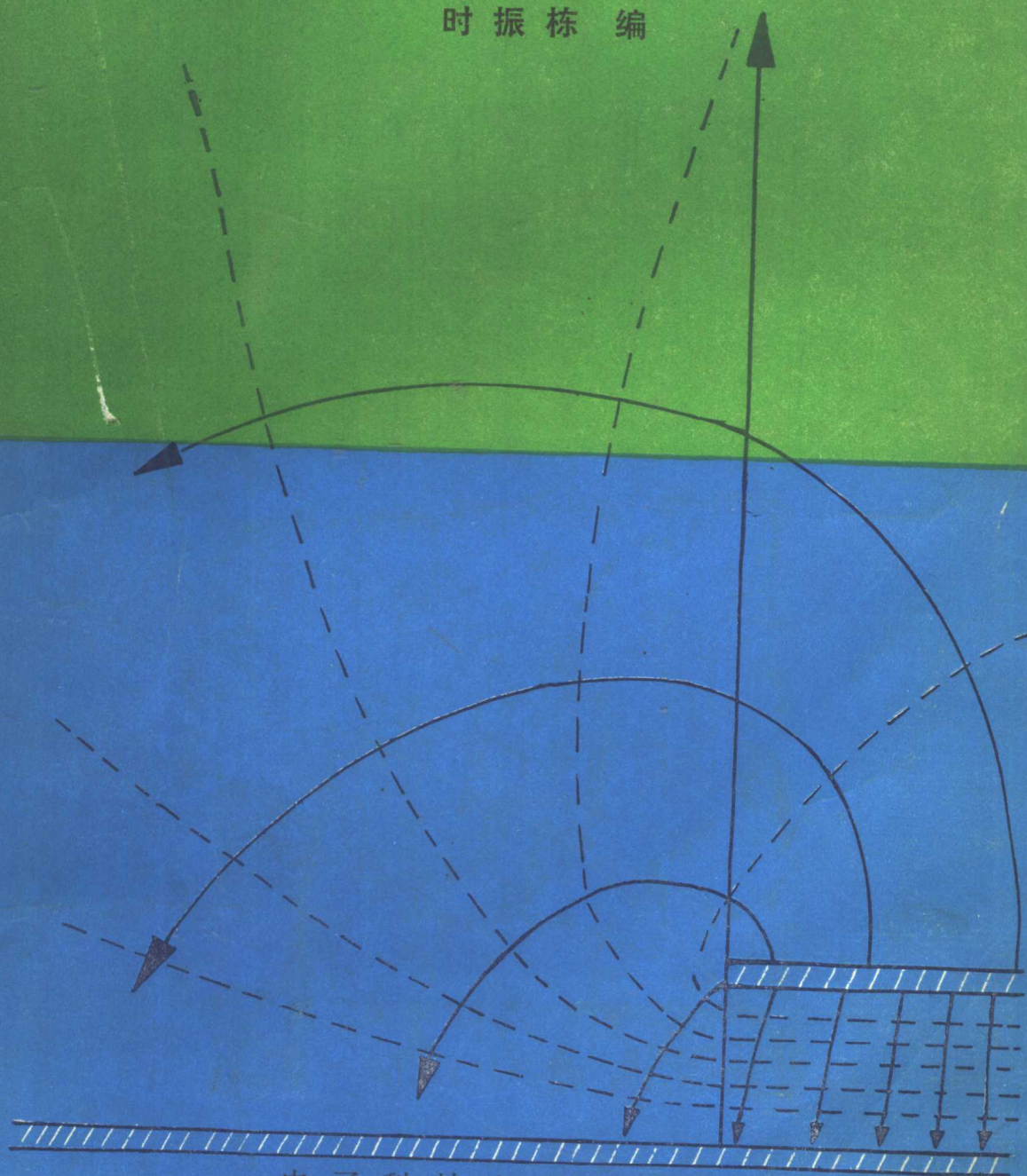


高等学校教学用书

电磁场工程数学

时振栋 编



电子科技大学出版社

高等学校教学用书

电磁场工程数学

时振栋 编

电子科技大学出版社

· 1990 ·

内 容 提 要

本书是为理工科高校学生编写的专业基础课教材, 主要介绍电磁场工程应用中的基本数学知识。内容包括: 场论的基本概念和运算方法; 直角坐标、圆柱坐标和球坐标下解拉普拉斯方程的分离变量法, 并适时地引入与这个解法有关的唯一性定理、叠加原理、边界条件、特殊函数和特征值; 泊松方程和波动方程的分离变量解; 以及静场的复变函数解法等。

全书有较多的工程应用实例, 各章末尾有相当数量的习题以供教学选用。

本书可以作为理工科学学生的教材或教学参考书, 也可供工程技术人员阅读。特别对于电磁场理论的初学者更是一本适当的基础读物。

高等学校教学用书

电 磁 场 工 程 数 学

时振栋 编

✱

电子科技大学出版社出版

(中国成都市建设北路二段四号)

中国科学院光电所印刷厂印刷

四川省新华书店发行

✱

开本 787×1092 1/16 印张 9.625 字数 230 千字

版次 1990 年 7 月第一版 印次 1990 年 7 月第一次印刷

印数 1—2200 册

中国标准书号 ISBN 7-81016-252-7/TN·72

(15452·87) 定价: 3.60 元

前 言

本书主要介绍电磁场工程应用中的基本数学知识。它以高等数学、数学物理方法和大学物理等课程为基础。本书将这些基础知识与电磁场理论和电磁场工程等课程紧密地联系起来,使具有基础数学和物理知识的读者,在学过本书后能顺利地学习和应用电磁场理论的知识,开拓思路,增强解决实际问题的能力。因此,将数学知识应用于解决电磁场问题是本书试图突出的主要方面。

矢量的微分运算,作为电磁场理论的基础,将在本书第一章作详细介绍,其中也包含了常用的运算公式。由第一章自然引伸的是,解决电磁场问题最终可归结为拉普拉斯方程、泊松方程和波动方程的求解。这正是本书后面几章的主要内容。对这些方程的求解方法,本书着重介绍分离变量法和复变函数法。所以在本书第二章至第四章分别介绍在直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系下解拉普拉斯方程的分离变量法,同时适时地引入唯一性定理、叠加原理、边界条件、特殊函数和特征值问题等。实际上,这些知识不仅对这三章有用,甚至对第五章——用分离变量法解泊松方程和波动方程也是重要的。第六章和第七章介绍复电位和保角变换在电磁场问题中的应用。与前几章一样,在这两章也系统地列举了许多典型的应用实例。通过这些原理、方法和应用实例的介绍,能对读者在理解和解决电磁场工程的具体问题方面有所帮助。

全书以51学时的教学授课量编写。每章末尾有提要 and 适量的习题以供选用。

本书自1978年第一次编写后,经电子科技大学(原成都电讯工程学院)电磁场与微波技术专业的历届学生使用。在使用过程中,根据实际教学情况已作过两次改编。这次重编后曾请应用数学系钟碧华副教授仔细校核,并请电磁场工程系符果行副教授认真审阅。借此机会,向他们表示衷心感谢。

编 者

1990年2月

目 录

第一章 场论基础	(1)
§ 1.1 常用坐标系.....	(2)
§ 1.2 方向导数与梯度.....	(5)
§ 1.3 散度和旋度.....	(6)
§ 1.4 矢量场的分类.....	(11)
§ 1.5 标量位.....	(12)
§ 1.6 拉普拉斯方程和泊松方程.....	(14)
§ 1.7 矢量位.....	(16)
§ 1.8 亥姆霍兹法则.....	(17)
§ 1.9 ∇ 算符.....	(18)
§ 1.10 格林定理.....	(19)
§ 1.11 麦克斯韦方程组.....	(20)
§ 1.12 曲线坐标下的矢量微分.....	(21)
§ 1.13 梯度、散度和旋度的统一表示.....	(26)
§ 1.14 并矢和并矢代数.....	(27)
本章提要.....	(31)
习题一.....	(32)
第二章 直角坐标下解拉普拉斯方程的分离变量法	(34)
§ 2.1 直角坐标下的变量分离.....	(34)
§ 2.2 解的唯一性.....	(37)
§ 2.3 叠加原理.....	(38)
§ 2.4 三维问题.....	(42)
本章提要.....	(44)
习题二.....	(44)
第三章 圆柱坐标下解拉普拉斯方程的分离变量法	(46)
§ 3.1 贝塞耳方程.....	(46)
§ 3.2 贝塞耳函数.....	(47)
§ 3.3 函数的正交性.....	(50)
§ 3.4 特征值问题.....	(52)
§ 3.5 平面问题的解.....	(56)
§ 3.6 圆柱坐标下解拉普拉斯方程的分离变量法的应用举例.....	(58)
本章提要.....	(63)
习题三.....	(64)

第四章 球坐标下解拉普拉斯方程的分离变量法	(65)
§ 4.1 勒让德方程	(65)
§ 4.2 勒让德函数	(66)
§ 4.3 球坐标下解拉普拉斯方程的分离变量法应用举例	(69)
§ 4.4 三维问题	(74)
本章提要	(75)
习题四	(76)
第五章 泊松方程和波动方程的解	(78)
§ 5.1 泊松方程的解	(78)
§ 5.2 波动方程的解	(81)
本章提要	(86)
习题五	(86)
第六章 复变函数与复电位	(87)
§ 6.1 复变函数的基本性质	(87)
§ 6.2 解析函数	(88)
§ 6.3 一些初等解析函数	(92)
§ 6.4 复变函数的积分和幂级数表示	(95)
§ 6.5 平面静电场的复电位	(99)
§ 6.6 关于复电位的几个实例	(103)
本章提要	(109)
习题六	(110)
第七章 保角变换的应用	(112)
§ 7.1 解析变换的特性	(112)
§ 7.2 一些初等函数构成的变换	(113)
§ 7.3 用保角变换法解平面静电场问题的主要任务	(116)
§ 7.4 幂函数和根式函数	(117)
§ 7.5 指数函数和对数函数	(119)
§ 7.6 分式线性变换	(120)
§ 7.7 正弦函数和余弦函数	(124)
§ 7.8 正切变换	(126)
§ 7.9 双曲余弦和反双曲余弦	(127)
§ 7.10 儒可夫斯基变换	(128)
§ 7.11 施瓦兹-克利斯托弗尔变换	(132)
本章提要	(142)
习题七	(142)
附录 矢量关系式	(144)
主要参考书目	(147)

第一章 场论基础

在研究自然现象时,场论是一种很有用的方法。设想在空间区域 V 中每一点与一个或几个物理量相联系,例如温度、压力、重力、电场强度、磁场强度等,就可以称它们是温度场、压力场、重力场、电场和磁场。关于这一课题的数学理论称为场论。

场论是十九世纪发展起来的。当时,一些伟大的数学物理学家,如高斯、拉普拉斯、库仑和安培对此作出了很大贡献。一个世纪以来,这方面的理论已经成为数学物理方面的一个重要分支,它的工程应用也愈来愈广泛。

场论与电路理论形成对比,后者经常假定问题只涉及一维变量,而场论则大多数情况下包含二维和三维变量。场论和电路理论又互为补充,它们都很有用。场论的应用大致可以分为这几个方面:高压工程、恒磁学、静电学、热传导、流体力学、电动力学、弹性力学、声波、电磁波等。可以看出,它所涉及的工程应用范围非常广泛。

研究物理过程时,总是首先选定某个显示过程特征的物理量作为研究对象,然后研究这些物理量随空间和时间的一般变化规律,也就是找出这些物理量在各个时刻各个位置所取值之间的联系。如果这些物理量是连续的,首先要找出这些量与其邻域和邻近时刻所取值之间的关系,也就是找出它们的微分关系。更确切地说,首先要找出描述这些物理过程的偏微分方程,用它来描述物理过程的共同特征。

应用场论的许多物理过程可以统一在下列包含拉普拉斯算符的微分方程中:

(1) 拉普拉斯方程 (Laplace's equation) $\nabla^2 \Phi = 0$

(2) 泊松方程 (Poisson's equation) $\nabla^2 \Phi = -K$

(3) 扩散方程 (The diffusion equation) $\nabla^2 \Phi = \frac{1}{h^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$

(4) 波动方程 (The wave equation) $\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$

在电类问题中, Φ 表示电位;在讨论磁类问题时, Φ 就是磁位。在泊松方程中, K 是一个已知的常数或空间坐标的函数,符号 h^2 和 c^2 是表示媒质特性的参数。

拉普拉斯方程用于静电场、恒定磁场、稳定电流场等;泊松方程可应用于存在空间电荷的电子管内的电磁场问题;扩散方程中包含对时间的一阶导数,它主要应用于热转换的计算;波动方程则含有对时间的二阶导数,它主要用于声波和电磁波。

这些方程中最简单的是拉普拉斯方程,已有很多方法求解它。这些方法经常也用来解其它的三类方程,因此我们将首先从拉普拉斯方程入手。解拉普拉斯方程的方法除图解法和实验法之外,从数学角度来讲可分成:分离变量法,复变函数法,格林函数法以及各种数值近似法等等。本书着重介绍前两种方法。

如果泛泛地研究某个物理过程是没有多大意义的。对具体问题的研究,除要知道一般的物理规律外,还要求出系统的边界处于一定物理条件下和系统的初始状态为已知时,该物理量的发展规律。也就是说,分析一个具体问题时还取决于定解条件。因此,对具体问题的求解

方法可以先由偏微分方程求出该问题的通解，然后按定解条件得出特解。本书将主要采用这种方法。此外，也可以根据定解条件先试探一些特解，只要它们既满足方程又满足定解条件，按解的唯一性定理，它们就是正确的解。

物理学和工程应用中的许多问题涉及在一个空间区域中对物理量的分布和变化进行描述。有时只需给出这个物理量的大小，称之为标量场，例如室内温度分布 $T(x, y, z)$ 。若需同时给出这个物理量的大小和方向才能完全描述它，则称这个物理量为矢量场，例如一定区域内的电场强度 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ 等。

由于在空间中一个矢量是由三个分量组成的，每个分量又都是三个坐标的函数，所以矢量计算通常较标量计算复杂一些。在可能的情况下，常将矢量转变成标量处理。方法之一是把矢量在适当的坐标系中沿坐标轴方向投影。这样，一个矢量就分成了三个标量。

§ 1.1 常用坐标系

坐标系是相对于参考原点确定空间位置的一个常用方法。当然，任何问题的解答与所选用的坐标系无关，但根据物理问题边界的形状适当地选择坐标系，往往可使计算简化。为此，我们先复习在电磁场问题中常用的直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。

一、直角坐标系

直角坐标系由三个相互垂直的平面的交线确定，如图 1-1 所示。由于直角坐标系中坐标轴方向的单位矢量总是指向相同的方向，所以使用时比较简单。对于具有平面边界的电磁场问题经常选用直角坐标系。

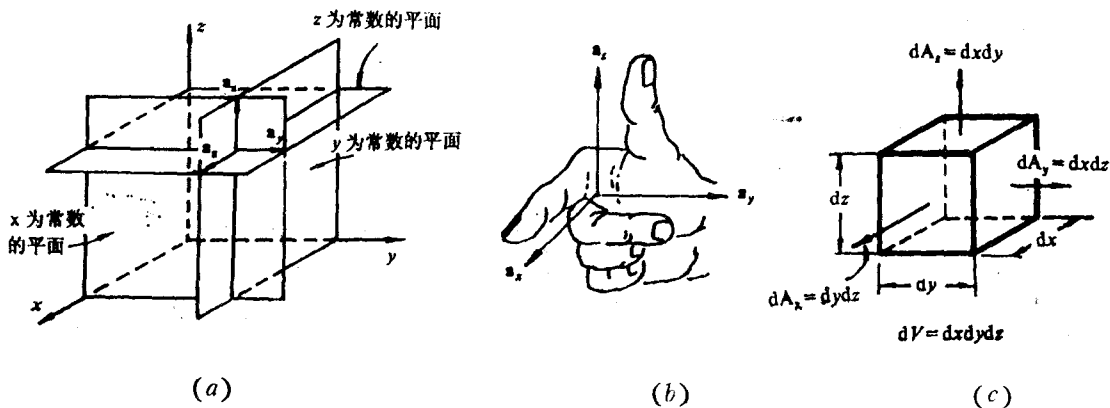


图1-1 直角坐标系

二、圆柱坐标系

对于轴对称的问题，选用圆柱坐标系比较方便。如图 1-2 所示，空间任一点的坐标可以定义为三个相互垂直曲面的交点。这三个曲面是：以 z 轴为对称轴、半径为 ρ 的圆柱面， z 为常数的平面，以及由 x 轴起算的 φ 角为常数的半平面。单位矢量 $\mathbf{a}_\rho$ 、 $\mathbf{a}_\varphi$ 、 $\mathbf{a}_z$ 各自垂直于相应的曲面。 $\mathbf{a}_z$ 的方向与位置无关，但 $\mathbf{a}_\rho$ 和 $\mathbf{a}_\varphi$ 的方向随 φ 角的变化而变化。

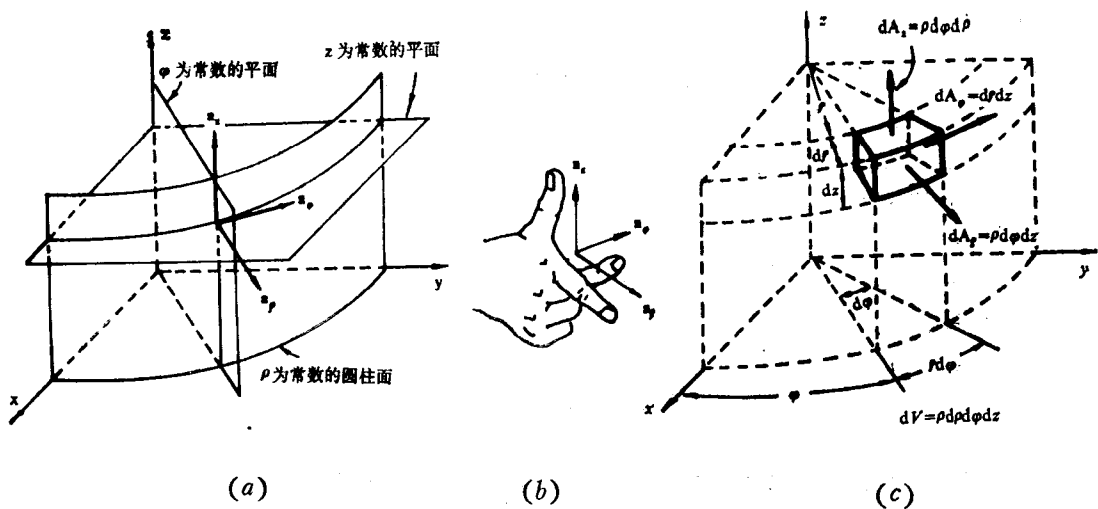


图1-2 圆柱坐标系

三、球坐标系

球坐标系在点对称的问题中是有用的，此时可取对称点作为原点。由图 1-3 可以看

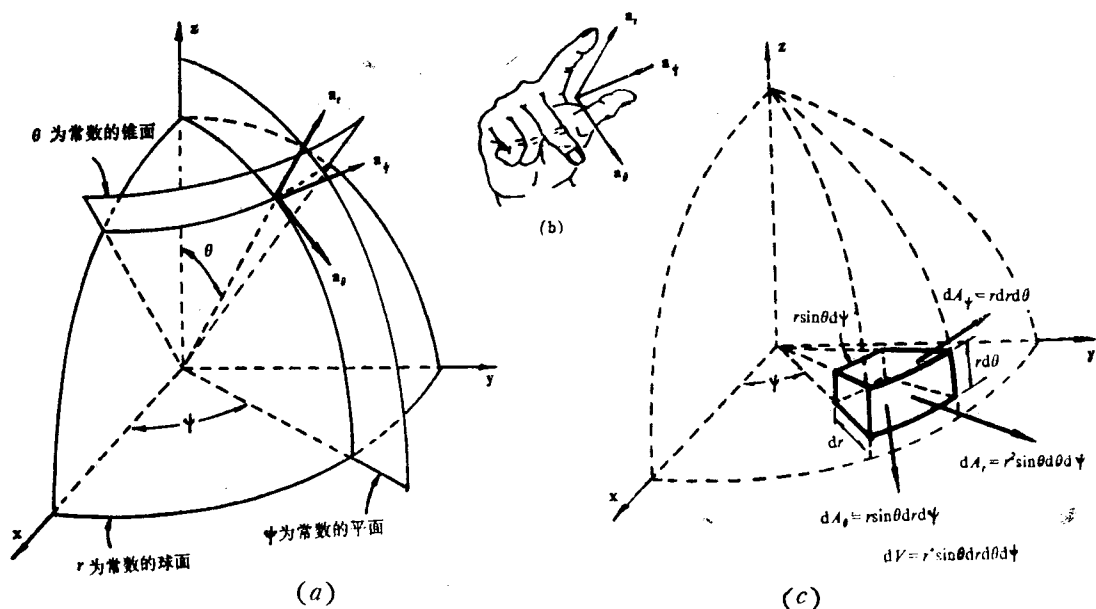


图1-3 球坐标系

出，球坐标 (r, θ, ϕ) 由半径为 r 的球面、从 x 轴起算的 ϕ 角为常数的半平面和以 z 轴为轴，半顶角为 θ 的一个锥面相交而得。单位矢量 $\mathbf{a}_r$ 、 $\mathbf{a}_\theta$ 和 $\mathbf{a}_\phi$ 各自垂直于这些曲面，且逐点改变方向。但在每一坐标点，这些单位矢量必须构成右手螺旋关系。

各坐标系中的微分长度元、表面面积元和体积元已经在表1.1中列出。表1.2综合了这三种坐标系的坐标之间以及单位矢量之间的几何关系，利用它们可以把坐标位置和单位矢量从一个坐标系转换到另一坐标系。

表1.1 各坐标系中的微分长度元、表面面积元和体积元

直角坐标	圆柱坐标	球坐标
$dl = dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$	$dl = d\rho\mathbf{a}_\rho + \rho d\varphi\mathbf{a}_\varphi + dz\mathbf{a}_z$	$dl = dr\mathbf{a}_r + r d\theta\mathbf{a}_\theta + r \sin\theta d\phi\mathbf{a}_\phi$
$dA_x = dydz$	$dA_\rho = \rho d\varphi dz$	$dA_r = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$
$dA_y = dx dz$	$dA_\varphi = \rho d\rho dz$	$dA_\theta = r \sin\theta dr d\phi$
$dA_z = dx dy$	$dA_z = \rho d\rho d\varphi$	$dA_\phi = r dr d\theta$
$dV = dx dy dz$	$dV = \rho d\rho d\varphi dz$	$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$

表1.2 各坐标系中坐标和单位矢量之间的转换关系

直角坐标	圆柱坐标	球坐标
x	$= \rho \cos\varphi$	$= r \sin\theta \cos\phi$
y	$= \rho \sin\varphi$	$= r \sin\theta \sin\phi$
z	$= z$	$= r \cos\theta$
$\mathbf{a}_x$	$= \cos\varphi\mathbf{a}_\rho - \sin\varphi\mathbf{a}_\varphi$	$= \sin\theta \cos\phi\mathbf{a}_r + \cos\theta \cos\phi\mathbf{a}_\theta - \sin\phi\mathbf{a}_\phi$
$\mathbf{a}_y$	$= \sin\varphi\mathbf{a}_\rho + \cos\varphi\mathbf{a}_\varphi$	$= \sin\theta \sin\phi\mathbf{a}_r + \cos\theta \sin\phi\mathbf{a}_\theta + \cos\phi\mathbf{a}_\phi$
$\mathbf{a}_z$	$= \mathbf{a}_z$	$= \cos\theta\mathbf{a}_r - \sin\theta\mathbf{a}_\theta$
圆柱坐标	直角坐标	球坐标
ρ	$= \sqrt{x^2 + y^2}$	$= r \sin\theta$
φ	$= \tan^{-1}(y/x)$	$= \phi$
z	$= z$	$= r \cos\theta$
$\mathbf{a}_\rho$	$= \cos\varphi\mathbf{a}_x + \sin\varphi\mathbf{a}_y$	$= \sin\theta\mathbf{a}_r + \cos\theta\mathbf{a}_\theta$
$\mathbf{a}_\varphi$	$= -\sin\varphi\mathbf{a}_x + \cos\varphi\mathbf{a}_y$	$= \mathbf{a}_\phi$
$\mathbf{a}_z$	$= \mathbf{a}_z$	$= \cos\theta\mathbf{a}_r - \sin\theta\mathbf{a}_\theta$
球坐标	直角坐标	圆柱坐标
r	$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$= \sqrt{\rho^2 + z^2}$
θ	$= \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$	$= \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$
ϕ	$= \tan^{-1} \frac{y}{x}$	$= \varphi$
$\mathbf{a}_r$	$= \sin\theta \cos\phi\mathbf{a}_x + \sin\theta \sin\phi\mathbf{a}_y + \cos\theta\mathbf{a}_z$	$= \sin\theta\mathbf{a}_\rho + \cos\theta\mathbf{a}_z$
$\mathbf{a}_\theta$	$= \cos\theta \cos\phi\mathbf{a}_x + \cos\theta \sin\phi\mathbf{a}_y - \sin\theta\mathbf{a}_z$	$= \cos\theta\mathbf{a}_\rho - \sin\theta\mathbf{a}_z$
$\mathbf{a}_\phi$	$= -\sin\phi\mathbf{a}_x + \cos\phi\mathbf{a}_y$	$= \mathbf{a}_\varphi$

§ 1.2 方向导数与梯度

众多的电磁现象告诉我们,除要知道物理量在坐标系中的分布外,往往还要研究这些物理量沿任意指定方向的变化率,这就是要研究物理量的方向导数和梯度。

一、方向导数

从标量场 $\Phi = \Phi(M)$ 中任一点 M_0 出发引一条射线 l , 在 l 上任取一点 M (如图 1-4),

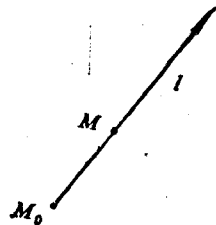


图1-4 计算沿 l 方向的方向导数

记长度 $\overline{M_0M} = r$, 当沿 l 使 $M \rightarrow M_0$ 时, 若比值

$$\frac{\Delta\Phi}{r} = \frac{\Phi(M) - \Phi(M_0)}{\overline{M_0M}}$$

的极限存在, 则称此极限值为函数 $\Phi(M)$ 在点 M_0 处沿 l 方向的方向导数。记为 $\left. \frac{\partial\Phi}{\partial l} \right|_{M_0}$, 即

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial l} \right|_{M_0} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\Phi(M) - \Phi(M_0)}{\overline{M_0M}}$$

上式说明, 方向导数是一个标量, 它与点 M_0 有关, 也与 l 的方向有关。方向导数是 $\Phi(M)$ 在点 M_0 沿 l 方向的变化率, 它反映了函数 $\Phi(M)$ 在 l 方向上的增减情况。

设 $\Phi = \Phi(x, y, z)$ 在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处可微, a_1 是沿射线 l 的单位矢量, 它的方向余弦是 $\cos\alpha, \cos\beta$ 和 $\cos\gamma$, 则 Φ 在点 M_0 沿 l 的方向导数可以写成

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial\Phi}{\partial l} \right|_{M_0} &= \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\Phi(x, y, z) - \Phi(x_0, y_0, z_0)}{\overline{M_0M}} \\ &= \lim_{M \rightarrow M_0} \left[\frac{\Phi(x, y, z) - \Phi(x_0, y, z)}{x - x_0} \cdot \frac{x - x_0}{\overline{M_0M}} \right. \\ &\quad + \frac{\Phi(x_0, y, z) - \Phi(x_0, y_0, z)}{y - y_0} \cdot \frac{y - y_0}{\overline{M_0M}} \\ &\quad \left. + \frac{\Phi(x_0, y_0, z) - \Phi(x_0, y_0, z_0)}{z - z_0} \cdot \frac{z - z_0}{\overline{M_0M}} \right] \\ &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{dz}{dl} \right)_{M_0} \\ &= \left. \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right|_{M_0} \cos\alpha + \left. \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right|_{M_0} \cos\beta + \left. \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|_{M_0} \cos\gamma \end{aligned} \quad (1.1)$$

它直接与 M_0 点的偏导数联系着。

二、梯度

如果记矢量

$$\text{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{a}_z \quad (1.2)$$

则式(1.1)还可写成

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial l} \right|_{M_0} = \text{grad}\Phi \cdot \mathbf{a}_1 \quad (1.3)$$

式中 $\text{grad}\Phi$ 称为标量函数 Φ 的梯度。按式(1.2)，它在直角坐标下可进一步写成

$$\begin{aligned} \text{grad}\Phi &= \frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{a}_z \\ &= \frac{\partial\Phi}{\partial n}\cos(\mathbf{n}, \mathbf{a}_x)\mathbf{a}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial n}\cos(\mathbf{n}, \mathbf{a}_y)\mathbf{a}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial n}\cos(\mathbf{n}, \mathbf{a}_z)\mathbf{a}_z \\ &= \frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathbf{n} \end{aligned}$$

式中 $\mathbf{n}$ 是等量面($\Phi = \text{常数}$)的法向单位矢量。

上式说明，对空间标量场 Φ 来说，沿等量面法向的方向导数有最大值 $\partial\Phi/\partial n$ ，其它方向上的值只是 $\partial\Phi/\partial n$ 在这个方向上的投影。因此一个标量函数的梯度是沿此标量函数的等量面法向的一个矢量。它的大小等于函数沿此法向的方向导数。

【例】求函数 $\Phi = x^2 - xy + y^2$ 在点 $M_0(1, 1)$ 处沿 $\mathbf{a}_1 = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$ 的方向导数和该函数在 M_0 的梯度。

解法一：
$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial l} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right|_{M_0} \cos\alpha + \left. \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right|_{M_0} \cos\beta$$

因

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right|_{M_0} = (2x - y)_{M_0} = 1 \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right|_{M_0} = (-x + 2y)_{M_0} = 1$$

所以

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial l} \right|_{M_0} = \cos\alpha + \cos\beta$$

$$\text{grad}\Phi|_{M_0} = (2x - y)_{M_0}\mathbf{a}_x + (-x + 2y)_{M_0}\mathbf{a}_y = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$$

解法二：因

$$\mathbf{a}_1 = \cos\alpha \mathbf{a}_x + \cos\beta \mathbf{a}_y \quad \text{grad}\Phi|_{M_0} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$$

所以

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial l} \right|_{M_0} = \text{grad}\Phi|_{M_0} \cdot \mathbf{a}_1 = \cos\alpha + \cos\beta$$

§ 1.3 散度和旋度

为了研究矢量场随空间坐标的变化规律，引入矢量场的散度和旋度运算符是最简便的方法。此外，通常还利用矢量场的散度和旋度，将矢量场分类。

一、散度

考虑矢量场 $\mathbf{E}$ ，我们希望定义一个新的与场点 P 相联系的标量函数，用这个标量函数随空

间位置的变化来代替对 $\mathbf{E}$ 的研究。

设一空间区域 Ω (图 1-5), V 是区域 Ω 中的某一小体积, 它的表面积是 A 。则可定义通过 A 的正侧的 $\mathbf{E}$ 的通量为

$$\oint_A \mathbf{E}_n dA = \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_A E \cos \theta dA$$
式中 $d\mathbf{A}$ 是一个矢量, 它的大小等于 A 上的面积元 dA , 它的方向沿表面 dA 的外法向, 角度 θ 是 $\mathbf{E}$ 与 $d\mathbf{A}$ 间的夹角。

显然, 通量是一个标量。它的值除与矢量 $\mathbf{E}$ 有关外, 还与体积 V 的形状、大小和位置有关。

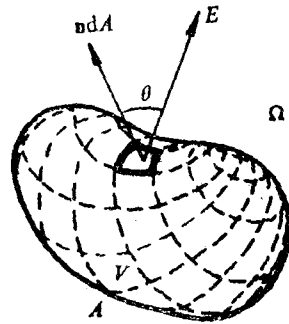


图1-5 穿过封闭面 A 的矢量 $\mathbf{E}$ 的通量

除了可以用通量描述矢量场 $\mathbf{E}$ 外, 经验表明, 最好用单位体积中的上述积分值来描述矢量场, 以便免除 A 本身的影响。同时, 为了进一步显示场在某点的特性, 应当取包含此点的体积趋于零。这时, 单位体积通量的极限值就称为 $\mathbf{E}$ 在该点的散度。也就是说, 散度的定义是

$$\text{div} \mathbf{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}}{V} \quad (1.4)$$

它表示当 $V \rightarrow 0$ 时 Ω 中单位体积的通量的极限值。这是可应用于任何坐标系统的一般定义。可见, 矢量场的散度是标量。根据这个定义, 不难导出在直角坐标系中的偏微分形式

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (1.5)$$

由式 (1.4), 实际上可直接得到

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{d(\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A})}{dV}$$

从而得出如下的高斯定理

$$\int_V \text{div} \mathbf{E} dV = \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad (1.6)$$

式中 V 是封闭面 A 包围的体积。高斯定理建立了 V 的体积分与其边界曲面 A 上曲面积分之间的联系。同应用于一点的微分形式 (1.5) 不同, 这是应用于任何有限体积的情况。例如计算分布于体积 V 内电量 Q 产生的静电场, 按电学中的高斯定理, 电位移矢量 $\mathbf{D}$ 的通量等于电量 Q

$$Q = \oint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}$$

利用式 (1.6) 和 $Q = \int_V \rho dV$, 容易得到

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho \quad (1.7)$$

即任意点 P 处 $\mathbf{D}$ 的散度等于该点电荷密度 ρ 。这个结果当然也可直接由散度的定义式 (1.4) 得出。因此对 $\rho = 0$ 的自由空间有

$$\text{div} \mathbf{D} = 0$$

散度是某点源的大小的度量。如果在 P 点没有电力线发出或终止, 则该点的散度为零,

反之, 如果通过包含 P 点的小封闭面上有向外的电力线, 则

$$\operatorname{div} \mathbf{D} > 0$$

即在 V 内有源, 但如果

$$\operatorname{div} \mathbf{D} < 0$$

则在 V 内有洞, 即有进入 V 的净通量。

在辐射问题中, 矢量 $\mathbf{D}$ 可与辐射能量相联系。如在 P 点 $\operatorname{div} \mathbf{D} > 0$, 说明在包含 P 点的空间有辐射源, 这发生在有发射天线的情况。但如果 $\operatorname{div} \mathbf{D} < 0$, 则辐射能量被 P 点的媒质所吸收。常见的情况是 $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, 它表示 P 点的媒质是透明的。

【例】求在真空中相距为 $2a$ 的无限平行平面间充有电荷密度 ρ 时, 两平面内外的电场。

解: 先计算内场 E_i 。设所求的 P 点距中心点 x 米 ($x < a$)。通过 P 及其对称点 (如图 1-6 (a)) 作一柱体。根据对称性可以判断, $\mathbf{E}$ 只沿 x 方向。因此, 按高斯定理

$$\oint_A \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q$$

Q 为柱体内带电体的总电量。上式为通过柱体表面的总电通量。因柱体侧面法向与 $\mathbf{E}$ 垂直, 电通量为零; 又由对称性知, 两底面的电通量相等。故由上式得

$$2\epsilon_0 E_i A = 2x \cdot \rho A$$

$$E_i = x\rho / \epsilon_0$$

这时显然有

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} (\epsilon_0 \mathbf{E}_i) = \epsilon_0 \frac{\partial E_i}{\partial x} = \rho$$

再计算外场 E_o 。用类似的方法作柱体 A' (见图 1-6 (b)) 则由高斯定理

$$2\epsilon_0 E_o A' = 2a A' \rho$$

故有

$$E_o = a\rho / \epsilon_0 = \text{常数}$$

这时

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \epsilon_0 \frac{\partial E_o}{\partial x} = 0$$

二、旋度

描述矢量 $\mathbf{E}$ 的另一个新的算符是 $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ 。它与 $\mathbf{E}$ 的散度不同, $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ 是一个矢量, 因此它的定义较散度的定义更复杂一些。

先从一个特殊情况开始。设在 y - z 平面上有一个 P 点, 在此平面上有一围绕它的封闭路径 c , 若沿此路径取任意矢量 $\mathbf{E}$ 的线积分 (见图 1-7)

$$\oint_c E \cos \theta ds = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

式中 $d\mathbf{s}$ 是一个矢量, 它的大小等于沿 c 的长度元 ds , 它的方向沿 c 的切向, 积分的方向是使围

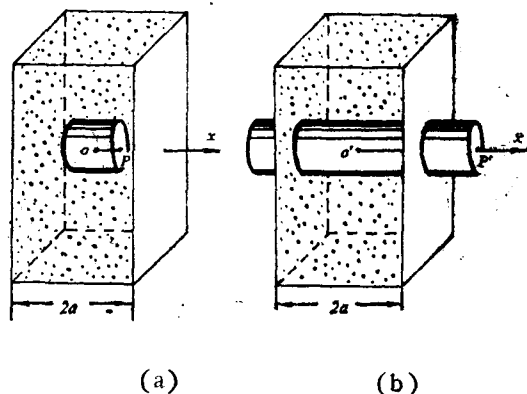


图1-6 通量的计算

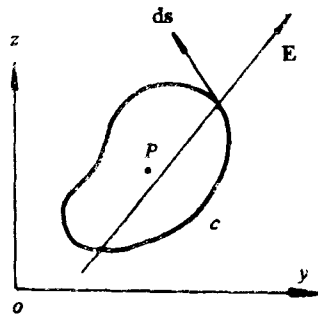


图1-7 沿封闭曲线 c 的环量

线内的面积 A 保持在其左侧,则可定义这个特殊情况下的旋度。 $\mathbf{E}$ 旋度的大小等于上述线积分除以所围的面积,即

$$|\operatorname{rot} \mathbf{E}| = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{A}$$

有时, $\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ 也称为矢量 $\mathbf{E}$ 沿有向曲线 c 的环量。此外,因 $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ 是一个矢量,它必须有方向,这个方向取垂直于 c 所在的平面,通常就是按所谓右手螺旋的方向,因此在上述坐标系中 $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ 就沿 x 的正方向。或者写成

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{E} = \lim_{A \rightarrow 0} \left(\frac{\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{A} \right)_x \quad (1.8)$$

没有理由限制积分一定在 y - z 平面,如果 c 是在 x - z 平面或在 x - y 平面,则分别有

$$\operatorname{rot}_y \mathbf{E} = \lim_{A \rightarrow 0} \left(-\frac{\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{A} \right)_y, \quad \operatorname{rot}_z \mathbf{E} = \lim_{A \rightarrow 0} \left(-\frac{\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{A} \right)_z$$

这样,矢量 $\mathbf{E}$ 的旋度就是 $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{a}_x \operatorname{rot}_x \mathbf{E} + \mathbf{a}_y \operatorname{rot}_y \mathbf{E} + \mathbf{a}_z \operatorname{rot}_z \mathbf{E}$ (1.9)

式中 $\mathbf{a}_x$ 、 $\mathbf{a}_y$ 、 $\mathbf{a}_z$ 分别为 x 、 y 、 z 方向的单位矢量。

旋度的定义应该与所取的坐标系无关。上式仅应用直角坐标,然而上述处理方法很容易推广到一般情况。显然,总可能这样选取积分所在的平面,使沿这平面上的围线积分时有旋度值,而另两个垂直面上的积分为零。因此我们可以写出旋度的一般定义

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{a} \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{A} \quad (1.10)$$

式 中选取 c 所在平面的位置,使积分获得最大值,而 $\mathbf{a}$ 是垂直于这个平面的单位矢量。它的正向是沿积分路径取为右螺旋的方向。

【例】计算半径为 a 的无限长圆形铜线内外磁场的旋度。磁场由线内的均匀电流密度 J_z 所产生。

解:由静电学的安培环路定律,磁场强度沿圆周切向(图1-8),且可表示为

$$H_\phi = r J_z / 2$$

对于这个问题取圆柱坐标比较方便。在式(1.9)中,积分围线可以取图1-8(b)中通过待求点 P 的积分体积

元表面上互相垂直的三种曲线矩形。现在来看 $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ 在三个坐标方向的分量。

首先,第一项积分取沿导线轴共面的曲线矩形的积分。这时, $\mathbf{H}$ 矢量处处垂直于 $d\mathbf{s}$,所以

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

即这个 $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ 分量为零。同理,对于圆柱壁上的小围线的积分,由于圆弧部分的积分值互相抵消,这个积分也为零。现在再取垂直于导线轴的平面上的围线。线积分由四部分组成,

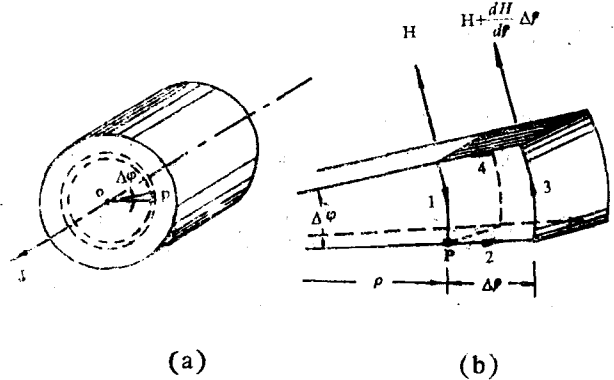


图1-8 计算载流导线内的磁场

两个沿长为 $\Delta\rho$ 的径向元, 另两个沿对着 $\Delta\theta$ 角的弧。因此

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} &= \int_1 H ds + \int_2 H ds + \int_3 H ds + \int_4 H ds \\ &= H \int_1 ds - \left(H + \frac{dH}{d\rho} \Delta\rho \right) \int_3 ds \\ &= \left[-H\rho + \left(+ \frac{dH}{d\rho} \Delta\rho \right) (\rho + \Delta\rho) \right] \Delta\varphi \\ &\approx \left(H + \frac{dH}{d\rho} \right) \Delta\rho \Delta\varphi\end{aligned}$$

因

$$A = \rho \Delta\rho \Delta\varphi$$

所以

$$|\text{rot } \mathbf{H}| = \frac{[H + (dH/d\rho)\rho] d\rho d\varphi}{\rho d\rho d\varphi} = \frac{H}{\rho} + \frac{dH}{d\rho}$$

即只有沿导体轴线方向的旋度。因而在导体内有

$$\text{rot } \mathbf{H} = [(J/2) + (J/2)] \mathbf{z}_0 = \mathbf{J}$$

对于导体外的点, 经过以上同样的过程, 并由静电学的安培环路定律, 设 I 为通电导线的总电流, 可以得出

$$H = I/2\pi\rho$$

所以, $dH/d\rho = -I/2\pi\rho^2$, 代入 $|\text{rot } \mathbf{H}|$, 得出

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0$$

根据这个例子, 一般地可以得到

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.11)$$

即导体外任一点的 $\text{rot } \mathbf{H}$ 等于该点的电流密度 $\mathbf{J}$, 这个结论是很有用的。

对于直角坐标 (x, y, z) 的情况, 按照旋度定义容易写出

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{a}_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \mathbf{a}_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \quad (1.12)$$

它反映了矢量的某方向的分量在另一方向上的变化率。或取便于记忆的形式

$$\text{rot } \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \quad (1.13)$$

【例】计算静止点电荷周围电场强度的旋度。

解: 按库仑定律, 在直角坐标中电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z)$$

因

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

故

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} = & -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\left(-\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{z}{r^3} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{y}{r^3} \right) \right] \mathbf{a}_x + \left[\left(-\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{x}{r^3} \right) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{z}{r^3} \right) \right] \mathbf{a}_y + \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{y}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{r^3} \right) \right] \mathbf{a}_z \right\} \end{aligned}$$

由于

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{z}{r^3} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{y}{r^3} \right) = -\frac{3yz}{r^5}$$

所以, $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ 在 x 方向的分量为零, 在 y, z 方向也可得出相同结果。从而静止点电荷周围电场强度的旋度为零。虽然这个例子是关于静止点电荷的特殊情况, 但关于电场的旋度为零, 即

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (1.14)$$

也是一个非常重要的结论。

由式 (1.10) 可直接导出关于 $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ 的面积分和 $\mathbf{E}$ 的线积分的斯托克斯公式 (Stokes' Theorem)

$$\int_A \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.15)$$

式中 c 是包围表面 A 的边界。

利用式 (1.5) 和式 (1.13) 容易证明

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (1.16)$$

§ 1.4 矢量场的分类

矢量场可根据散度和旋度分类。如果区域 R 内的每一点上有

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

则此场称为在该区域内是无源的。按物理上的说法, 实际上就是区域内没有源和洞, 每一根进入这区域的流线也必离开这个区域。因此就可能引入流管的概念, 通过流管的流量是不变的。

如果在 R 内每点有

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

则在区域 R 内称为场是无旋的。这些定义使我们可以把一般的矢量场分为两类: 无源的和无旋的。由于这两类表示方法互相独立无关, 因此场可以既是无源的又是无旋的; 也可能两者都不是, 于是通常的分类是:

(I) 无源无旋场

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad \text{且} \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

例如自由空间的静电场, 自由空间的重力场, 平衡温度场等。

(II) 无旋有源场

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad \text{但} \quad \operatorname{div} \mathbf{E} \neq 0$$

例如在带电媒质中的静电场