

生活与科学文库

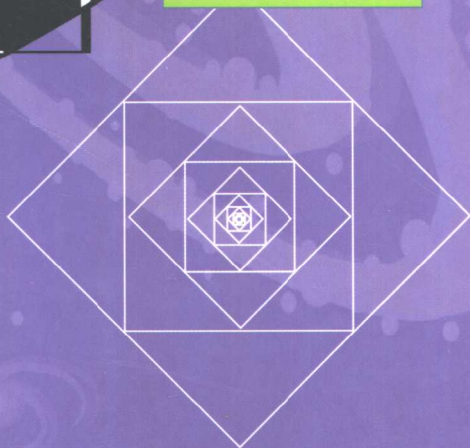
- 传说故事中的无穷
- 生活中的无穷
- 数学世界的无穷
- 无穷的复兴新时期
- 面向无穷的新挑战

〔日〕仲田纪夫 著

无穷的奥秘

生活与科学 |
文库

及其演变



科学出版社

生活与科学文库

无穷的奥秘 及其演变

〔日〕 仲田纪夫 著
丁树深 译

科学出版社

「無限の不思議」 仲田紀夫

©Norio Nakada

All rights reserved

First published in Japan in(1992)by Kodansha Ltd. Tokyo

Chinese version published by Science Press,

Chinese Academy of Sciences

Under license from Kodansha Ltd.

图字:01-1999-3295

图书在版编目(CIP)数据

无穷的奥秘及其演变/[日]仲田纪夫著;丁树深译.
-北京:科学出版社,2001

(生活与科学文库)

ISBN 7-03-009150-7

I. 无 · II. ①仲 ②丁 III. 无穷-数学理论-青
少年读物 IV. O1 49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 03559 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码 100717

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

定价: 10.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈北燕〉)

前言

“数学是讲述无穷的科学。”

这句话是代表 20 世纪数学界辉煌发展的著名数学家、美国普林斯顿高级研究所外尔教授*的至理名言。

乍听起来,这话有些奇特而难以捉摸,但无穷确实是蕴涵着无限奥秘的怪物,从日常生活到深奥的哲学处处都有它的影子。记得小时候临睡前,妈妈常在讲故事时说:“那是很久很久以前的事啦!”这里的“很久很久以前”,或许会让人认为那是无限遥远的过去。在小学里最初学到的自然数,可认为是最有代表性的无穷。由此可见,无穷和人的关系极为密切。

为便于读者了解本书中提到的著名数学家,正文中以*号标记并在其出现页码的末行附加译者补充的英文原名、生卒年等摘要说明。——译者注

* 外尔 (Weyl H., 1885~1955) 20 世纪美籍德国数学家兼物理学家。

甚至在平时的对话、电视、广播和报刊等新闻媒体中，也经常使用“无穷”一词来进行各种意味深长的描述。诸如父母对子女们的无穷关照、人类的智慧无穷、无穷无尽的幻想世界以及神力巨大无穷等等。由这些话里不难体会“无穷”一词博大深远的含义。实际上，无穷的含义远不止如此，无穷小、无穷论证法、无穷操作、无穷远点以及循环论证法、平行线无限平行、点的无穷等也均属于无穷的范畴。

现在，让我们再从英语角度来看，英语中的一些无穷含义的辞汇。

infinite 针对人类智慧而言，是无法计量的无穷无尽

limitless 针对财富和能力而言，是有限之中的无限

boundless 漫无边际的

endless 没完没了的

因此，任何人都值得认真思考应该怎样理解无穷。作者曾让 50 位大学生每人各写一篇题为“由无穷所想到的”简单报告。正如所预料的那样，答案是千差万别的，并且很难在本书中重点介绍。为此，只好从数学角度列表分类，如后面表所示。这样，读者或许就可对“无穷”的种类一目了然了。

下面再来看看无穷的概念及它对数学发展的影响。

人类社会中的无穷概念,来源于公元前 6 世纪地中海克里特岛诗人、埃比梅尼斯的循环(无穷)论证法。在他的论证中,曾经引用过这样一句名言:“全部克里特岛人都说谎。”

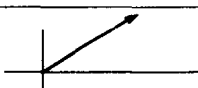
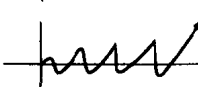
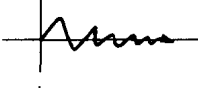
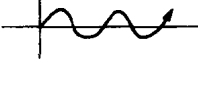
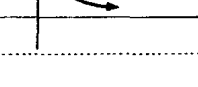
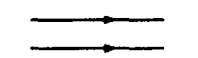
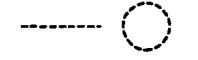
公元前 5 世纪的“芝诺悖论”(后述)是当时数学顺利发展的绊脚石,这种影响曾经延续 2000 年之久,以至公元 17 世纪之前的数学主流,一直都在回避无穷,从而迫使哲学家和数学家不得不深入思考无穷到底是怎么回事。

无穷概念是伴随着连续、分割、时间、运动、变化等诸多问题而存在的,所以很难理解。为什么巧妙地利用了这一切的“芝诺悖论”能给数学带来如此之大的混乱呢? 20 世纪诞生的“集合论”虽然澄清了大部分无穷的概念,但仍有许多问题尚待进一步研究。

本书就像堂·吉珂德似的,试图向隐藏于人类社会中的这一“无穷”怪物挑战,而且不仅从数学观点,还要从更广阔的视野来眺望“无穷”。

作者

1992 年 12 月

类 型	图 像
1. 发散型 ①规律性的 ②无规律的	 
2. 收敛型 ①规律性的 ②无规律的	 
3. 单调型	
4. 循环型	
5. 双向型	
6. 直线型	
7. 同向型	
8. 同质型	
9. 相似型	
10. 点集合型	

示意表

数学例子	社会现象中的例子
自然数	老鼠会(老鼠繁殖按等比级数增加)
无穷级数之和	地球的变暖
追踪曲线	埃菲尔铁塔底座
近似值(π 、 $\sqrt{\quad}$)、概率实验	往地面降落的橄榄球
三角函数曲线	发动机运转
循环小数	驱魔符
反比、二次函数曲线	分道扬镳
往左、往右都行	爱心无限
平行且并行	平行作业
同类	以友归类
分数、图形	千篇一律
点集合	千里之行始于足下



沿此斜线剪下一角，收集10枚，寄至科学出版社发行处，将寄赠您选定的本套丛书中的一本。



内 容 简 介

◎ 本书是写给青少年数学爱好者的一本趣味数学。书中通过一些具体实例，图文并茂、通俗易懂地介绍了数学领域和社会现象中与“无穷”相关的数学学科的产生与发展，以及自然界与人类社会生活中常见而不可思议的各种无穷。

(Z-0357.0101)

责任编辑◇杨淑兰

封面设计◇王 浩



前言	(i)
第一章 传说故事中的无穷	(1)
§ 1.1 无限(无穷)的形象	(1)
§ 1.2 童话和《一千零一夜》的故事	(4)
§ 1.3 魔法世界和数学	(12)
☆ 茶余杂谈 镜子中看到的无穷景观	(16)
第二章 生活中的“无穷”陷阱	(17)
§ 2.1 日本单口相声中有关无穷的滑稽故事	(17)
§ 2.2 谣言的传播	(24)
§ 2.3 “老鼠会”的诡计	(27)
☆ 茶余杂谈 老鼠会与等比级数	(30)
第三章 无穷及与之相关的笑柄	(32)
§ 3.1 各式各样的难题	(32)
§ 3.2 绘画中的形貌变换	(38)
§ 3.3 曲线无限和永恒运动	(41)
☆ 茶余杂谈 古老的巴比伦塔	(46)
第四章 走进数学世界的无穷	(48)

§ 4.1 循环论证法中的“克里特岛人都说谎”	(48)
§ 4.2 “芝诺悖论”及其后果	(52)
§ 4.3 阿基米德穷竭法	(57)
☆ 茶余杂谈 回顾历代攀登无穷高峰的示意图	(62)
第五章 无穷的复兴新时期	(63)
§ 5.1 人类的精神生活与无穷	(63)
§ 5.2 无穷的复兴变化及其手段	(67)
§ 5.3 社会问题及其解决事例	(78)
☆ 茶余杂谈 无穷远点的构思	(87)
第六章 数学和无穷话题集	(89)
§ 6.1 无穷与有限的关系	(89)
§ 6.2 无穷的相反利用	(98)
§ 6.3 运动着的静止卫星	(107)
☆ 茶余杂谈 远在“十万亿佛土”之遥的极乐世界	(118)
☆ 茶余杂谈 宇宙的无穷	(119)
第七章 面向无穷的新挑战	(121)
§ 7.1 无穷论证法及其矛盾	(121)
§ 7.2 波尔查诺的“无穷悖论”	(127)
§ 7.3 康托尔的“集合论”	(135)
☆ 茶余杂谈 无穷的运算非同寻常	(145)
第八章 当前新数学时代的无穷	(147)
§ 8.1 随机无序世界	(147)
§ 8.2 几何学与变换群	(156)
§ 8.3 向往无穷之梦及苦恼	(162)
☆ 茶余杂谈 无穷与安全的相对关系	

.....	(170)
附录:话题延伸与答案.....	(172)
结束语	(182)
译后记	(183)
索 引	(184)

第一章

传说故事中的无穷

§ 1.1 无限（无穷）的形象

无限或无穷均为没有限度和无穷尽的意思。当你初次耳闻目睹这个词汇时，你的脑海中会浮现什么样的形象呢？

首先，让我们整理一下本书前言中那 50 位大学生的答案，看看一般人对此有些什么印象。这些答案大致都来自人们的日常生活和数学两个方面。

(1) 用形容词表现的无穷

- 宇宙的 (19 人)
- 永恒的 (10 人)
- 不断延续的 (5 人)
- 无休止的 (3 人)
- 无底的或无边无沿没有尽头的 (3 人)
- 神秘的
- 雄伟的

- 超人的
- 神仙世界的

(2) 从心理角度表现无穷

- 越想越疯狂 (3 人)
- 捉摸不定
- 不清楚从头到尾的一个完整形象
- 无法想象的形象
- 漫无边际、一眼望不到对岸有什么
- 人类社会无法估算的无垠空间
- 应有尽有
- 无穷大、无穷小
- 一切都包含在内
- 先前不知道的
- 像黑洞似的一团漆黑
- 过去、现在、将来一直都存在的

(3) 按数学表达方式描述无穷

- 无穷远那样宽广或趋于 0 而不等于 0
- 不明确具体多大，所以“无”形象
- 无论多么逼近，却永不相切也不相交
- 感觉像是收敛，但却无休止地循环演变

以上这些表达，可直截了当地用数学术语归纳整理如下表中所示：

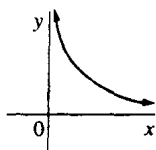
无穷的数量表达

• 整数 $\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\dots$

• 循环小数 $\frac{1}{7} = 0.142857142857\dots$

• 平方根 $\sqrt{3} = 1.7320508\dots$

• 反比图形



• 无量大数(古时候对大数的命名)

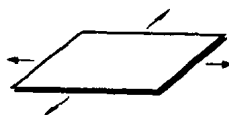
• ∞ (无穷大符号)

无穷的图形表达

• 直线



• 平面



• 圆周率

$$\pi = 3.1415926\dots$$

• 麦比乌斯带*



* 见 43 页。

如果这样考虑，数学和哲学所说的真实无穷却只存在于我们的头脑思维之中。

海岸边的砂粒数目和天空中的星星都有惊人之多，但却不是无穷的。这里暂且先不严格地讲这类问题。

现在，让我们回到童年时期的心理状态，所以一切都从头开始吧。

§ 1.2 童话和《一千零一夜》的故事

《艾丽丝漫游奇境记》是世界著名童话故事之一。这个童话是从下面的故事开始讲起的。

在一个阳光明媚的日子，艾丽丝坐在水池旁的树阴凉儿里正在听姐姐读着一本书。暖洋洋的光线透过大树的枝叶，形似夜晚满天星斗投射在艾丽丝身上，使她渐渐困倦而进入梦乡。突然，一只小白兔慌慌张张地喊叫：“快着点呀！快着点呀！”并从艾丽丝身边匆匆窜过，于是艾丽丝好奇地也跟着跑去，然而她却惊恐万状般地掉进一个幽深的洞里，使艾丽丝惶然不知所措。

掉进深洞里的艾丽丝，拾起地上的药瓶喝了一口后，她突然变得越来越小，但刚才装药水的瓶口看起来却像隧道口那样，逐渐变小而趋向无穷小。尔后，她又吃了药瓶旁边放着的饼干，这时她又变得越来越高大并且趋向无穷大。

这个童话的作者是英国人刘易斯·卡罗尔。他也是《镜子王国里的艾丽丝》童话故事的作者。据说，他的一位牧师朋友有三个小女孩，他的童话故事都是