机械工程中常用的

几何模型

唐余勇 编著

国防工业出版社

书§4—2就用到优化方法，§4—1也用到一点，有的甚至还要用实分析和数论等知识[1][2]。

还需要强调的是，建立（尤其初次建立）一个复杂机械课题的几何模型并不容易，这是由于很难介绍出一种如何尽快、尽好、尽美地建立起几何模型的通用方法。只有在研究实践中不断探索、不断提高才是行之有效的途径。当然针对课题选用适合的参考书、文献，边学、边参考、边研究，一般可以加快速度。而这一点，也正是编写本书的一个目的。相信本书将对读者化机械工程问题为几何模型有所帮助，使研究的进度得以加快。

在编写本书过程中，始终得到博士指导老师吴从炘教授的热情指导，完成初稿后又曾蒙他仔细审阅；郭志堂同志帮助描绘了全书的部分插图；哈尔滨工业大学侯庸副研究员给予了各方面的支持。此外，所引用的参考文献都为本书提供了有价值的借鉴，在此谨致诚挚的谢意！

本书主要选用了个人负责并参予研究的哈尔滨工业大学科学资金赞助的课题中的几何模型。热烈欢迎广大读者对本书提出批评指正，并向读者们致以崇高的敬意！

濟余勇

审者代序

近年来，关于数学模型的研究已经成为应用数学领域中的一个重要方向，也出版了不少涉及这方面内容的著作。然而这些书籍却很少提及几何模型，特别是以经典微分几何和解析几何为基础的几何模型则几乎没有见到。众所周知，经典微分几何与解析几何在机械工程中应用极为广泛。因此将机械工程中常见的几何模型整理加工成一本专著，显然很有意义。

作者毕业于机械系，后来又在数学系专门从事微分几何、解析几何等课程的讲授。由于他兼有机械与几何两方面的特长，因而在长期进行几何学对机械工程问题应用的研究和指导研究生中成效显著，取得了很多成果，积累了丰富经验。在编著本书时认真总结了他本人的研究成果，参考了有关国内外文献，充分考虑了读者面和可接受性。相信本书问世后将有助于读者提高建立机械工程问题的几何模型的能力，进一步推动机械学与几何学两大学科的交叉。

由于审者的学识所限，尤其在机械工程方面简直是一个门外汉，在审阅过程中难免还存在缺点和错误，恳切希望广大读者多加批评指正。

吴从炘

1988年12月23日

不常用的符号表

$\mathbf{0}$——代表长度为零的矢量。

σ——代表右手直角坐标系。

$\bar{C}_{i(e)}$——代表曲线C的法向距离为h的内(外)等距线。

$C_{hi(e)}$——代表曲线C的向心距离为h的内(外)等距线。

N_x，N_y，N_z——依次代表曲面上任一点的法线在右手直角坐标系σ的三坐标轴上的分量。

R_h——代表齿轮滚刀的外圆半径。

$R_{c\omega}$——代表砂轮半径。

φ_{Kr}、φ_{Kf}——依次代表谐波传动的第K对齿刚轮、柔轮的齿廓对称线与x轴所成的角。

前　言

随着电子计算机事业的飞速发展，作为应用电子计算机解决实际问题的桥梁——数学模型的研究也就日益广泛与深入。目前国内外就有不少关于数学模型方面的书，然而迄今为止，只有很少的几本书提到几何模型，而且主要介绍的是涉及较深的数学工具的计算几何方面的模型。就几何本身来讲是研究有形的曲线、曲面问题，实际生活中和工程上有形的东西是大量的，因此研究几何模型具有广泛的应用价值。事实上，几何模型在现有科技文献中大量存在，尤其机械工程方面的文献就更多，作为一个从事几何对机械工程的应用研究的数学工作者，更感到应该尽快地撰写出一本这方面的读物。正因为如此，曾先后两次在哈尔滨工业大学编印过这种讲义，并多次对校内外机械和数学两专业的教师、研究生、本科生以及工程技术人员进行讲授，受到各方的鼓励和欢迎，大家殷切地期望能够将它早日整理加工成一本关于几何模型方面的专门著作。在吴从炘教授的热情关注下，在哈尔滨工业大学教材科侯庸副研究员的大力支持下，这本书终于问世了！

这本书取名为《机械工程中常用的几何模型》，其含义是为了便于把复杂的机械工程问题通过计算机来加以解决，即能在计算机上实施准确地模拟设计、制造或柔性加工，我们必须先将具体工程问题归结为若干点、线或面相关的问题，并且运用几何理论使之方程化或不等式化。

本书先介绍几何的基础知识，为读者阅读后面各章时查

阅方便；继而介绍建立几何模型的一般常识，使读者建立起一种从事这类研究的基本思维方法；进而分析各类模型的理论依据和典型工程实例中相应的处理方法，藉此提高读者化工程问题为几何模型的能力；最后一章列举了数则利用多个模型综合解决机械工程中较大课题的典型实例，藉以提高读者化工程问题为若干个几何分模型并使之有机配合，最终解决一个复杂课题的技艺。这样安排，将使读者更易于阅读本书。对于机械工程方面的专业人员，仅需具有高等数学的基础知识即可读懂本书的几乎全部内容；对于数学工作者，只需学点机械识图，再参阅有关书籍的某些章节，甚至某个小段，也可以搞清有关段落的工程含意；对研究生或本科生，本书将有助于增广他们的视野和知识面，储备分析和解决这类问题的一定能力。这样，本书既可作为有关专业科技人员的参考书，也可作为学生的选修课教学参考书。相信本书将给从事这方面研究的人们以借鉴，而且会促使几何模型理论本身得到不断的提高和充实，这些无疑都将对我国机械工业的发展产生有益影响。

应当指出的是：第一，本书列举的几何模型仅涉及解析几何和微分几何的部分基础知识，这并不意味着这两门课程的其它基础知识在机械工程中无用武之地，比如介绍曲率、挠率、法曲率和短程挠率应用情况的书籍已经很多，当然，几何学的应用并不只局限于机械工程，它还广泛应用于许多学科和领域，这已不属于本书讨论的范围；第二，机械工程中涉及到的数学模型也不仅仅是几何问题，种类很多。事实上如标准化问题一般要用到统计学，强度问题则要用有限元方法和微分方程理论，而很多问题又可归结为优化问题，本

目　录

第一章　常用几何基础知识简介

本章着重介绍机械工程中常用的、而又属于基础性质的几何知识。虽然本章属简介性质，但目的是想为未学过微分几何的读者能读懂本书全部内容和其它同类文献提供足够的准备。就是对已学过微分几何的读者，也会在使用上提供极大的方便。

正如本书前言所述，法曲率、短程挠率相关部分在众多啮合原理书中[3~6]已经介绍得很多，本章将从略。

§1—1　矢量代数简述

本书出现的数均为实数，常用具体的数和小写字母表示。对既有长度、又有方向的矢量则用粗体小写字母或两大写字母上加带箭头的横线表示。长度为零的矢量称为零矢，用粗体的“**0**”表示。长度为**1**的单位矢量我们简称为幺矢。

本书除偶尔用到极坐标系外，绝大多数采用右手直角坐标系，如$\sigma=[o;\ x,\ y,\ z]$。矢量$\mathbf{r}_i$在坐标系σ下的下述表达式

$$\mathbf{r}_i=\{x_i,\ y_i,\ z_i\}=x_i\mathbf{i}+y_i\mathbf{j}+z_i\mathbf{k} \qquad (1—1)$$

式中x_i、y_i、z_i依次代表矢量$\mathbf{r}_i$对各坐标轴的射影，或称为矢量$\mathbf{r}_i$在各坐标轴上的分量，而$\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$依次为坐标系σ的坐标轴x、y、z上的正向幺矢。

矢量的长度，又称为它的模，如式（1—1）矢量的

模用$|\mathbf{r}_i|$表示，并且有

$$|\mathbf{r}_i| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$$

1. 基本运算

对于式（1—1）矢量，我们有下列基本运算：

（1）加、减运算

$$\mathbf{r}_1 \pm \mathbf{r}_2 = \{x_1 \pm x_2,\ y_1 \pm y_2,\ z_1 \pm z_2\}$$

当然亦可用三角形法则或平行四形法则，但用得较少。

（2）数乘运算

$$\lambda \mathbf{r}_i = \{\lambda x_i,\ \lambda y_i,\ \lambda z_i\}$$

（3）点乘运算（又称数量积运算）

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = |\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2|\cos\langle \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2\rangle$$

式中$\langle \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2\rangle$表示$\mathbf{r}_1$、$\mathbf{r}_2$两矢量正向之间较小的夹角，即满足

$$0 \leqslant \langle \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2\rangle \leqslant \pi$$

不难推得对应的坐标表达式为

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

（4）叉乘运算（又称矢量积运算）

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = |\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2|\sin\langle \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2\rangle \mathbf{e}$$

式中$\mathbf{e}$为垂直于$\mathbf{r}_1$、$\mathbf{r}_2$两矢量的幺 矢，并 且（$\mathbf{r}_1$、$\mathbf{r}_2$、$\mathbf{e}$）构成右手系。若用分量表示，则有

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

（5）混合积运算

混合积是指三矢量先叉乘、后点乘的一种运算，一般记

成$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$，其意义为

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3$$

若用分量表示，就有

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

（6）二重矢积运算

二重矢积实际上是连续叉乘的运算，可以推出相应计算公式为

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \times \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3) - \mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3)$$

与上式对应的分量表达形式则较为复杂，即

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \times \mathbf{r}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

2. 重要结论

对于矢量代数，下述结论是经常用到的：

（1）若$\mathbf{r}_i \neq 0$，则$\mathbf{r}_i$的方向幺矢为$\mathbf{r}_i/|\mathbf{r}_i|$。

（2）$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \overset{*}{\Longleftrightarrow} x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$，$z_1 = z_2$三式同时成立$\Longleftrightarrow$两矢量$\mathbf{r}_1$和$\mathbf{r}_2$长度和方向均相同。

（3）$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = |\mathbf{r}_i|^2$

* “$\Longleftrightarrow$”表示互逆，即等价，下同。

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=1$$

（4） $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\qquad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}\qquad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$$

（5） $\mathbf{r}_1\perp\mathbf{r}_2\Longleftrightarrow\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

（6） $\mathbf{r}_1/\!/\mathbf{r}_2\Longleftrightarrow\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2=0\Longleftrightarrow\lambda\mathbf{r}_1+\mu\mathbf{r}_2=0$

λ、μ为不同时为0的实数。

（7） $\mathbf{r}_1$、$\mathbf{r}_2$、$\mathbf{r}_3$三矢量共面$\Longleftrightarrow(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}_3)=0\Longleftrightarrow$ $\lambda\mathbf{r}_1+\mu\mathbf{r}_2+\nu\mathbf{r}_3=0$，$\lambda$、$\mu$、$\nu$为不同时为0的实数。

3. 注意事项

本段主要指出矢量运算中容易发生谬误的地方，因此尤望读者注意。

对于矢量的加减运算，数乘运算可以像初等数学中的数的运算那样进行，并满足相应运算法则，只是需要注意矢量与数量的区别，这是很方便的。

至于数量积，即点乘运算，只要注意对于$(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{r}_3$，由于前两个矢量$\mathbf{r}_1$和$\mathbf{r}_2$的点乘积所得到的数再和矢量$\mathbf{r}_3$点乘是没有意义的，也就可以知道点乘运算不会遇到结合律的问题，其它也可按初等数学中的数那样进行运算。

最值得注意的是含有叉乘的运算，这和初等数学不大相同，显见交换律就不成立

$$\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2=-\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_1$$

尤其不要用错下列结果：

（1）$(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}_3)=\underset{\sim\sim\sim}{(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{r}_3}=-(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{r}_3=(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3)\cdot\mathbf{r}_1=-(\mathbf{r}_3\times\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{r}_1=\underset{\sim\sim\sim}{\mathbf{r}_1\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3)}=\mathbf{r}_3\cdot(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)$

(2) $(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)\times\mathbf{r}_3=\mathbf{r}_2(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_3)-\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2\cdot\mathbf{r}_3)$

$$\mathbf{r}_1\times(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3)=\mathbf{r}_2(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_3)-\mathbf{r}_3(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)$$

上述两式右端中前一项完全相同，而后一项由于$\mathbf{r}_1$与$\mathbf{r}_3$两矢量的方向一般并不相同，故一般也就不相等。

由此可见：

1）混合积只满足结合律，不满足交换律。当然这个结合律仍是先叉乘、后点乘意义下的结合律；

2）二重矢积既不满足交换律，又不满足结合律；

3）乘法对加法的分配律是成立的

$$(\mathbf{r}_1\pm\mathbf{r}_2)\times\mathbf{r}_3=\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_3\pm\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3$$

$$\mathbf{r}_1\times(\mathbf{r}_2\pm\mathbf{r}_3)=\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2\pm\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_3$$

对点乘则还可以交换

$$(\mathbf{r}_1\pm\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{r}_3=\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_3\pm\mathbf{r}_2\cdot\mathbf{r}_3=\mathbf{r}_3\cdot(\mathbf{r}_1\pm\mathbf{r}_2)$$

§1—2　点、直线和平面相关的常用公式

1. 平面、直线方程

若已知平面π的法线矢量$\mathbf{n}$和平面π上一点P_o的矢径*$\mathbf{r}_o$，则参阅图1，我们看到，对平面π上任一点P，连$\overrightarrow{P_oP}$，则有$\mathbf{n}\perp\overrightarrow{P_oP}$，即

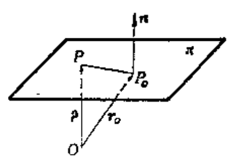

图 1

$$\mathbf{n}\cdot(\overrightarrow{P_oP})=\mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{r}_o)=0 \qquad (1—2)$$

* 矢径是指起点在坐标系原点的矢量。

式中$\boldsymbol{\rho}$为P点的矢径。如果在给定直角坐标系$\sigma=[0; x, y, z]$下有

$$\mathbf{n}=\{A, B, C\} \qquad \mathbf{r}_0=\{x_0, y_0, z_0\}$$

又设(x, y, z)为平面π上任一点P在坐标系σ下的坐标，则平面π的方程式（1—2）化为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (1—3)$$

机械工程中，与平面相关的问题不少可归结为求法线矢量$\mathbf{n}$的分量，§3—1的2小节中将给出具体实例。

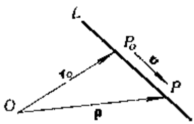

图 2

图2中，若已知直线L上一点P_o的矢径为$\mathbf{r}_o$，且直线L与常矢$\mathbf{v}$平行，那么对直线L上的任一点P，就有$\overrightarrow{P_oP}\parallel\mathbf{v}$，从而

$$\overrightarrow{P_oP}=\boldsymbol{\rho}-\mathbf{r}_o=\lambda\mathbf{v}$$

式中$\boldsymbol{\rho}$为P点的矢径，则直线L的方程为

$$\boldsymbol{\rho}=\mathbf{r}_o+\lambda\mathbf{v} \qquad (1—4)$$

若用坐标分量表示上式中各矢量，则

$$\boldsymbol{\rho}=\{x, y, z\} \qquad \mathbf{r}_o=\{x_o, y_o, z_o\}$$
$$\mathbf{v}=\{p, q, r\}$$

再利用它们的坐标表达式即可得到直线L的参数方程为

$$\left\{\begin{aligned} x&=x_o+\lambda p\\ y&=y_o+\lambda q\\ z&=z_o+\lambda r\end{aligned}\right. \qquad (1—5)$$

实际工程中，与直线相关的问题有许多可归结为求直线的方向矢量，在§3—1的1小节中将用具体工程问题来说明其求解的具体方法。

2. 常用公式

已知平面π的方程式（1—3）及一点$P_1(x_1, y_1, z_1)$，则P_1点到平面π的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_oP_1}\cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}=\frac{|A(x_1-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

（1—6）

它是利用矢量$\overrightarrow{P_oP}$在幺矢$\mathbf{n}/|\mathbf{n}|$上的投影，即P_1到平面上的距离而求得的。

已知直线L的方程式（1—5），则点$P_1(x_1, y_1, z_1)$到直线L的距离可通过以$\mathbf{v}$为底边$\overrightarrow{P_oP_1}$为邻边的平行四边形在底边上的高而求得，即有

$$d=\frac{|\mathbf{v}\times\overrightarrow{P_oP}|}{|\mathbf{v}|}=\frac{\left\|\begin{matrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ p & q & r\\ x_1-x_o & y_1-y_o & z_1-z_o\end{matrix}\right\|}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\quad(1—7)$$

式中“‖ ‖”表示先计算行列式，再求模。

若将式（1—5）中下标0换成i，p、q、r均加上下标i，且$i=1, 2$，则式（1—5）代表两直线，由于两直线为的夹角就是方向矢量$\mathbf{v}_1$、$\mathbf{v}_2$的夹角，故有

$$\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{|\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|}\right)$$

$$=\cos^{-1}\frac{|p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2|}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}\qquad(1—8)$$