〔英〕I.D.福克斯 M.J.普拉特 著

# 设计与制造用的计算几何学

厉声林 李心灿 郑会琳 等译 熊振翔 校



国防工业出版社

## 内容简介

本书概括了最近三十年来由计算机来表达、分析和综合形象信息的领域内所取得的主要进展。它从最基本的解析几何讲起，然后扩展到微分几何，一直讲到各种实用的样条曲线和曲面。本书共分九章：第一章，平面坐标几何；第二章，三维几何与向量代数；第三章，坐标变换；第四章，三维曲线和曲面的几何学；第五章，曲线和曲面设计；第六章，复合曲线与样条；第七章，复合曲面；第八章，截面设计；第九章，曲面设计和加工中所用的计算方法。本书还有下列五个附录：初等矩阵代数；行列式；多项式的重要性质；多项式及其它非线性方程的数值解；多项式逼近。

本书可作为从事计算机辅助设计（CAD）或计算机辅助制造（CAM）的工程技术人员的基础读物，也可以作为高等院校有关专业的学生、研究生的教科书或教师的教学参考书。

COMPUTATIONAL GEOMETRY FOR DESIGN AND MANUFACTURE
I. D. FAUX M. I. PRATT
ELLIS HORWOOD LIMITED 1979

*

设计与制造用的计算几何学
〔英〕I. D. 福克斯 M. J. 普拉特 著
厉声林 李心灿 郑会琳 等译
熊振翔 校
责任编辑 何美玺

*

国防工业出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 1/16 印张13 295千字
1986年1月第一版 1986年1月第一次印刷 印数：0,001—5,420册
统一书号：15034·2877 定价：2.70元

# 译者的话

当前，“计算几何”在我国的研究与应用正方兴未艾。我国的航空、造船及汽车制造等国防和工业部门，现在正面临着现代化的迫切任务，一些老的设计、生产、制造、工艺等传统方式在不断改变，特别是从仿制、改型到自行设计制造的新阶段，采用现代化的新技术、新方法更是当务之急。而要完成这些任务的最好办法就在于学习和实践。自六十年代末期，一门与计算几何密不可分的、常称之为“计算机辅助（几何）设计(CAD 或 CAGD)”的新学科开始被介绍到我国，立刻引起领导及有关部门的关注，也引起科技人员及工人的重视，要求学习，使用者与日俱增。因此，一些院校陆续编著了这方面的教材，进行普及与推广，不少工厂和研究所先后办起学习班，并且结合实际建立了某些型号飞机、轮船的理论外形或结构外形的数学模型，为设计、工艺、制造的一体化生产奠定了基础，以后又在自动绘图、数控编程以及图像显示等方面都取得了可喜的成果。随着生产实践的发展，理论工作也逐步提高，1978 年、1981 年先后召开了全国样条函数理论与应用学术会议，1980 年我国首次参加了在英国召开的 CAD 国际学术会议。

我国虽然有一些专著和论文，但与科学技术先进国家相比，还有一定的差距。为此，我们翻译了《设计与制造用的计算几何学》这本书。

本书内容比较全面，通俗易懂，它从最基本的解析几何讲起，然后扩展到微分几何，一直到各种实用的样条曲线和曲面，有理论，有应用，特别是对工程技术人员是一本难得的普及与提高的读物。

参加本书翻译的还有王日爽、陈剑南、袁奇荪、潘柏楷、舒明玉、陈其明及姜汝珙等同志。

由于我们水平有限，错误在所难免，恳请读者批评指正。

# 原　序

本书的目的是为了概括最近三十年来福雷斯特(Forrest)(1971)称之为计算几何，即由计算机表达、分析和综合形象信息的领域内所取得的主要成果。在我们看来，这个课题的纯几何性质，近年来，在某种程度上被弄得模糊不清了。我们力求从几何的观点，而不是从解析的观点来介绍它，以恢复它的本来面目。为此，我们从一开始就复习与主题有关的不同几何分支。在本书后面部分，处理各种曲线曲面的表达方法时，就广泛地应用了这些材料。我们也提供了一个附录，介绍矩阵、行列式和基本的数值分析，以期本书内容完整，俾使熟悉初等微积分而其程度达到大多数工科大学生水平的读者能满足需要。

本书的材料，最初是在克朗菲尔德(Cronfield)学院作为应用几何课程的一份讲稿而时常使用的。对象是积极从事于计算机辅助设计(CAD)或计算机辅助制造(CAM)的实习工程师和工业数学家。这本书体现了比原讲稿稍有扩充的内容，但主要的对象仍未改变。虽然这本书可能不受纯数学家们的欢迎，但是，我们希望它对某些学者来说，在计算几何这一课题上，将是一本有用的入门书。

我们对题材当然是有所选择的，因为我们主要着眼于所论及方法的宽广的数学原理，而不进入到实际应用的细节中去。如果读者需要的话，他们可以在相当繁多的参考书目中去寻找解答。我们广泛地引用了他人的著作，并尽力做到给予他们以应有的评价。

# 目　录

# 概　论

数值(计算)几何的来源，虽然可以追溯到较远的年代，但是它初次取得实用上的价值，还是在第二次世界大战的期间。当时生产上的压力，特别是航空工业方面的压力，激发了新设计方法的发展。迄今为止，设计方法主要还是作图法，使用工程画法几何(technical descriptive geometry)，例如惠尔曼(Wellman)(1957)书中所介绍的那些技术。新的方法以解析曲线，特别是圆锥曲线〔列明(Liming)1944〕为其基础。它们避免了原来曾用过的许多艰苦的手工绘图工作，而代之以大量的计算内容，这样就导致了机械和电动计算机的广泛应用。现在的设计阶段比以前所需要的时间为少，并且比作图法能达到的尺寸精确度要高得多。

随着电子计算机的改进，在多方面与传统作图法精神不符的大胆革新技术发展了起来。原先，曲面是由一种称为放样的方法，即由构造许多纵向曲线来联系一组事先定义好的横截面的方法来表达的。然而许多新方法，则将从纵向曲线和横向截面曲线同样处理，将它们看成划分曲面为面片组合之曲线四边形。这些曲面片中的每一片，都可以用数学公式来确定，这就构成了对旧方法的改进。旧方法不能定义曲面本身，而只能定义曲面上的一组曲线。

最早的一种曲面分片系统是由费格森(Ferguson)提出的(1963)。它与传统方法的区别是在定义曲线与曲面时，用了参数方法，而不是笛卡儿坐标法。从此，这种参数方法就变成了标准方法。这有三点理由：第一，它能赋予空间曲线以简单数学表达式，这在以前是由它们在两个相互垂直的坐标平面上的投影来确定的；第二，它避免了某些在表达曲线和在一个固定坐标系中有垂直切线的曲线时，可能产生的问题；第三，或许是最重要的，它可以把坐标变换，例如平移或旋转变得很简单。换言之，使用参数技术，将使我们从对特定坐标系的依附性中解放出来。正如福雷斯特(1972c)所指出的，形状与参数系统是无关的，因此，参数法可以看作是一种完全自然的发展。然而，它的使用，若不借助于计算机，则是无法实现的。

与这类系统发明的同时，自动绘图机、图象显示装置和数控机床也出现了。参数曲线和曲面的表达与它们配合使用，看来是十分合适的。图象显示需要进行坐标变换、投影、透视等。这些变换用参数形式来处理最为简便。它们能使一个由数学定义的三维物体显示在屏幕上，就象我们从某个选好的视点看出来的一样。

一旦，一个物体的形状的数学表达式被计算出来以后，当然要把这种表达式存储在计算机内。这样做的好处是多方面的，现列举其中的一些于下。

(a) 物体的形状以纯粹数据信息的形式存储在计算机内。过去，由于缩纸● 或绘图误差所引起的种种问题就不会发生了；

(b) 计算机能很容易地算出形体的几何性质，诸如体积、截面曲线、截面面积等；

● 缩纸系指室内温、湿度变化而引起的图纸伸缩。——译者

（c）不同的度量单位，可以很容易地在计算机内部进行换算；

（d）关于形状的信息能通过绘图机或图形终端以形象输出，或以数字输出。特别是现在能产生一种数控纸带，它能自动加工形状，或以适合于由结构分析程序即时处理的形式提供信息。这样就提出了使整个生产过程一体化的可能性问题，即从设计、分析到制造，完全以计算机的使用为其中介。

自从第一曲面定义系统问世以来，已经取得了一系列重要的数学进展，这里，我们先简单地介绍其中的一些，在本书的稍后部分再详细讨论。

第一，样条曲线的性质探讨得较深入，它们是一条柔韧的金属或木质样条的近似数学模拟，传统上是被绘图员用来绘制通过一系列给定点的曲线而使用的。相应地，它们在性质上是光滑的，并且将它们的理论进行推广，便得到光滑的样条曲面。近年来，已经证明了任何样条曲线或曲面能够表达为基本样条或B-样条(克雷和舍恩伯格，1966)。它们具有局部非零的性质。这一阐述使设计过程中对形状的局部修改，无需从它的数值表达中每次都重新计算。

第二，孔斯(Coosc)(1964)提出了一个非常一般化的曲面片理论，他指出如何用四条任意的边界曲线调配成一个光滑的曲面片，并且说明了如何使曲面片之间的梯度和曲率能达到连续。这一工作把以前所作的各种研究都统一了起来。但正是由于它的高度概括性，使得它不易为非数学人员所理解。

目前，曲面表达方法已经远离了它们手工绘图的几何来源，但是，大多数曲面定义系统未来的使用者是新型的绘图员和放样员。虽然他们能较好地领会几何概念，但是不能期望他们去掌握高深的曲面片数学知识。这样就产生了一个问题，如何使现代曲面片定义方法为操作者所提供的相当多的自由度，能转化为他们容易理解的东西。一种解决的办法是使系统完全自动化，只要求曲面所希望通过的点的位置信息，而对操作员取消了所有其他自由度。这类性质的系统称为**曲面拟合**系统（Surface Fitting System)，它们执行了一种数值分析学家称之为两维插值的任务。

第三种主要的数学发展是贝齐尔(Bézier)(1971)引进的UNISURF● 系统，它是反“全自动化”潮流的。该系统是在一个原属费格森系统的基础上进行巧妙的数学改造而建立起来的。它可使操作员不经高深数学训练，完全使用初等几何概念，便可自由地对曲线曲面的剖切进行设计。这是第一个实用的**曲面设计**系统(Surface Design System)。

基本上，UNISURF系统是按下述进行工作的。设计者确定一个由直线组成的开多边形，让它在一个屏幕上显示出来，这个系统反应出一条逼近于该多边形的光滑曲线。通过修改他的多边形，设计者能基本上按自己预定的形状来修改这条曲线，直到从美学或其他观点来看，满足了他所要求的条件为止。这就是一个**交互性**方法的例子，相当于设计者和计算机之间的一种对话方式。曲面类似地以开多面形来定义。UNISURF系统工作时，使用了简单多项式，而最近由戈登和里森费尔德（Gordon and Riesenfeld)(1974）提出了一个类似系统，它应用了前文提及的B-样条，并充分发挥了它们所提供的曲线与曲面便于局部修改的特性。

整个曲线拟合和设计的领域中的一个中心问题是对如何构成一条“光顺”曲线，没有一个严格的定义。任何一个正统的绘图员或放样员会毫不犹豫地判断出一条给定的曲

● 贝齐尔在雷诺公司提出的曲面程序系统。——译者

线是否光顺，虽然他在解释其判断依据时会感到困难。然而，他一般会在过一组给定点画出最光顺的曲线时，和他的同事产生分歧。

从计算曲线和曲面定义系统中取得的经验指出，光顺并非仅仅包含了斜率和曲率的连续性。显然，这些性质是我们所需要的，并且它们也不难获得，但是，它们本身并不能保证得到良好的结果。这是因为从数学意义上来讲，曲线可能是非常光顺的，但是仍然会有许多波动，各阶导数都是连续的函数 $\sin x$，就是一个简单例子。虽然至今大多数实用系统是基于多项式的，但因它们也可能具有多到难以计数的极大极小数。所以在曲线设计中，目前对特殊而较少摆动的函数表现出一种日益增长的兴趣。一个例子是张力样条〔施韦克特(Schweikert)1966〕，另一个例子是 AUTOKON 系统〔梅赫卢姆(Mehlum) 1969〕所用的非线性样条。

对本课题的这一简述，足以说明它所用的技巧是基于多种通常是分设的数学学科。本书的前面部分（第一至第四章）的目的是汇集了与主题有直接关系的那些古典解析几何、代数几何和微分几何知识，并复习了已成为数值（计算）几何中一种公认语言的向量代数。我们希望这些材料能在第五、六、七、八章所讨论的曲线和曲面的拟合与设计中，统一和明确向量技术的几何含义。第九章讨论了某些有关曲面设计与制造方面的特殊数值（计算）技巧。

为了本书自身的完整，我们提供了一个附录，它概括了初等矩阵代数，行列式和某些数值（计算）方法。对于后一个课题，也许值得强调一下：许多标准方法或多或少地可以直接应用到我们感兴趣的曲线拟合中去。主要的区别在：拟合一条曲线，在通常的数学意义下，就是试图逼近一个函数，并且能够清楚地定义我们的精度概念，因而能够定出可接受的公差，而在数值（计算）几何里，我们试图表达的不是一个函数而是一个形状。这样，如前所述，我们可以接受的条件难于表达得多。

最后，应当提到本书末讨论的一种表达方法，就是利用简单部分来构成复杂形状的一种计算机表达方法。我们并不是低估这种方法的重要性，只是本书主要是涉及单个部分，而不是它们的组合表达问题。读者应参考例如布雷德(Braid)(1973) 或吴 (Woo) (1977a)的著作，以了解这方面比较成功的系统的细节。

# 第一章　平面坐标几何

## 1.1　基本概念的复习

### 1.1.1　平面上的笛卡儿（Cartesian）坐标

最简单的平面坐标系是熟知的**笛卡儿坐标系**。引两条相垂直的直线，它们就构成了**坐标轴**，其交点称为**坐标原点 O**。在每条轴上，我们规定原点的一侧是**正轴**，而另一侧是**负轴**。

如图1.1所示，我们可以取正 $x$ 轴和正 $y$ 轴分别为 $Ox$ 和 $Oy$。通常这样来选取正坐标轴，使得从 $Ox$ 旋转到 $Oy$ 是逆时针方向的。

在平面上任何一点 $P$ 的**坐标**是过 $P$ 作平行于 $ox$ 轴和 $oy$ 轴的直线，它们分别交两轴于 $Y$ 和 $X$。点 $P$ 的坐标 $x$ 和 $y$ 是 $OX$ 和 $OY$ 的长度，如图1.2所示。但是，如果 $X$ 或 $Y$ 位于负轴上，则其坐标就应取长度 $OX$ 或 $OY$ 为负值。

坐标通常按次序（$x$，$y$）括在一起，并记作点 $P(x, y)$。在图1.1中列举了三个点 $P_1(-1, 2)$，$P_2(-2, -1)$，$P_3(3, 1)$，说明了正负坐标的用法。

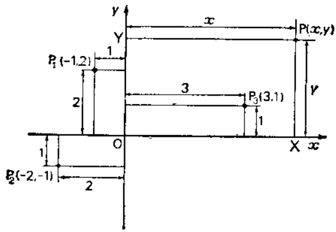


图　1.1

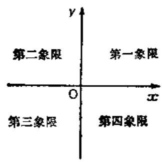


图　1.2

坐标轴将平面分成四个**象限**，习惯上这四个象限的名称，如图1.2所示。

**笛卡儿坐标几何**就是用这样的坐标来描述点、直线、曲线之间的关系。对于平面坐标几何的全面而且严格的论述，读者可以参考在文献目录中列举的教材。我们假定读者已熟悉平面坐标几何学的基本方法，为此，我们只复习某些结果，但不予证明，为的是强调从计算观点来看是重要的某些特点。

### 1.1.2　直线方程

最熟悉的直线方程是

$$y = mx + c \tag{1.1}$$

这里$m$是斜率，$c$是在$y$轴上的截距（参看图1.3)。这是关于$y$的一个**显式**方程，对于任何$x$的值可以直接由它算出相应的$y$值。但是，这种方程有一个缺点：象$x=1$这样的垂直线就不能包括在这种方程里。

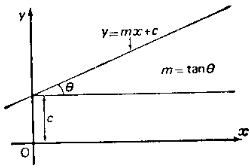


图 1.3

通过两点$(x_1, y_1)$，$(x_2, y_2)$的直线的显式方程（1.1）可表为

$$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x+\frac{y_1x_2-y_2x_1}{x_2-x_1} \tag{1.2}$$

这个方程可以改写成更对称的形式

$$(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1) \tag{1.3}$$

现在这个方程是一个**隐式方程**，对于给定的$x$值，只能由解出这个线性方程来算出$y$，其结果是还原为方程（1.2)。但是，这种隐式方程却包括了垂直线：如果$x_2=x_1$而$y_2\neq y_1$时，我们就得到垂直线的方程$x=x_1$。

虽然垂直线的问题用手算是容易解决的，但当用计算机编制几何问题的程序时，它确实是一件麻烦的事。另外，我们必须避免接近于垂直的直线，因为它可能引起溢出或者带来舍入误差的问题。隐式方程则避免了对于这种直线的特有的规定。它的一般形式可写为

$$ax+by+c=0 \tag{1.4}$$

垂直线不过是$b=0$时的直线。一切隐式方程有一个值得注意的特点：其系数不是唯一确定的，因为用任何倍数$\lambda a, \lambda b, \lambda c$代替$a$，$b$和$c$时，仍然满足这个方程。

为了对任何给定的直线得到一种唯一的描述，可以改变系数的尺度，使得$a^2+b^2=1$和$c<0$。在APT零件程序语言的二维型式中，已包含有这种类型的尺度变换。

### 1.1.3 平面曲线方程

定义一条平面曲线最简单的方法是用**显式**$y=f(x)$，这里$f(x)$是已知$x$的函数，它能用我们熟悉的方法列表，并画出这个函数（参看图1.4)。为此，对列表点之间的曲线的特性作些假定。在已知值之间的插值问题，于附录5中给出了比较详细的介绍。

当这个函数是单值函数且没有垂直切线时，这种显式是足够了。但是，这样就会排除许多实用上重要的曲线，例如圆、椭圆和其它圆锥截线。

方程$x^2+y^2-r^2=0$是一个如图1.5中所示的圆的**隐式方程**。这里$y$的值不是直接用$x$的函数来表示的。如果我们要求用**显式方程**来表示，那么，这个圆必须分成两段，

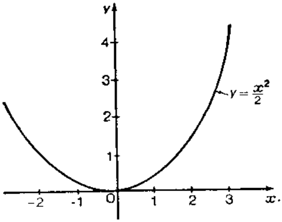


图 1.4

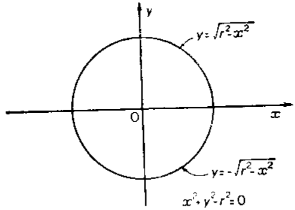


图 1.5

上半段用 $y=+\sqrt{(r^2-x^2)}$ 表示，下半段用 $y=-\sqrt{(r^2-x^2)}$ 表示。这种分段类型又会引起在计算机编程中的麻烦。

将一条曲线方程写成一般的隐式 $f(x, y)=0$，这里 $f(x, y)$ 是 $x$ 和 $y$ 的已知函数。我们可以测定一个点 $P(x, y)$ 是否在这条曲线上，但是不能直接计算曲线上的点，除非这个方程可以化为一个关于 $x$ 或 $y$ 的显式方程。

如果 $f(x, y)$ 在曲线的邻近是 $x$ 和 $y$ 的连续函数，则在用自动方法描绘曲线或者沿着曲线移动机械工具时，可用 $f(x, y)$ 的值来测量与曲线的接近程度，实际上，我们通常要求有连续的切线，只要偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在同一点处都不为零，就可以保证切线的存在和连续。如果还要求有连续的曲率，其充分条件就应当加上二阶偏导数是连续的。

最常用的隐式方程是用圆锥截线的方程。在图1.6到图1.8中给出的这些熟悉的方程，就描述出处于标准位置和标准方向的圆锥截线

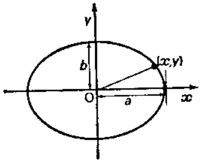


图1.6 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

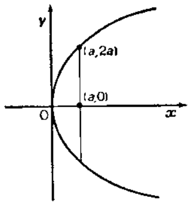


图1.7 抛物线 $y^2-4ax=0$

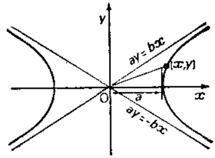


图1.8 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

当研究一般的位置时，所有这些圆锥曲线都可以用对于系数 $a$、$b$、$c$、$f$、$g$、$h$ 的各种不同值的二次方程

$$S = ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \tag{1.5}$$

来表示。特别是，如果$h^2<ab$，这条曲线是椭圆，如果$h^2=ab$它就是一条抛物线，如果$h^2>ab$，它就是一条双曲线，只有在$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$时，二次曲线才退化为一对直线，这一对直线也可能是重合的。正如直线方程（1.4）的情况一样，如果我们要求对于任何给定的二次曲线有唯一的系数，就要以某种惯用的方法来进行系数的尺度变换。

关于圆锥截线和圆柱截线，除了它们在实用上的重要性外，圆锥截线尚有一些相当简单的解析性质，所以在经典的教科书上关于二维坐标几何中用了很大的篇幅来研究它们，例如罗伯荪（Robson)(1940）的书中，在1.2节中就讨论了它们的某些性质。

### 1.1.4 关于点和直线的一些重要公式

1.1.4.1 两点$(x_1, y_1)$与$(x_2, y_2)$之间的距离推算如下。

设距离是$d$，由毕达哥拉斯（Pythagoras）定理，则

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \tag{1.6}$$

1.1.4.2 点$(x_1, y_1)$与直线$ax+by+c=0$之间的距离是$d$，则有

$$d^2=(ax_1+by_1+c)^2/(a^2+b^2) \tag{1.7}$$

1.1.4.3 两条直线$a_1x+b_1y+c_1=0$与$a_2x+b_2y+c_2=0$的交点是$(x, y)$，则有

$$x=\frac{b_1c_1-b_2c_2}{a_1b_2-a_2b_1}\text{而}\ y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1} \tag{1.8}$$

除非$a_1b_2=a_2b_1$，在这种情况下两条直线平行（或可能相同）。

1.1.4.4 两条直线$a_1x+b_1y+c_1=0$与$a_2x+b_2y+c_2=0$之间的夹角是$\theta$，则有

$$\cos\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)}} \tag{1.9}$$

1.1.4.5 如果

$$a_1b_2=a_2b_1 \tag{1.10}$$

则上述两条直线平行。

1.1.4.6 如果

$$a_1a_2+b_1b_2=0 \tag{1.11}$$

则上述两条直线垂直。

### 1.1.5 直线和曲线的交点

为了求两条曲线$f(x, y)=0$和$g(x, y)=0$的交点，我们要联立地解这两个方程。如果它们是两条直线，则其解可直接由式（1.8）给出，即使是两条直线，也会出现异常情况——即当它们互相平行的时候。为了去掉这种异常情形，就需要利用齐次坐标。上述这些以后将在第三章进行讨论，在那里介绍了一般的坐标系和坐标变换。

在$f$和$g$是$x$和$y$的非线性函数的情形下，通常要用迭代的数值计算法来解这个联立方程。在附录4中介绍了关于非线性方程的数值解法。

### 1.1.6 曲线的切线和法线

曲线 $y=f(x)$ 在点$P(x_1,y_1)$ 处的切线可由方程

$$y=y_1+f'(x_1)(x-x_1) \tag{1.12}$$

来表示，这里$f'(x_1)$ 是导数$\frac{df}{dx}$在$x=x_1$处的值（参看图1.9）。

从这个公式很明显地看出，当曲线在$P$点有一条垂直或近似垂直的切线时，就遇到了困难。

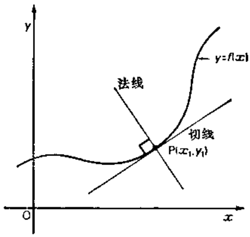


图 1.9

如果用**隐式方程**$g(x,y)=0$来表示曲线，这个困难是可以避免的。这时切线的**隐式方程**可用

$$g_x(x_1,y_1)(x-x_1)+g_y(x_1,y_1)(y-y_1)=0 \tag{1.13}$$

来表示，这里$g_x(x_1,y_1)$ 与$g_y(x_1,y_1)$ 分别是$\frac{\partial f}{\partial x}$与$\frac{\partial f}{\partial y}$在$P$点处的值。

**例** 圆$x^2+y^2-1=0$在点（1，0）处的切线方程可计算如下：

这里

$$g(x,y)=x^2+y^2-1，因此$$

$$g_x=2x \qquad g_y=2y$$

所以$g_x(1,0)=2$，而$g_y(1,0)=0$，从而得所求切线的方程为$2(x-1)+0\cdot(y-0)=0$，这是一条垂直线$x=1$。

注意，当圆或切线是用显式表示时，就得不出这个结果。

过$P$点的法线的显式方程，可用

$$y-y_1=(x-x_1)/f'(x_1) \tag{1.14}$$

来表示。但当曲线在$P$点是水平的时候，这个方程又要出现问题。

相应的隐式方程是

$$g_y(x_1,y_1)(x-x_1)-g_x(x_1,y_1)(y-y)=0 \tag{1.15}$$

这种形式又排除了用显式表示所带来的困难。

### 1.1.7 直线和曲线的参数方程

我们已看到对于直线和曲线的隐式方程，虽然它可以克服多值及垂直切线在显式中

遇到的困难，但它不可能使我们直接求出曲线上的点，并且还需要用数值计算来确定交点。另一种用来描述直线和曲线的方法，是将坐标 $x$ 和 $y$ 对称地都表示为**参数形式。**

把坐标 $x$ 和 $y$ 都表示为一个辅助参数 $t$ 的函数，即表为 $x=x(t)$，$y=y(t)$。例如，圆 $x^2+y^2-1=0$ 可用参数方程

$$x=\cos t$$

和

$$y=\sin t \tag{1.16}$$

来表示，这里 $t$ 的取值范围是 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$（参看图1.10），我们需要指出参数 $t$ 的变化范围，以便描述曲线的一段。例如在图 1.10 中，圆周上的 $ABC$ 那一段弧，用参数方程 (1.16) 和条件 $\frac{2\pi}{3}\leqslant t\leqslant\frac{7\pi}{6}$ 方可完全描述出来。

参数方程能使我们用一系列的 $t$ 值算出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 来画出曲线上的点。

如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是 $t$ 的线性函数，这条曲线就是直线，特别是过点 $P_1(x_1,y_1)$ 和点 $P_2(x_2,y_2)$ 的直线，其参数方程是

$$x=x_1+t(x_2-x_1) \tag{1.17}$$

和

$$y=y_1+t(y_2-y_1)$$

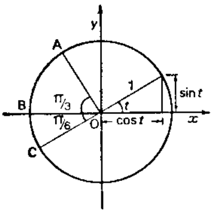


图 1.10

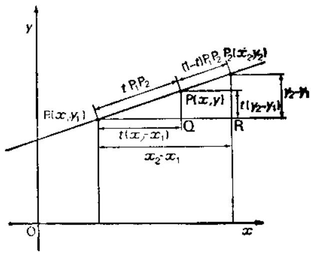


图 1.11

如图1.11所示，这里点 $P(x,y)$ 分割 $P_1$ 和 $P_2$ 所连线段之比为 $t:1-t$。这个结果可利用三角形 $P_1PQ$ 和 $P_1P_2R$ 的相似性来验证。

直线 $ax+by+c=0$ 的参数方程为

$$x=\frac{-ac}{a^2+b^2}+bt$$

和

$$y=\frac{-bc}{a^2+b^2}-at \tag{1.18}$$

与（尺度变换后的）隐式方程不同，参数形式决不是唯一的，用完全不相同的函数 $x(t)$ 及 $y(t)$ 可以准确地表示同一条曲线。参数曲线的性质，我们将在三维曲线和直线的情况中，作更多的讨论。然而，为了完整起见，我们在这里将不予证明地给出参数形式的