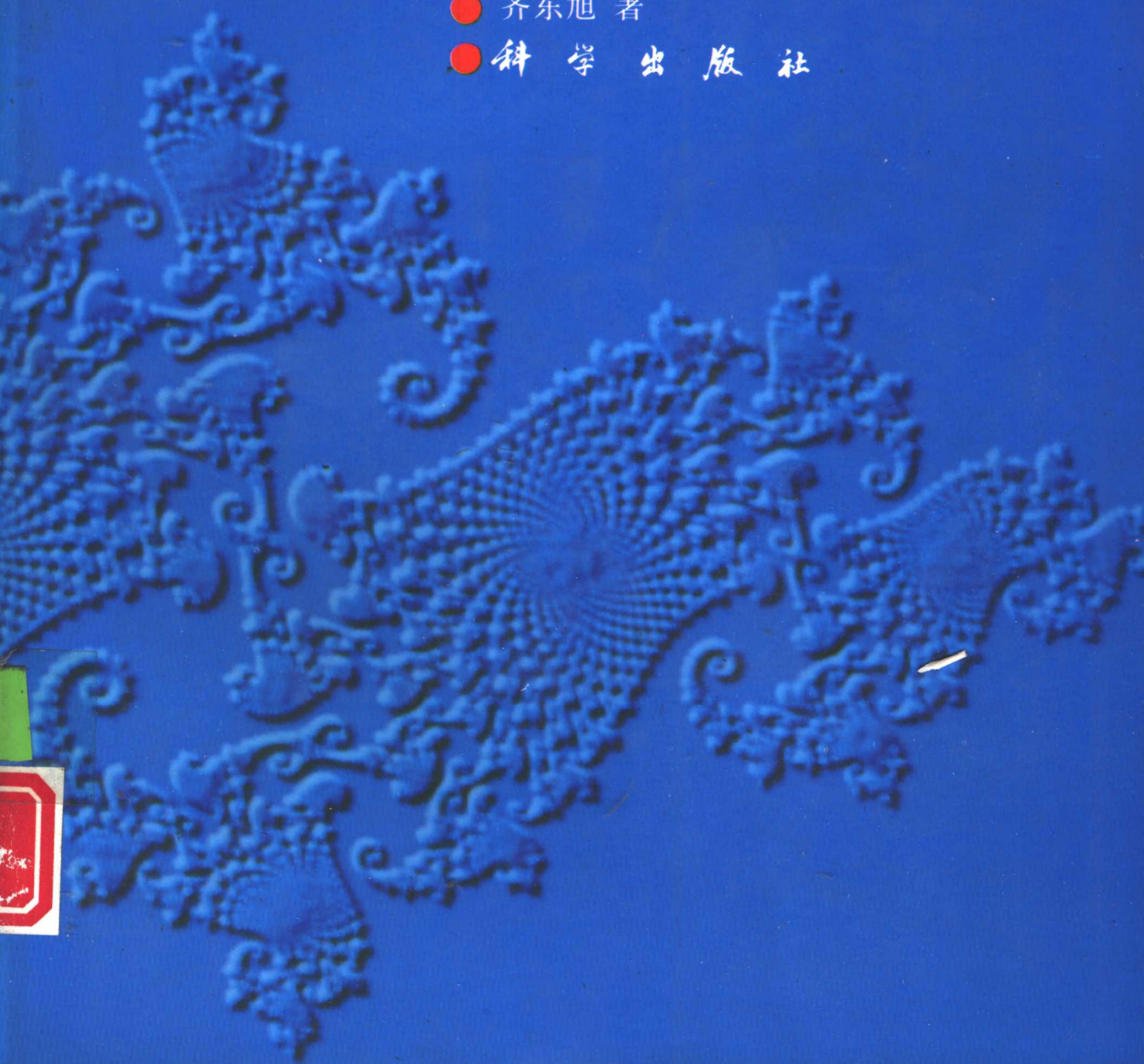
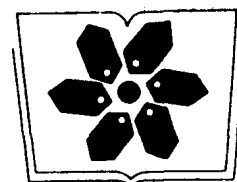


分形及其 计算机生成

● 齐东旭 著

● 科学出版社





中国科学院科学出版基金资助项目

分形及其计算机生成

齐东旭 著

科学出版社

1994

(京)新登字 092 号

内 容 简 介

本书从应用的角度论述分形及其计算机生成的方法. 内容包括: 经典分形例子的分析、计算机生成分形的 L 系统及迭代函数系统实现过程与技巧、分形维数问题及分形图象压缩方法等. 本书反映了作者近十年来关于分形生成研究的成果.

全书共九章. 前三章概述什么是分形及怎样在计算机上生成分形, 这里包括分形的背景材料和典型有效的计算机算法; 第四章至第六章论述分形生成以及数学中形和数的关联与转化这个基本问题的联系, 强调计算几何与分形几何两类方法的沟通; 第七章讨论了正交函数, 这是一般分形著作中未见涉及的内容. 由于分形生成技巧可以用来构造新的正交基, 所以这个内容有助于分形方法向信号处理与小波分析方面发展.

本书可供高等院校数学、物理、化学、计算机、生物与医学、电子工程、建筑、艺术设计、影视动画制作、工业产品造型等领域及社会科学中的有关专业作为教材, 也可供从事计算机绘图、数字图象处理、小波分析等工作的研究人员和工程技术人员参考.

分形及其计算机生成

齐东旭 著

责任编辑 周丽娜

出版

北京西城报北街 16 号

邮政编码: 100717

化学工业出版社印刷厂印刷

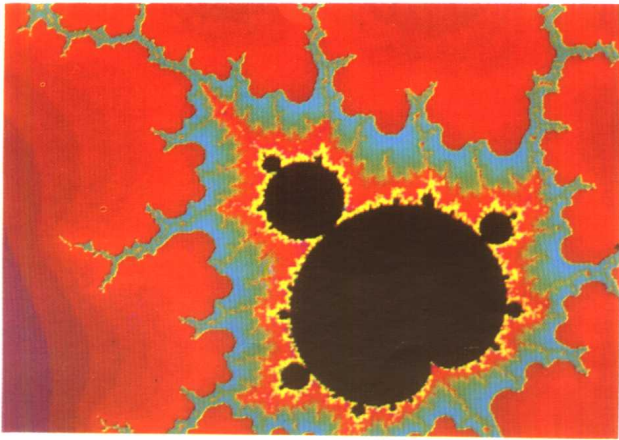
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

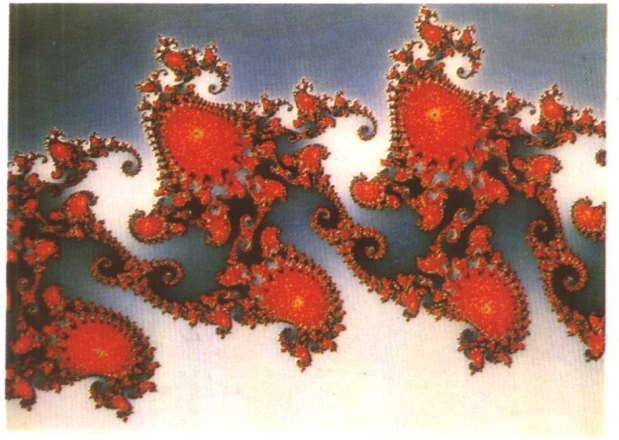
1994 年 11 月第 一 版	开本: 787×1092 1/16
1994 年 11 月第一次印刷	印张: 13 3/4 插页: 1
印数: 1—4 000	字数: 313 000

ISBN 7-03-004237-9/TP·380

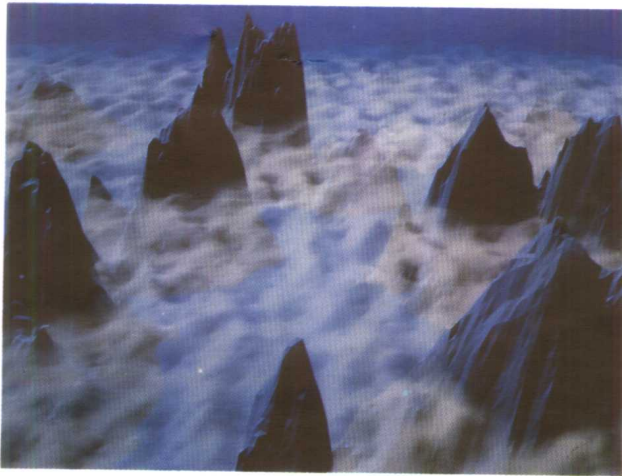
定价: 20.00 元



1. Mandelbrot 集



2. Julia 集



3,4. 分形山 (邢丽萍, 1992)



5. 四元数二次映射之下的一个 Julia 集



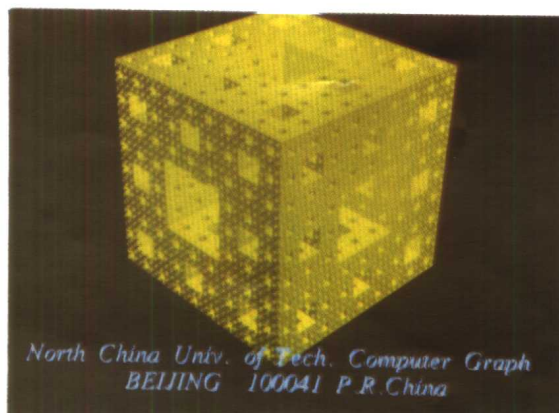
6. L 系统生成的花枝 (王方石, 1993)



7. Mandelbrot 肖像, 计算机绘制



8. 分形景物



10. Sierpinski 海绵 (电影片《相似》的镜头之一)



9. 用 Dehlinger 的 Line Art 绘制的 Dehlinger 肖像



11. 计算机平面设计

前 言

1975年, B. Mandelbrot 出版了他的专著《分形, 机遇和维数》, 这是分形理论诞生的标志. 10年之后, Mandelbrot 对分形的开创性工作使他获得 1985 年的 Barnard 奖章. 该奖章是颁发给那些在物理科学或其它自然科学中有所发现, 或在有益于人类的、新颖的科学应用中有所发明的人. 在每 5 年颁发一次的获奖者名单中, 有爱因斯坦、费米等科学家, 可见分形理论在科学上的地位和影响.

近 20 年来, 分形的研究受到非常广泛的重视, 其原因在于分形既有深刻的理论意义, 又有巨大的实用价值. 分形向人们展示了一类具有标度不变对称性的新世界, 吸引着人们寻求其中可能存在的新规律和新特征; 分形提供了描述自然形态的几何学方法, 使得在计算机上可以从少量数据出发, 对复杂的自然景物进行逼真的模拟, 并启发人们利用分形技术对信息作大幅度的数据压缩.

在分形的诸多研究课题中, 分形的计算机生成问题具有明显的挑战性. 它使传统数学中无法表达的形态(如山脉、花草等)得以表达, 还能生成一个根本“不存在”的图形世界. 分形在制造以假乱真的景物方面的进展和潜在的前途, 使得无论怎样估计它的影响也不过分. 本书正是围绕分形在计算机上的生成方法这一问题而展开讨论的.

本书共分九章, 概括起来有如下内容:

1. 介绍分形的典型背景材料, 回答什么是分形这样一个读者首先关心的问题;
2. Lindenmayer 方法(简称 L 系统)和迭代函数系统(简记 IFS)在计算机生成分形中的作用和实现的基本技巧;

3. 形与数的关联与转化这一数学基本问题如何体现在分形结构的生成之中;

4. 分形与计算几何的内在联系, 分形技巧在构造正交函数中的作用.

此外, 用简短的篇幅谈及分形维数问题、分形图象压缩问题. 这部分内容非常重要, 但超出了本书的原定范围, 对此有专门兴趣的读者请阅读本书中提供的有关文献.

作者试图在如下几方面形成本书的特点:

首先, 我们没有按通常的体系一开始就讨论分形维数, 而是在最后安排这样的内容. 这样做是希望不是数学专业出身的读者不被某些抽象的定义所困惑. 书中加进许多通常分形书籍不太讨论的内容, 如数与形的表示(第四章)、计算几何学方法(第五章)、正交函数(第七章), 这些内容既反映了作者的研究心得与体会, 也为分形向新颖的研究热点(如小波分析)靠拢和渗透提出需要解决的问题.

本书注重实用. 为此, 分形的生成思想贯穿于本书的主要章节. 书中对典型的方法附有简短的程序, 并有较多的图例说明处理的结果. 大部分图例都是作者及其同事们在计算机上绘制或检验过的, 因此, 有利于初次涉足分形生成的读者掌握书中内容.

本书的读者不必是数学家, 但希望他们能像数学家那样思考问题.

顺便指出, 本书插入了若干科学家的肖像, 不是单纯地为了记述他们的有关贡献, 其

另外的目的是提供计算机生成复杂图象的例子. 这些画像都是作者在计算机上逐个采用交互式绘图方式完成的. 原图为彩色, 现以黑白图片印刷于书中.

本书是在为研究生开设计算几何与分形几何必修课的讲稿基础上写成的. 我们曾在《图形及其计算机探索》(合作者梁振珊、马驷良, 吉林大学出版社, 1989)一书中将计算几何、拼嵌群、分形与相似、数学实验等内容编织在一起, 形成一个“拼盘”. 结果出人意料, 这个“拼盘”很合学生的胃口, 印刷仅 500 册的该书一售而光, 作者只好对索取书的读者表示歉意. 受此影响, 现在呈现在读者面前的这本书, 形式上看也像个拼盘, 但我们相信那些想深入研究分形在不同领域应用的读者会发现各部分内容之间的有机联系. 这些与“众”不同之处, 也许正是本书问世的一点价值所在.

本书是在实践基础上形成文字的. 值得一提的是作者主持研制的我国第一部全用计算机编程制作的科教电影片《相似》, 它于 1991 年酝酿, 1992 年夏完成全部制作, 1993 年经电影局批准正式发行. 这是一部与分形有密切关系的作品, 它介绍了自然界中的相似性, 制作时也采用了分形生成技巧. 在与北京科学教育电影制片厂艺术家们合作的日子, 进一步明白了许多艺术手法及其对分形生成的需求.

1986 年以来, 作者的三项有关分形的课题得到了国家自然科学基金委员会的资助. 本书中反映的研究成果就是在他们的有力支持下取得的.

中国科学院科学出版基金专家委员会对本书的肯定, 使之列入科学出版基金资助项目. 唐荣锡教授、刘慎权教授、陶懋颀教授、彭群生教授、金以文教授多次审阅本书的提纲和初稿, 并提出许多宝贵的意见. 本书中反映的作者的进展, 一直得到我的老师李岳生教授的关心和指导.

为保证本书内容的科学性与严谨性, 与我共事的一些青年同志和研究生, 协助我做了许多查找资料及用计算机验证例题方面的工作. 孟丽青同志承担了本书的计算机录入和排版工作.

本书的问世, 不仅仅是作者的努力结果, 而且还凝结了许多人的心血. 对热情指导和帮助过我的老师、学生、同事、朋友在此一并表示衷心的感谢. 没有他们的关心和支持, 本书的出版是不可能的.

因作者水平有限, 书中的错误和疏忽在所难免, 敬请读者批评指正.

借本书出版之机, 向我的妻子王和园表示谢意. 她的理解和操劳使我得到了一个安心写作的环境.

最后, 借分形之美, 向跨越世纪的青年读者的光辉未来表示良好的祝愿.

齐东旭

1994 年 6 月 6 日于北京

目 录

引 言	1
第一章 什么是分形	4
1.1 从不动点定理谈起	4
1.2 Cantor 集	6
1.3 生成元	9
1.4 Weierstrass 反例	11
1.5 Peano 曲线	15
1.6 李-Yorke 的混沌概念	19
1.7 Feigenbaum 的实验	20
1.8 Julia 集与 Mandelbrot 集	24
1.9 什么是分形	30
第二章 L 系统	32
2.1 简单 L 系统	32
2.2 分形的生成	34
2.3 边改写与点改写	36
2.4 图例	39
2.5 分支结构	42
2.6 参数 L 系统	48
2.7 关于 L 系统的几点注记	51
第三章 迭代函数系统	53
3.1 混沌游戏	53
3.2 仿射变换与拼贴定理	55
3.3 IFS 生成分形的典型例子	59
3.4 IFS 的渲染绘图	63
3.5 关于 IFS 的几点注记	66
3.6 分形插值	68
第四章 数与形的表示	76
4.1 记数法	76
4.2 复平面上的分形	80
4.3 四元数	84
4.4 超复数系与代数	86
4.5 坐标	89
4.6 从低维到高维	94

4.7	高维图示问题	96
4.8	无穷维空间	99
第五章	计算几何学方法	105
5.1	调配函数	105
5.2	构造调配函数的 URN 模型	108
5.3	Bézier 曲线	111
5.4	样条函数与双尺度方程	118
5.5	盈亏修正	124
5.6	四点格式与两点格式	126
第六章	图象矩阵的变换	132
6.1	图象矩阵的正交表示	132
6.2	矩阵的 Kronecker 乘积与幻方	134
6.3	Hadamard 矩阵	140
6.4	Arnold 变换	143
6.5	生命游戏	145
第七章	正交函数	151
7.1	正交化过程及 Legendre 多项式	151
7.2	正交样条函数	154
7.3	Haar 函数系与 Walsh 函数系	160
7.4	三角域上的正交函数	166
7.5	压缩复制过程	170
7.6	分段线性的正交函数	172
7.7	斜变换与正交函数系的关系	176
7.8	分段 k 次多项式正交系	179
7.9	U 系统理论概述	185
第八章	关于分形维数	188
8.1	分形维数的简单定义	188
8.2	Hausdorff 维数	190
8.3	维数计算举例	192
8.4	关于维数问题的注记	194
第九章	分形图象压缩概述	196
9.1	图象的一般描述	196
9.2	数学模型	198
9.3	照相机算法	200
9.4	局部 IFS	202
9.5	分形变换举例	205
后 记		208
索 引		210

引言

分形的原文 Fractal 是 B. Mandelbrot 用拉丁词根拼造的单词,意思是细片、破碎、分数、分级等等.分形是描述不规则几何形态的有力工具.不言而喻,不规则的几何形态在我们周围处处可见,诸如花草、山脉、烟云、火焰等举目皆是.至于微观世界复杂物质的结构,宏观世界浩瀚天体的演变,更展现了层出不穷的不规则几何形态,它们往往都是分形几何的研究对象.正因如此,人们说“分形是大自然的几何学”^[1],“分形处处可见”^[2,3,4].

大自然向人类展示其美丽多变形态的同时,也提出了难以回答的询问:怎样描述复杂的自然表象?如何分析其内在机理?不论是艺术家,还是科学家,都在苦求着这些问题的答案.艺术家把形态分为两类,一类是自然形态,另一类是几何形态^[5].他们的见解基于这样的事实:目前还没有哪一种几何学能更好地描述自然形态,像山、云、火这类的自然形态尚缺少必要的数学模型.科学家面对这样的现状,一直探索着从欧氏几何体系中解放出来的道路.在近一二十年间,朦胧地“感觉”到了另一个几何世界,即关于自然形态的几何学,或者说分形几何学.这种几何学把自然形态看作是具有无限嵌套层次的精细结构,并且在不同尺度之下保持某种相似的属性,于是在变换与迭代的过程中得到描述自然形态的有效方法(其中 L 系统和 IFS 方法便是典型的代表).虽然分形几何学理论基础的建立也许还要经过很艰苦的历程,但分形这个词,正越来越多地为理论及实际工作者所关注,并且对传统的数学和物理学都产生了强大的冲击.

传统的数学与物理学理论奠基应追溯到牛顿的确定论(determinism).1868年,牛顿向伦敦皇家学会提出了他的著作《自然哲学之数学原理》.在这部不朽的著作中,总结了运动的基本规律,表述了质量、加速度、惯性等一些至今仍在使用的基本概念.万有引力定律成为科学的基础出发点.不管人们是否察觉,《自然哲学之数学原理》的影响是如此普遍而持久,以致于它时时刻刻都在起作用:大江东去,行星运转,时钟规则地滴滴答答…….

牛顿时代的革命,把确定论作为变化过程的典范.确定论的观点使人相信这样的看法:当解释桌面上一个小球运动规律的时候,完全不必要去考虑另一个星系中某颗行星上一片树叶(如果有的话)的飘落,极小的影响可以忽略不计.这种看法对有些问题表达了客观真实性.正是依据这种看法,人们可以成功地预报哈雷彗星的位置,确定宇宙飞船的导航等.

牛顿影响了一代又一代的人.然而,到了 E. Lorenz,事情起了变化.1960年前后他通过一组微分方程企图预报天气,但用计算机操作时发现:输入计算机的数据是上次计算的结果,只是将 6 位数作了四舍五入的近似处理.然而,这一步很小的误差竟然造成结果的巨大差异. Lorenz 为了强调某些系统对初始值强烈的敏感性,于 1979 年 12 月 29 日,在华盛顿美国科学促进会的演讲中,给出了一个形象的提问:“一只蝴蝶在巴西扇动翅膀,会在德克萨斯引起龙卷风吗?”,由此留下“蝴蝶效应”的说法.蝴蝶效应说明了一类事物的客观必然性,它引起的思考不只限于天气预报,也决不是用简单的随机性所能解释通的^[6].

人们从牛顿的确定论中走来,作为确定论直接产物的非线性动力学,哪怕研究很简单的确定系统(如本书第一章讨论的实二次迭代 $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$, 及复二次迭代 $Z_{n+1} = Z_n^2 + C, n = 0, 1, 2, \dots$), 也可以产生不确定性. 对这种不确定性进行分析,发现系统的参数对系统的性质影响极大. 而参数的分布则导致异常复杂的分形结构. 这样看来,在牛顿的确定论中,早已孕育着分形的概念. 这些新概念的出現说明应该改变对数学的牛顿观点,从而对一类具有标度不变对称性的新的世界作出研究.

分形理论是非线性科学的生长点之一. 非线性科学,不只是状态的科学,更应是过程的科学;不只是存在的科学,更应是演化的科学. 因此,要回答分形的本质及理论体系是什么,势必涉及非线性科学的进展,应该说这是目前仍在积极探索的未很好解决的问题.

分形的某些概念,早在一百年前便已出现. 当今脍炙人口的 Cantor 集、von Koch“雪花”、Sierpinski“地毯”等,本来就是传统数学中广为人知的事实. 不过,从传统的眼光看来,它们的存在一直被认为是反常的现象. 虽然人们并不怀疑其深刻的思想,但依然把它们和那些处处连续又处处不可微的函数一起,统统叫做数学中的反例. 针对这样的历史事实, B. Mandelbrot^[2]写到:“我赞扬这些早年的数学家,因为他们早就为我提供了(像 Cantor 集等)这样的结构,使我能把它们串联在一起进行思考,从而发现其宝贵的价值;同时,我也责备他们,因为他们虽然构造出了许多精彩的反例,却没有发现它们之间的内在联系,反而像对待不受欢迎的畸形怪胎那样,认为那是不正常的事情. 这样一来,真正深刻的内涵反而被完全忽视了.”事实上, Mandelbrot 的贡献在于将历史上公认的反例摆正了位置,使它们成为分形几何中的主角.

但是,到底什么是分形呢? 开始时, Mandelbrot 把那些 Hausdorff 维数不是整数的集合称为分形. 按这个定义,某些看来应是分形成员的,例如著名的 Peano 曲线,就要被排除在外,于是 Mandelbrot 又修改了原来的定义,说分形是那些局部和整体按某种方式相似的集合,这是目前关于分形定义普遍被接受的说法. 研究分形,似乎如同研究生命一样,先弄清定义再研究,还是在研究、发展之中给出科学的定义,看来还是后者更有道理^[1,7,8].

分形涉及的领域极为广泛. 在数学、物理、化学、材料科学、生物与医学、地质与地理学、地震和天文学、计算机科学乃至经济、社会、艺术领域,都不断发表大量的学术论文. 任何一本书也不能将分形及其应用作全面论述. 本书的重点是研究分形在计算机图形学中的应用,这已经是很大的题目了. 因为从广义上说,计算机图形学是研究在计算机上实现“数”与“形”之间互相转化的学科. 数与形的转化,又因其侧重点的不同,形成三个不同的应用领域,即图形生成、图象处理和模式识别. 我们研究分形及其计算机生成,必然要与这三个应用领域发生联系^[9].

熟知,目前研究图形生成的分支是计算几何学^[10],但已出版的计算几何著作都只限于讨论规则几何造型的理论与方法. 实际上,客观世界的几何形态并不能被严格地区分为规则与不规则两大类,那么相应的图形生成与造型方法也应该既考虑两类方法的不同,也考虑其相同的一面,因此我们强调计算几何与分形几何的联系^[11,12].

图象处理与模式识别的应用价值是不言而喻的. 近年来小波分析的研究进展为上述应用领域增添了生机,而小波分析的核心问题之一是正交基的建立,正交基又可以按仿射变换方法对信号进行复制而产生. 这样看来,小波与分形的联系又是自然的事了.

分形的研究离不开计算机. 如果不是计算机图形图象处理功能的增强,不能想象怎样

才能直观地看到 Julia 集和 Mandelbrot 集的精细结构,更不能想象可以产生具有无限细节的自然景物和高度真实感的三维动画.反过来,分形理论与方法又极大地丰富了计算机图形学内容,甚至分形的思想会在计算机科学的发展上产生一定的影响.

分形的计算机生成,有重大的应用价值.采用分形生成方法,可以从少量的数据生成复杂的自然景物图象,这使我们在仿真模拟方面前进了一大步.如果注意到它的反问题,即从给定的自然景物图象提取少量的数据形成原来图象的代码,那么在数据压缩方面便更有价值,这就是反问题倍受重视的原因^[13].

总之,当前关心分形的,除了自然科学工作者,还有从事不同领域工作的工程技术人员,以及社会、经济乃至艺术界的人士.一方面,对科学工作者从理论上从事分形的研究,不要急于指责他们“脱离实际”,他们进行的一系列“游戏”可能会在出乎意料的场合产生出乎意料的效果.另一方面,工程界的勇士不会等待那满载公理与定理的列车,他们早就上路了.大胆的应用带来了科学上的生机,说他们是勇士不谓过分.还有第三种人,他们不想为分形理论本身的奠基挥锹舞镐,也不想在大千世界探求分形的应用.对分形的入迷,可能只因为他们为分形之美所陶醉.在欣赏变幻神奇的分形结构和接受维数的挑战中,思索着有穷与无穷、离散与连续、混沌与有序这些哲理.这样的追求可能诞生与养育另外枝头上的鲜花与硕果.

本书首先介绍分形的背景材料,它们是读者熟知或不难掌握的内容,暂不过多涉及关于维数的讨论,是为了突出分形绘图这样的主题.正如大科学家爱因斯坦所说:“大自然喜欢简单的东西.”分形几何对大自然的描绘是有效的.分形绘图归根结底是简单的技巧.通过简单的、平凡的事例去认识复杂的自然界是人们应该遵循的认识过程.于是,我们便从简单的事例开始本书的第一章.

参 考 文 献

- [1] Mandelbrot, B. B., *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco, 1982.
- [2] Peitgen, H. O. and Richter, P. H., *The Beauty of Fractals*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1986.
- [3] Barnsley, M. F., *Fractals Everywhere*, Academic Press, Boston, 1988.
- [4] Briggs, J., *Fractals: The Patterns of Chaos, Discovering a New Aesthetic of Art, Science, and Nature*, Simon and Schuster, New York, 1992.
- [5] 姜 今、姜慧慧,设计艺术,湖南美术出版社,1987.
- [6] J. 格莱克著,张淑誉译,混沌:开创新科学,上海译文出版社,1990.
- [7] 杨 路、张景中、曾振炳,动力系统中的分形集,数学进展,Vol. 19, No. 2, 1990.
- [8] K. 法尔科内著,曾文曲等译,分形几何——数学基础及其应用,东北工学院出版社,1991.
- [9] 唐荣锡、汪嘉业、彭群生等,计算机图形学教程,科学出版社,1990.
- [10] 苏步青、刘鼎元,计算几何,上海科学技术出版社,1981.
- [11] 李岳生、齐东旭,样条函数方法,科学出版社,1979.
- [12] 孙家昶,样条函数和计算几何,科学出版社,1982.
- [13] Barnsley, M. F. and Hurd, L. P., *Fractal Image Compression*, AK Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, 1993.

第一章 什么是分形

什么是分形？这是读者首先关心的问题. 在引言中我们说过, 目前分形还没有最终的科学定义. 本章先重温一下数学中已有的事实, 以它们为背景, 再来理解什么是分形(见 1.9 节).

1.1 从不动点定理谈起

设 φ 是定义域和值域均为同一度量空间的算子, 则 $x = \varphi(x)$ 这类方程的解称为对应于算子 φ 的不动点. 关于不动点定理, 可以用一个简单的例子说明.

若 $[0, 1]$ 区间上有一段长度为 1 的丝线, 将它任意折叠, 然后仍放到原来的 $[0, 1]$ 区间上(不能超越边界), 那么结论是: 不管怎样折, 丝线上总有那样的点, 它仍处于折叠前的位置.

为了说明上述结论的正确性, 令 $\rho(x)$ 表示丝线上任意给定点 x 到区间端点 o 的距离, 那么未经折叠的丝线相应的距离函数 $\rho(x) = x$. 为给出折叠后丝线的距离函数, 可把折叠后的丝线置于 y 轴的 $[0, 1]$ 区间上, 于是图 1.1 中的折线正好就是这个函数 $\rho(x) = \varphi(x)$.

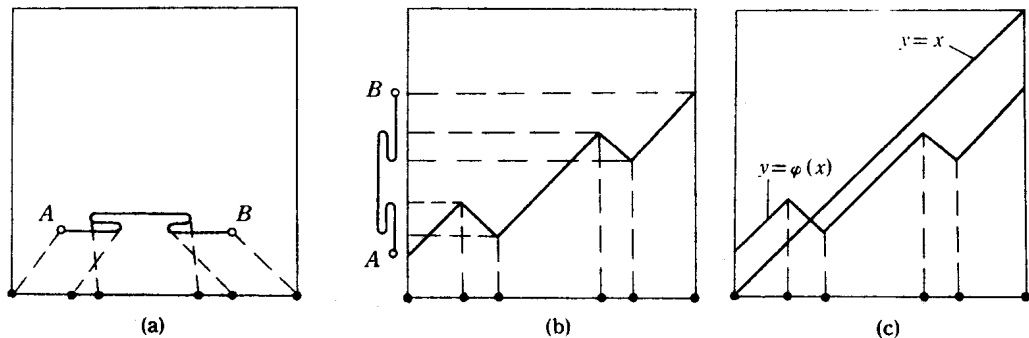


图 1.1 不动点定理示意图

如果折叠后的丝线端点 A 恰置于原点处, 那么 A 为不改变位置的点. 今设 A 不在原点, 那么只要丝线被折叠, 则 B 也不会位于区间之另一端点. 这样一来, 表示距离函数的折线, 其左端点在单位正方形之左边上, 其右端点在单位正方形的右边上, 由连续函数的性质可知, 这条折线必然与 $y = x$ 有交点. 容易看出, 这交点的横坐标便对应着丝线上经折叠而未改变位置的点, 这就是所谓的不动点.

上述讨论, 仅说明 $x = \varphi(x)$ 的解(即不动点)是存在的, 然而并未给出不动点到底在哪里. 一般说来, 为了求出不动点, 往往采用如下迭代程序:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

x_0 给定. 这个迭代过程如图 1.2 所示.

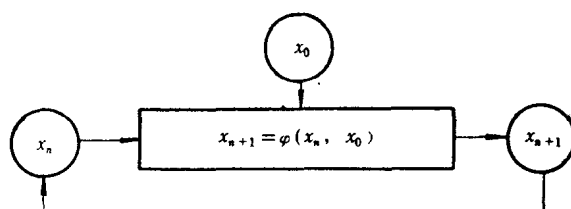


图 1.2 离散动力系统示意图

它是一个离散动力系统的简单图示, 从输入 x_n 经过算子 φ 得到输出 x_{n+1} , 再经反馈给出新的输出. 这个迭代过程(或者说如此的系统)依赖于初始值 x_0 的选取, x_0 可看作是该系统的参数. 给定一个非线性迭代过程, 一般说来, 并非对任何初值 x_0 都是收敛的. 从下面例子中, 可以看出 x_0 的选择对迭代过程产生的影响. 令

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3x, & x < \frac{1}{2} \\ -3(x-1), & x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1.1.1)$$

现在讨论 $x_0 \in [0, 1]$ 的情况.

从图 1.3 可以看出, 当 $x_0 \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 时, $x_1 > 1, x_2 < 0$, 并且从此得到的 $x_3, x_4, \dots$ 越来越远离原点, 趋向 $-\infty$;

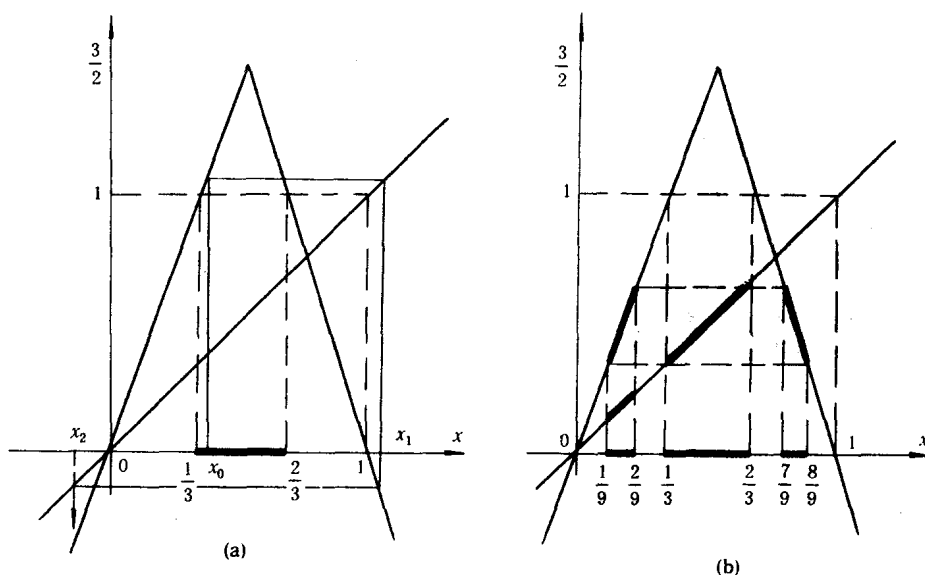


图 1.3 使迭代式(1.1.1)发散的初值区间

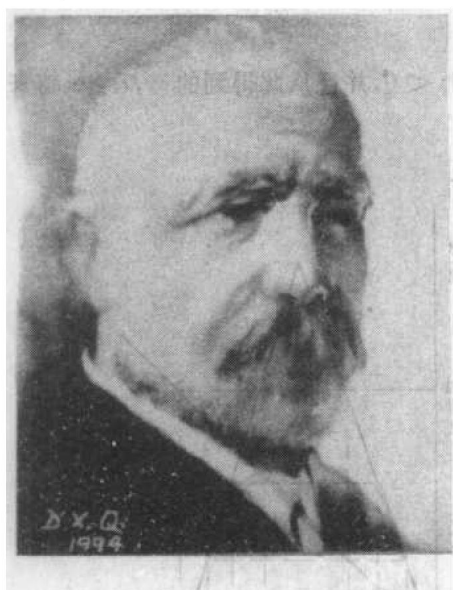
当 $x_0 \in \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ 或 $x_0 \in \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ 时, $x_1 \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 于是从 x_1 开始重演上述过程;

继而, 当 $x_0 \in \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$ 时, $x_1 \in \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$; 当 $x_0 \in \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$ 时, $x_1 \in \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$; 当 $x_0 \in \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)$ 时, $x_1 \in \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$, $x_2 \in \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$; 当 $x_0 \in \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$ 时, $x_1 \in \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$. 这样一来, 下面的迭代又将重演前述过程. 如此继续下去, 不难发现, 为了在 $[0, 1]$ 上寻求使 $\{x_n\}$ 不发散至无穷的初值 x_0 , 必要条件是: 首先去掉 $[0, 1]$ 区间三等分之后中间的开区间, 然后对余下的两个区间 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ 及 $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ 分别三等分, 并且去掉各自中间的更小的开区间. 接着对四个区间 $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$ 及 $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$ 分别三等分, 再去掉每个分割后中间的三分之一开区间, 如此无限地进行下去. 于是我们得到一个 $[0, 1]$ 上的点集, 这便是著名的 Cantor 三分集.

德国数学家 Georg Cantor (1845—1918) 于 1883 年定义了这个集合, 它在现代非线性动力学的理论研究中有重要地位, 也是人们最熟悉的非整数 Hausdorff 维数的实数集合^[1].

1.2 Cantor 集

1.2.1 Cantor 三分集



Cantor, Georg (1845—1918), 德国数学家. 出生于俄国彼得堡一个丹麦人家庭, 从 24 岁起一直执教于德国 Halle 大学. 经过 20 余年学术上的奋斗, 终于使他的集合论得到世界公认.

记

$$E_0 = [0, 1]$$

$$E_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$$E_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

.....

一般说来, 在 E_j 被定义之后, E_{j+1} 是从 E_j 中每个区间去掉中间的三分之一开区间以后的集合, E_j 由 2^j 段区间组成, 每段长度为 3^{-j} , Cantor 三分集就是

$$E = \bigcap_{j=0}^{\infty} E_j$$

如图 1.4 所示, 记 $[0, 1]$ 区间三等分之后的三个区间分别为 I_0, I_1, I_2 . 将 I_0 和 I_2 分别三等分之后的小区段, 记为 I_{00}, I_{01}, I_{02} 和 I_{20}, I_{21}, I_{22} 等. 于是

$$E_1 = \bigcup_{j_1 \neq 1} I_{j_1}$$

$$E_2 = \bigcup_{j_1, j_2 \neq 1} I_{j_1, j_2}$$

.....

$$E_k = \bigcup_{j_1, j_2, \dots, j_k \neq 1} I_{j_1, j_2, \dots, j_k}$$

这样记法对分析维数时用起来方便.

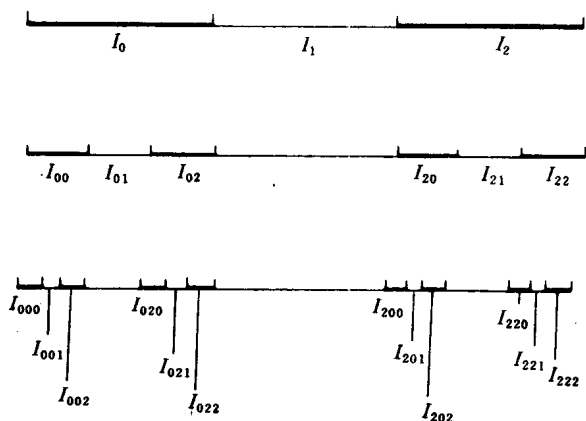


图 1.4 区间 $[0, 1]$ 三分集的标记

注意到从 $[0, 1]$ 中去掉的全体点集是系列开集的并集,故这个并集为开集,因而作为它的余集的 E 是闭集.由于 E 的每个点都能用去掉的区间的端点(这些端点全都属于 E)任意逼近,可知 E 是完备集.在 $[0, 1]$ 内没有一个开区间不与某一步被去掉的开区间中至少一个有共同点,所以 E 是疏集.

Cantor 三分集 E 是不可数的,因为它是一个非空的完备集.算一算从闭区间 $[0, 1]$ 去掉的点集之 Lebesgue 测度(即各区间之长度),得到

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \cdots = \frac{1}{3} \left/ \left(1 - \frac{2}{3} \right) \right. = 1$$

那么 Cantor 三分集 E 的 Lebesgue 测度等于零.

1.2.2 正测度的 Cantor 集

将上面得到 Cantor 三分集 E 的作法略作改变,就可以构造一族完备疏集,其中每一个都是一个 Cantor 集,具体步骤为

设 $\alpha \in (0, 1)$, 首先从 $[0, 1]$ 中将长度为 $\frac{1}{2}\alpha$, 中点为 $\frac{1}{2}$ 的开区间 $\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4}\right)$ 去掉,再从余下的两个长度均为 $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha\right)$ 的闭区间 $\left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha\right]$ 和 $\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\alpha, 1\right]$ 中,各自去掉其正中间的长度为 $\frac{1}{8}\alpha$ 的开区间,然后余下的四个闭区间长度均为 $\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\alpha\right)$,各自去掉其正中间长度为 $\frac{\alpha}{32}$ 的开区间,继而,又从余下的8个闭区间,长度均为 $\frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{8}\alpha\right)$,各自去掉其正中间的长度为 $\frac{\alpha}{128}$ 的开区间,如此进行下去.当进行 n 次之后,去掉的开区间长度之和为 $\alpha\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$,因此整个删除过程去掉的开区间之并集,其 Lebesgue 测度为 α ,于是余下来的 Cantor 集的 Lebesgue 测度为 $1 - \alpha$,这就是说,我们得到这样的 Cantor 集,其 Lebesgue 测度为正,它们都是完备的疏集.

1.2.3 双比例 Cantor 集

从 Cantor 三分集还可以考虑其它多种推广. 改动三等分这一作法, 可得到双比例 Cantor 集: 令

$$r_1, r_2 > 0, \quad r_1 + r_2 < 1$$

$$E_0 = [0, 1]$$

$$E_1 = [0, r_1] \cup [1 - r_2, 1]$$

$$E_2 = [0, r_1^2] \cup [r_1(1 - r_2), r_1] \cup [1 - r_2, 1 - r_2(1 - r_2)] \cup [1 - r_1r_2, 1]$$

.....

E_k 为 2^k 个区间之并集. 若 $[a, b]$ 是 E_k 中的一个区间, 则 E_{k+1} 中的区间由 $[r_1a, r_1b]$ 及 $[1 - r_2b, 1 - r_2a]$ 给出. 由数学归纳法易知 $E_{k+1} \subset E_k$, 且 E_k 的 Lebesgue 测度为 $(r_1 + r_2)^k$.

若 E_k 中 $m = 2^k$ 个区间长度从左到右分别为

$$d_1, d_2, \dots, d_m$$

则 E_{k+1} 中 $2m$ 个区间的长度从左到右分别为

$$r_1d_1, r_2d_1, r_2d_2, r_1d_2, \dots, r_1d_{m-1}, r_2d_{m-1}, r_2d_m, r_1d_m$$

令

$$S = \bigcap_{j=0}^{\infty} E_j$$

则 S 为非空紧集, 其 Lebesgue 测度为零.

1.2.4 Cantor 函数

我们可以构造一个连续单调函数, 其导数几乎处处为零, 并称这样的函数为 Cantor 函数. 作法是: 在作成 Cantor 集 E 时去掉的各个区间的闭包上, 定义函数值为常数. 以 Cantor 三分集为例, 相应的 Cantor 函数为

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}, x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}, x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$$

$$\varphi(x) = \frac{3}{4}, x \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{8}, x \in \left[\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right]$$

$$\varphi(x) = \frac{3}{8}, x \in \left[\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right]$$

$$\varphi(x) = \frac{5}{8}, x \in \left[\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right]$$

$$\varphi(x) = \frac{7}{8}, x \in \left[\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right]$$

以此类推, $\varphi(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的递增函数 (用记号 $[0, 1] \setminus E$ 表示 $[0, 1]$ 区间去掉 E 之后的集, 即 E 关于 $[0, 1]$ 之余集), 在 $[0, 1] \setminus E$ 的每一个点的某个邻域内局部为常数, 而 $\varphi(x)$ 的值域是整个区间 $[0, 1]$, 且 $\varphi(x)$ 递增, 那么 $\varphi(x)$ 没有跳跃间断点. 熟知, 单调函数除了跳跃间断点之外, 不能有别的间断点, 故 $\varphi(x)$ 是连续的. 由于 $\varphi(x)$ 在测度为 1 的开子集 $[0, 1] \setminus E$ 上