集合B中有且仅有一个元素与之对应；

（2）对于集合A中的两个不同的元素在集合B中永远有两个不同的元素与之对应；

（3）集合B中的每一个元素至少是集合A中一个元素的对应元素.

2. **等价的集合**：对于两个集合A和B，若存在对应法则f，使A和B间建立一一对应的关系，则A和B叫做等价的集合.

例如，对于自然数集合$\{1,2,3,\cdots, n, \cdots\}$与正偶数集合$\{2,4,6,\cdots, 2n,\cdots\}$，如果令$f$：$n \to 2n$，那么就在这两个集合之间建立了一一对应关系.因此，我们说这两个集合是等价的集合.

若在法则f下A、B两个集合等价，可以记作$A \sim B$，此时称集合A、B有相同的浓度（或势）.

3. **有穷集与无穷集**：与自然数列段（小于或等于某一自然数n的所有自然数的集合）等价的集合称为有穷集.或者说，非空的有穷集是其元素可以经过有限步数出来的集合，其中的每一个元素可以用1到某一个自然数n中的自然数进行编号.空集也属于有穷集.

例如，26个英文字母组成的集合是有穷集.

不是有穷集的集合称为无穷集.

例如，有理数集与实数集都是无穷集.

4. **可数集与不可数集**：如果把各种无穷集与自然数集进行比较，无穷集又可以分成两类：

与自然数集等价的集合叫做可数集，不是可数集的无穷集叫做不可数集.

例如，正偶数集是可数集，实数集是不可数集.

（六）数集

1. **数集**：由数构成的集合叫做数集.

（数集详见本页“二　数及其运算”）

2．**数环**：数集R如果满足下列条件，叫做一个数环．

（1）R中至少含有一个数；

（2）在R中加法、减法、乘法可以施行．即若a、b属于R，则$a+b, a-b, ab$也属于R．

显然，整数集、有理数集、实数集和复数集都是数环．只有一个数0的集合$\{0\}$也是数环，叫做零环．

3．**数域**：若数环P满足下列条件时，叫做一个数域．

（1）P中至少含有一个不等于零的数；

（2）若a、b属于P，且$b\neq o$，则$\frac{a}{b}$也属于P．

显然，有理数集，实数集、复数集都是数域．

二　数及其运算

（一）自然数（正整数）集

1．**自然数的概念**

表示物体个数或事物次序的数叫做自然数．

全体自然数组成的集合叫做自然数集．自然数集一般用N表示．

2．**性质**：（1）全体自然数集合中有一个最小数1，但无最大数；

（2）任何一个自然数都必有后继数（自然数n的后继数为$n+1$），即不存在自然数m满足$n+1>m>n$；

（3）在自然数集合中永远可以施行加、乘运算；

（4）若有一批自然数都不大于一个给定的自然数，则其中一定有一个最大的；

（5）一个有上界的自然数集合不能和它的真子集建立一一对应关系．而任一个无限的自然数集合都有可能和它的无限真子集建立一一对应关系．

3. 有关知识　（1）奇数与偶数：一切能被2整除的数叫做偶数（一般用$2k$表示，k为自然数，k也可以推广到整数）；不能被2整除的数叫做奇数（一般用$2k-1$表示，k为自然数，k也可以推广到整数）；

（2）质数与合数：在大于1的自然数中，只能被1和它本身整除的数叫做质数（或素数）．例如，2，3，5，7，11，…；不仅能被1和它本身整除，而且还能被其它自然数整除的自然数，叫做合数．例如，4，6，8，9，10，…．1既不是质数也不是合数；

（3）质数判别法：要判断某一个大于1的自然数n是不是质数，只要用不大于$\sqrt{n}$的所有质数逐个去试除n，如果不能找到整除n的质数，那么n就是质数．例如，要判断91是不是质数，只要用不大于$\sqrt{91}$的质数，即2，3，5，7去试除91，因为它们都不能整除91，所以91是质数；

（4）质因数分解：自然数的某个因数是质数时，这个因数就叫做该自然数的质因数．任何一个大于1的自然数n总可以表示成为一个质数的幂或几个质数幂的连乘积．例如，$2=2^1$，$18=2\times3^2$，$720=2^4\times3^2\times5$；

（5）算术基本定理：任何大于1的自然数都可以分解成若干个质因数的连乘积，并且，如果不计各个质因数的次序，这种分解还是唯一的．这就是大于1的自然数的唯一分解定理，又叫做算术基本定理．

自然数n的标准分解式为

$$n=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot p_3^{k_3}\cdot\cdots\cdots p_s^{k_s},$$

其中，p_1、p_2、p_3、…p_s是不同的质因数，k_1、k_2、k_3、…k_s是自然数．

这个分解式是唯一的．

例如，$2520=2^3\times3^2\times5\times7$，此分解式是唯一的；

（6）自然数整除性的某些判别法：

① 被 2 整除的判别法：如果某自然数的最后一位数字是偶数或零，那么它就能被 2 整除.

② 被 3 整除的判别法：如果某自然数的各位数字之和能被 3 整除，那么它就能被 3 整除.例如，3825，因为 $3+8+2+5=18$，而18能被 3 整除，所以3825能被 3 整除.

③ 被 5 整除的判别法：如果某自然数的最后一位数字是0或5，那么它就能被 5 整除，例如，120，375都能被 5 整除.

④ 被11整除的判别法：如果某自然数的各偶数位上的数字和与各奇数位上的数字和相等或相差11的倍数,那么它能被 11 整除. 例如，23782，因为$2+7+2=3+8$，所以23782能被11整除，又如，19272，因为$(9+7)-(1+2+2)=11$，所以19272 能被 11 整除；

（7）最大公约数：一个自然数同时是几个自然数的因数时，这个自然数就叫做这几个自然数的公约数.

对于给定的几个自然数来说，它们的公约数总是有限个，其中最大的一个叫做这几个自然数的最大公约数.

求若干个数的最大公约数的步骤是：

① 写出这几个数的标准分解式；

② 写出这几个数的标准分解式中所有公共的质因数；

③ 将这些质因数中每一个都取以该质因数在原来各数的标准分解式中所具有的最低次幂,这样所得的质因数的幂的积就是原来各数的最大公约数.

例如，求75600和38808的最大公约数.

$\because\quad 75600=2^4\cdot3^3\cdot5^2\cdot7,$

$\quad\quad 38808=2^3\cdot3^2\cdot7^2\cdot11,$

$\therefore\quad$ 75600、38808的最大公约数是

$\quad\quad 2^3\cdot3^2\cdot7=504;$

（8）最小公倍数：一个自然数同时是几个自然数的倍数时，这个自然数就叫做这几个自然数的公倍数.

对于给定的几个自然数来说，它们的公倍数总是无限多的，其中最小的一个叫做这几个自然数的最小公倍数.

求若干个数的最小公倍数的步骤是：

① 写出这几个数的标准分解式；

② 列出这几个数的标准分解式中的一切质因数；

③ 将这些质因数都取以该质因数在原来各数的标准分解式中所具有的最高次幂，所得的各质因数的幂的积，也就是原来各数的最小公倍数.

例如，求75600和38808的最小公倍数.

$\because\quad 75600=2^4\cdot3^3\cdot5^2\cdot7,$

$\qquad 38808=2^3\cdot3^2\cdot7^2\cdot11,$

$\therefore$ 75600、38808的最小公倍数是

$2^4\cdot3^3\cdot5^2\cdot7^2\cdot11=5821200;$

（9）用辗转相除法求两数的最大公约数

用辗转相除法求两个正整数a、b（$a>b$）的最大公约数的一般步骤是：

先用b去除a，商q_1，余r_1，得

$$a=bq_1+r_1,$$

再用r_1去除b，商q_2，余r_2，得

$$b=r_1q_2+r_2,$$

照此步骤作下去，依次得

$$r_1=r_2q_3+r_3,$$

$$r_2=r_3q_4+r_4,$$

$$\cdots\cdots$$

经过$n+1$次辗转相除后，有$r_{n+1}=0$，但$r_n\neq0$，则r_n就是a、b最大公约数.

由于这种求两数最大公约数的方法不需要先对两数分解质因数，所以对两个较大而难分解质因数的数，求它们的最大公约数时，用辗转相除法比较方便.

例如，求8127和151704的最大公约数.

由于

	151704	8127	18
	146286	5418	
1	5418	2709	2
	5418		
	0	2709	

∴ 8127和151704的最大公约数是2709；

（10）互质数：如果两个自然数的最大公约数是1，这两个自然数就叫做互质数（或互素数）.

例如，3与8是互质数，15与22是互质数.

对于互质的两个自然数a、b来说，它们的最大公约数是1，最小公倍数是$a \cdot b$.

（二）整数集

1．整数的概念

正整数、负整数和零统称整数.

整数集是对自然数集中添加了新的对象——零和负整数所得到的集合.整数集一般用Z（或J）表示.

2．性质：

（1）有序性：任意两个整数都可以比较它们的大小；

（2）全体整数集合中既无最小数，也无最大数；

（3）在全体整数集合中永远可以施行加、减、乘运算，所以全体整数集合构成一个数环.

（三）有理数集

1．有理数的概念

整数和分数统称有理数.

有理数集是整数集中增添了新的对象——全体分数所得到的集合.有理数集一般用Q（或R_0）表示.

因为整数n可以看成分母为1的分数$\frac{n}{1}$，因此，有理数的一般形式为$\frac{q}{p}$（其中$p\neq0$，且p、q为互质的整数）．

每个有理数都可以表示成有限小数和无限循环小数．

2．性质：

（1）有序性：任何两个有理数都可以比较它们的大小；

（2）稠密性：对任意的两个不同的有理数a、b，它们之间至少存在一个有理数c，（例如，$c=\frac{a+b}{2}$），因而就存在无穷多个有理数，若把数轴上表示有理数的点叫有理点，则有理点在数轴上是处处稠密的；

（3）间断性：任意两个不同的有理数之间必有非有理数存在，因此，有理数不能与数轴上的点建立一一对应关系；

（4）可数性：全体有理数集可构成一个可数集；

（5）全体有理数对算术运算是自封的，即在有理数集合内，永远可以施行加、减、乘、除（除数不为零）四种运算．所以有理数构成一个数域．

例　证明：任意两个有理数的和、差、积、商仍是有理数．

证：设两个有理数是$\frac{p_1}{q_1}$和$\frac{p_2}{q_2}$．其中p_1、q_1互质，p_2、q_2互质，q_1、$q_2\neq0$．

则
$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1q_2+p_2q_1}{q_1q_2};$$
$$\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1q_2-p_2q_1}{q_1q_2};$$
$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1p_2}{q_1q_2};$$