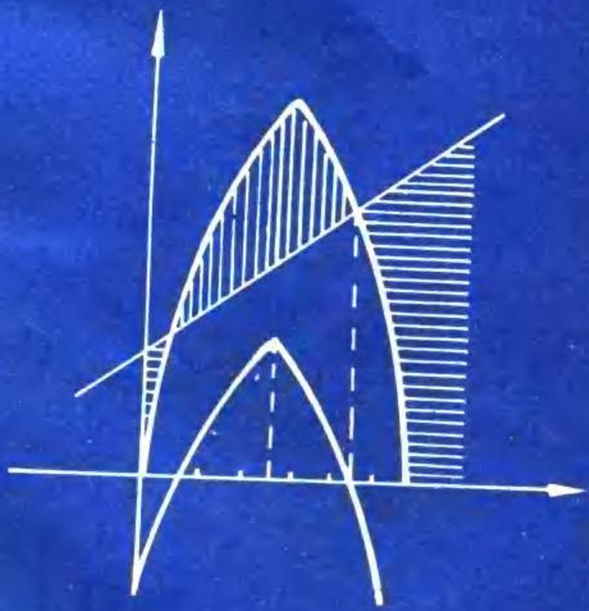
成人高等教育教材

经济应用数学

何良材　何中市　编著



重庆大学出版社

经济应用数学

何良材　何中市　编著

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书是根据国家教委1989年10月审定的《经济数学基础》教学大纲，并结合当前成人教育的特点编写的。全书分三篇共九章。第一篇：微积分学（函数、极限与连续，微分学，积分学等三章）。第二编：矩阵方法及其应用（矩阵方法，线性方程组，线性规划，投入产出法等四章）。第三篇：概率统计基础（概率论基础，数理统计基础等两章）。

本书着重介绍经济数学的基本知识，针对成人教育的特点，特别注重阐明基本概念，基本方法的实质意义、来源背景、作法步骤及应用去向，同时也注重培养学员的抽象思维、应用计算及分析、解决问题的能力。

本书可作为成人教育经济、管理类有关专业的教材，也可供少学时其它专业的师生和实际工作者参考。

经 济 应 用 数 学

何良材　何中市　编著

责任编辑　刘茂林

*

重庆大学出版社出版发行

新 华 书 店 经 销

四川外语学院印刷厂印刷

*

开本：850×1168　1/32　印张：15.25　字数：409千

1993年9月第1版　　1993年9月第1次印刷

印数：0001—5000

ISBN　7—5624—0804—1/F·71　定价：10.50元

(川)新登字020号

编者的话

该书是根据国家教委1989年10月审定的《经济数学基础》教学大纲并结合当前成人教育的特点编写的。

该书内容分三篇共九章。第一篇：微积分学（函数、极限与连续，微分学，积分学等三章）。第二篇：矩阵方法及其应用（矩阵方法，线性方程组，线性规划，投入产出法等四章）。第三篇：概率统计基础（概率论基础，数理统计基础等两章）。

该书初稿内容经作者先后在重庆大学成人教育学院，四川省干部函授学院重庆分院，四川省函授大学重庆分校，陕西机械学院函授部重庆面授中心，重庆成人自考教学班等处讲授试用达数十遍，历时十多年，所成讲义《经济应用数学》又经重庆大学成人教育学院夜大、函大多次使用，这次正式出版经过我们认真修改，锤炼了基本内容，加强了经济应用分析，拓宽了习题与例题范围，增补了自测试题等。

全书第一、三篇由何良材教授编改，第二篇由何中市讲师编改。该书主要有以下特色：

1. 内容简明扼要，密切联系经济应用。既体现内容选取与实际需要相结合，又体现教学理论与经济应用相结合。

2. 削枝强干，脉络清晰，突出重点，讲清难点。对基本概念与基本方法充分阐明其实质意义、来源背景、作法步骤及应用去向，在论述与处理上颇有新意。

3. 在保证大纲内容的科学性与系统性的前提下，不片面追求完整性和严密性。针对成人教育的特点，努力作到适应教学需要的灵活性和适用性。尽力体现大纲“以应用为目的，必需够用为度”的指导思想。

4. 文字叙述上力求深入浅出，通俗易懂。注重培养学员的抽象

思维、应用计算以及分析、解决问题的能力。

5. 书中每章末均有习题，书后附有习题答案，同时还配有各篇自测试题。另外还编有与教材配套的《学习指导书》(含内容提要与重点、范例分析、习题解答及概念思考题等四大部分)。

该书可作为成人教育(夜大、函大、职大、干部培训班等)经济、管理类有关专业及学时数较少的其它专业的教材，也可供经济、管理类相关专业的全日制学生，实际工作者以及兴趣爱好者选用。

全书由重庆大学系统工程及应用数学系主任杨万年教授、刘松教授审阅。重庆大学成人教育学院副院长邹维勤副研究员等自始至终领导并组织该书出版的全部工作。作者在此向他们深表谢意。

由于作者水平有限，错误在所难免，敬请读者不吝赐教。

编著者　何良材　何中市

1993.7　于重庆大学

目　录

第三篇　概率统计基础

第一篇　微积分学

第一章　函数、极限与连续

17世纪笛卡尔把变量引入数学，对数学产生了巨大的影响，使数学从研究常量进一步发展到研究变量，从而产生了一门崭新的学科——微积分学或高等数学. 函数是微积分学研究的基本对象. 极限方法是微积分学研究问题的主要方法. 本章重点介绍初等函数、函数的极限与连续性等基本概念，以及有关性质与运算法则.

第一节　初等函数

1－1　函数概念

在观察自然现象、经济活动或技术过程中，常常会遇到各种不同的变量，它们之间往往不是孤立的，而是相互依赖、相互制约的. 相互依赖的变量之间的确定关系，在数学上就称为函数关系.

例如：

引例1　圆的面积 A 与其半径 r 之间的相互关系为：$A=\pi r^2$，当 r 在 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，就可由上式确定圆面积 A 的对应数值.

引例2　某商品的销售单价为 k(元)，销售数量 x 与销售收入

R(元)之间的相互关系为:$R = kx$,当 x 在自然数集 1、2、3、… 中任意取定一个数值时,就可由上式确定销售收入 R 的对应数值.

引例 3 某气象站用自动记录仪记下一昼夜气温的变化情况.图 1－1 是温度记录仪在坐标纸上画出的温度变化曲线图,其中横坐标是时间 t,纵坐标是温度 T,它形象地表示出温度 T 是随时间 t 变化而变化的规律:对于某一确定的时间 $t(0 \leqslant t \leqslant 24)$,就有一个确定的 T 值与之对应.例如,当 $t = t_0$ 时,由图 1－1,有 $T = T_0$.

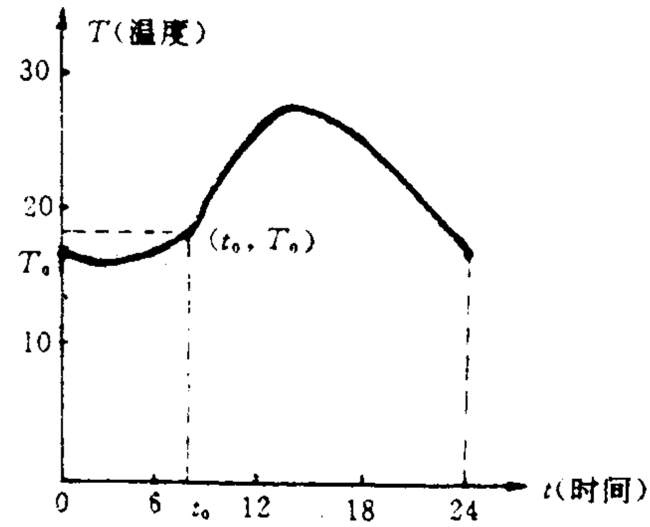


图 1－1

引例 4 某百货商店记录了毛线历年来的月销售量(单位:百公斤),并将近 10 年来的平均月销售量列成表 1.1:

表 1.1

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平均月销售量 S	81	84	45	49	9	5	6	17	94	161	144	123

表 1.1 表示了该商店毛线的销售量 S 与月份 t 之间的相互关系,且当 t 在 1,2,…,12 中任意取定一个数值时,从表中就可确定一个平均月销售量 S 的对应数值.

以上各例,虽其具体意义各不相同,但其共通特点是它们都表达了两个变量之间的相依关系,这种相依关系给出了一种对应法则.根据这一法则,当其中一个变量在其变化范围内任取一个数值时,另一个变量就有确定的值与之对应.两个变量之间的这种对应关系就是函数概念的实质.于是,我们抽象成如下函数定义.

一、函数定义

定义 1.1 设有两个变量 x 与 y,若当变量 x 在其变化范围内

任取一个数值时，变量 y 按照一定的法则，总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数. 记作

$$y = f(x)$$

其中 x 叫自变量，y 叫因变量，自变量 x 可取值的全体叫函数的定义域，常记为 D；对应 x 的函数值的全体叫函数的值域，常记为 E. 两者一般都用区间表示，有时也用不等式表示. 对于任意 $x \in D(f)$，若 y 只有一个值与之对应，则称 $y = f(x)$ 为单值函数. 若 $|f(x)| \leqslant M(>0)$ 对于任意 $x \in D(f)$ 成立，则称 $y = f(x)$ 在 $D(f)$ 内有界.

函数的表示法通常用表格，图象或解析式（即公式）来表示.

两个函数相同：指的是定义域相同、对应法则相同. 因此函数与变量用什么字母表示无关. 如 $y = f(x)$ 与 $s = f(t)$ 表示同一个函数；又如，$f_1(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ 与 $f_2(x) = 1$ 表示同一个函数，因为这两个函数的定义域相同、对应法则亦相同；又再如，$y_1 = x$ 与 $y_2 = |x|$ 是不同的两个函数，因为它们的定义域虽然相同，但其对应法则不同.

二、函数定义域的求法

关于函数定义域 D 的确定，一般原则：

对于反映实际问题的函数关系，其 D 由所研究的实际问题确定，如引例 3 中的 $D = [0,24]$.

对于纯数学上的函数关系，其 D 规定为使函数表达式保持有意义的一切 x 取值的全体.

例 1 求下列函数定义域：

(1) $y = \dfrac{1}{\lg(3x-2)}$；　　(2) $y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$；

(3) $y = \arcsin\dfrac{x-1}{5} + \dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$.

解 (1) 当 $3x - 2 > 0$ 且 $3x - 2 \neq 1$ 时，即 $x > \dfrac{2}{3}$ 且 $x \neq 1$ 时，$y = \dfrac{1}{\lg(3x-2)}$ 才能取得确定的实数值，故 $y = \dfrac{1}{\lg(3x-2)}$ 的

定义域为

$$D=(\frac{2}{3},1)\cup(1,+\infty),$$

或

$$D=\{x\mid\frac{2}{3}<x<+\infty,且\ x\neq 1\}.$$

(2) 当 $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0$ 时,即 $x\neq 0$ 且 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,$y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 才能取得确定的实数值,故 $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为

$$D=[-1,0)\cup(0,1]$$

或

$$D=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1,且\ x\neq 0\}.$$

(3) 当 $\left|\frac{x-1}{5}\right|\leqslant 1$ 且 $x^2<25$ 时,即 $|x-1|\leqslant 5$ 且 $|x|<5$,即 $-4\leqslant x\leqslant 6$ 且 $-5<x<5$;亦即 $-4\leqslant x<5$ 时,

$y=\arcsin\frac{x-1}{5}+\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 才能取得确定的实数值,故

$y=\arcsin\frac{x-1}{5}+\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域为

$D=[-4,5)$ 或 $D=\{x\mid -4\leqslant x<5\}$.

三、函数符号 $f(x)$ 的使用

函数 $y=f(x)$ 中的"$f(\quad)$"表示函数关系中的对应法则,即对每一个 $x\in D(f)$,按法则 $f(\quad)$ 有确定的 y 值与之相对应.

$f(x)$ 表示将法则 $f(\quad)$ 施用于 x,如果把 $f(x)$ 中括号内的 x 转换成 $D(f)$ 中的某个具体数值 x_0 或表示数值的字母 a 以及某个数学式子 $\varphi(x)$,则表示将法则 $f(\quad)$ 施用于那个具体数值 x_0 或表示数值的字母 a 以及那个数学式子 $\varphi(x)$. 具体作法,看以下各例.

例 2 求函数 $f(x)=2x^2-1$ 在 $x=0,x=-2,x=x_0$, $x=-\frac{1}{t},x=\sin\frac{\pi}{2},x=x_0+h,f(x)$ 处的函数值或函数.

解 用符号表示出其函数的对应规律:

$f(\quad) = 2(\quad)^2 - 1.$

$f(0) = 2 \times 0^2 - 1 = -1,$

$f(-2) = 2 \times (-2)^2 - 1 = 7,$

$f(x_0) = 2 \times x_0^2 - 1 = 2x_0^2 - 1,$

$f(-\frac{1}{t}) = 2 \times (-\frac{1}{t})^2 - 1 = \frac{2}{t^2} - 1$

$f(\sin\frac{\pi}{2}) = 2 \times (\sin\frac{\pi}{2})^2 - 1 = 1,$

$f(x_0 + h) = 2 \times (x_0 + h)^2 - 1 = 2x_0^2 + 4hx_0 + 2h^2 - 1$

$$\begin{aligned} f[f(x)] &= 2 \times [f(x)]^2 - 1 = 2(2x^2 - 1)^2 - 1 \\ &= 8x^4 - 8x^2 + 2 - 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1. \end{aligned}$$

例 3 设 $\varphi(x) = \frac{1}{x}(x \neq 0)$,求函数增量

$\triangle\varphi(x) = \varphi(x + \triangle x) - \varphi(x)$; $\varphi[\varphi(x)]$

解 用符号表示出其函数的对应规律:

$\varphi(\quad) = \frac{1}{(\quad)}.$

$$\begin{aligned} \triangle\varphi(x) &= \varphi(x + \triangle x) - \varphi(x) \\ &= \frac{1}{x + \triangle x} - \frac{1}{x} = \frac{-\triangle x}{x(x + \triangle x)}, \end{aligned}$$

$$\varphi[\varphi(x)] = \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$

例 4 设 $F(t) = e^t$,求证:

(1) $F(-t) \cdot F(t) - 1 = 0$;

(2) $F(x) \cdot F(y) = F(x + y)$.

证 用符号表示出其函数的对应规律:

$F(\quad) = e^{(\quad)}.$

(1) $$\begin{aligned} F(-t) \cdot F(t) - 1 &= e^{-t} \cdot e^t - 1 \\ &= \frac{e^t}{e^t} - 1 = 1 - 1 = 0; \end{aligned}$$

(2) $F(x) \cdot F(y) = e^x \cdot e^y = e^{x+y} = F(x + y).$

例 5 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}\quad(x\neq 1)$，求证：

(1) $f(f(x))=x$；

(2) $f(f(f(x)))=f(x)$，并求 $f(f(f(0)))$.

证 用符号表示出其函数对应规律：

$$f(\quad)=\frac{(\quad)}{(\quad)-1}.$$

(1) $\because f(f(x))=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}=\dfrac{x}{x-1}/(\dfrac{x}{x-1}-1)$

$$=\frac{x}{x-1}/\frac{1}{x-1}=x,$$

$\therefore f(f(x))=x.$

(2) $\because f(f(f(x)))=\dfrac{f(f(x))}{f(f(x))-1}$

$$=\frac{f(x)}{f(x)-1}/(\frac{f(x)}{f(x)-1}-1)$$

$$=\frac{f(x)}{f(x)-1}/\frac{1}{f(x)-1}$$

$$=f(x),$$

$\therefore f(f(f(x)))=f(x).$

$\because f(f(f(x)))=f(x)=\dfrac{x}{x-1},$

$\therefore f(f(f(0)))=f(0)=\dfrac{0}{0-1}=0.$

例 6 已知 $f(2x-1)=x^2-\dfrac{1}{4}$，求 $f(x)$.

解 令 $2x-1=u$ 有 $x=\dfrac{u+1}{2}$.

于是 $f(u)=(\dfrac{u+1}{2})^2-\dfrac{1}{4}$

$$=\frac{1}{4}(u^2+2u+1)-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{u}{4}(u+2),$$

$\therefore f(x)=\dfrac{x}{4}(x+2).$

四、反函数

在 $y=2x+1$ 中，若将 y 看作自变量，x 看作因变量，由此确定 x 是 y 的函数 $x=\dfrac{y-1}{2}$，称 $x=\dfrac{y-1}{2}$ 是 $y=2x+1$ 的反函数，习惯上把自变量记作 x，因变量记作 y，所以 $y=2x+1$ 的反函数记为 $y=\dfrac{x-1}{2}$. 这种习惯的依据是：函数与函数变量用什么字母表示无关.

一般由 $y=f(x)$（直接函数）确定 x 是 y 的函数：$x=\varphi(y)$，称 $x=\varphi(y)$ 为 $y=f(x)$ 的**反函数**. 习惯上记 $x=\varphi(y)$ 为 $y=\varphi(x)$，通常 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的两条曲线，见图 1—2.

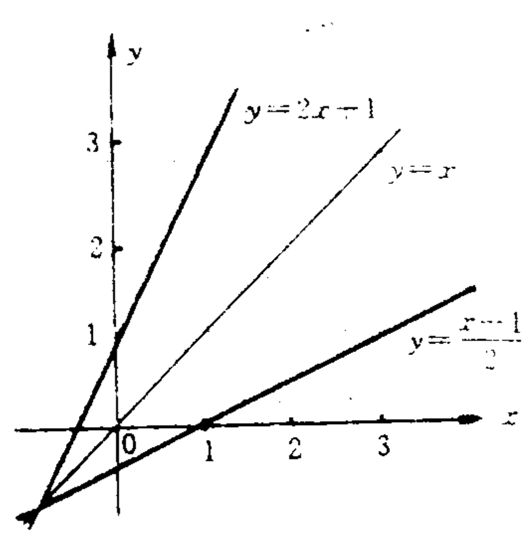


图 1 － 2(a)

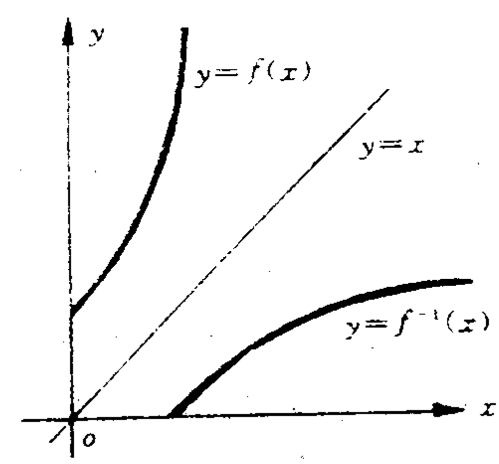


图 1 － 2(b)

这里必须指出：反函数是建立在一一对应的基础上的，如果函数关系不是一一对应，那么 $y=f(x)$ 在整个定义域上就没有反函数. 但若将定义域划分成几个单调区间，则可在各个单调区间上求反函数.

例如，$y=x^2$ 的反函数问题. 由 $y=x^2$ 解得 $x=\pm\sqrt{y}$，而 $x=\pm\sqrt{y}\ (y\geqslant 0)$ 的函数关系不是一一对应，所以 $y=x^2$ 在定义