

机械工程中常用的

几何模型

唐余勇 编著

13
国防工业出版社

书 § 4—2 就用到优化方法, § 4—1 也用到一点, 有的甚至还要用实分析和数论等知识^[1)(2)]。

还需要强调的是, 建立 (尤其初次建立) 一个复杂机械课题的几何模型并不容易, 这是由于很难介绍出一种如何尽快、尽好、尽美地建立起几何模型的通用方法。只有在研究实践中不断探索、不断提高才是行之有效的途径。当然针对课题选用适合的参考书、文献, 边学、边参考、边研究, 一般可以加快速度。而这一点, 也正是编写本书的一个目的。相信本书将对读者化机械工程问题为几何模型有所帮助, 使研究的进度得以加快。

在编写本书过程中, 始终得到博士指导老师吴从所教授的热情指导, 完成初稿后又曾蒙他仔细审阅; 郭志堂同志帮助描绘了全书的部分插图; 哈尔滨工业大学侯庸副研究员给予了各方面的支持。此外, 所引用的参考文献都为本书提供了有价值的借鉴, 在此谨致诚挚的谢意!

本书主要选用了个人负责并参与研究的哈尔滨工业大学科学资金赞助的课题中的几何模型。热烈欢迎广大读者对本书提出批评指正, 并向读者们致以崇高的敬意!

唐余勇

审 者 代 序

近年来,关于数学模型的研究已经成为应用数学领域中的一个重要方向,也出版了不少涉及这方面内容的著作。然而这些书籍却很少提及几何模型,特别是以经典微分几何和解析几何为基础的几何模型则几乎没有见到。众所周知,经典微分几何与解析几何在机械工程中应用极为广泛。因此将机械工程中常见的几何模型整理加工成一本专著,显然很有意义。

作者毕业于机械系,后来又在数学系专门从事微分几何、解析几何等课程的讲授。由于他兼有机械与几何两方面的特长,因而在长期进行几何学对机械工程问题应用的研究和指导研究生中成效显著,取得了很多成果,积累了丰富经验。在编著本书时认真总结了他本人的研究成果,参考了有关国内外文献,充分考虑了读者面 and 可接受性。相信本书问世后将有助于读者提高建立机械工程问题的几何模型的能力,进一步推动机械学与几何学两大学科的交叉。

由于审者的学识所限,尤其在机械工程方面简直是一个门外汉,在审阅过程中难免还存在缺点和错误,恳切希望广大读者多加批评指正。

吴从新

1988年12月23日

不常用的符号表

0 ——代表长度为零的矢量。

σ ——代表右手直角坐标系。

$\bar{C}_{l(c)}$ ——代表曲线 C 的法向距离为 h 的内(外)等距线。

$C_{hl(e)}$ ——代表曲线 C 的向心距离为 h 的内(外)等距线。

N_x, N_y, N_z ——依次代表曲面上任一点的法线在右手直角坐标系 σ 的三坐标轴上的分量。

R_h ——代表齿轮滚刀的外圆半径。

R_{ca} ——代表砂轮半径。

$\varphi_{Kt}, \varphi_{Kl}$ ——依次代表谐波传动的第 K 对齿刚轮、柔轮的齿廓对称线与 z 轴所成的角。

前 言

随着电子计算机事业的飞速发展,作为应用电子计算机解决实际问题的桥梁——数学模型的研究也就日益广泛与深入。目前国内外就有不少关于数学模型方面的书,然而迄今为止,只有很少的几本书提到几何模型,而且主要介绍的是涉及较深的数学工具的计算几何方面的模型。就几何本身来讲是研究有形的曲线、曲面问题,实际生活中和工程上有形的东西是大量的,因此研究几何模型具有广泛的应用价值。事实上,几何模型在现有科技文献中大量存在,尤其机械工程方面的文献就更多,作为一个从事几何对机械工程的应用研究的数学工作者,更感到应该尽快地撰写出一本这方面的读物。正因为如此,曾先后两次在哈尔滨工业大学编印过这种讲义,并多次对校内外机械和数学两专业的教师、研究生、本科生以及工程技术人员进行讲授,受到各方的鼓励和欢迎,大家殷切地期望能够将它早日整理加工成一本关于几何模型方面的专门著作。在吴从忻教授的热情关注下,在哈尔滨工业大学教材科侯庸副研究员的大力支持下,这本书终于问世了!

这本书取名为《机械工程中常用的几何模型》,其含义是为了便于把复杂的机械工程问题通过计算机来加以解决,即能在计算机上实施准确地模拟设计、制造或柔性加工,我们必须先将具体工程问题归结为若干点、线或面相关的问题,并且运用几何理论使之方程化或不等式化。

本书先介绍几何的基础知识,为读者阅读后面各章时查

阅方便；继而介绍建立几何模型的一般常识，使读者建立起一种从事这类研究的基本思维方法；进而分析各类模型的理论依据和典型工程实例中相应的处理方法，藉此提高读者化工程问题为几何模型的能力；最后一章列举了数则利用多个模型综合解决机械工程中较大课题的典型实例，藉以提高读者化工程问题为若干个几何分模型并使之有机配合，最终解决一个复杂课题的技艺。这样安排，将使读者更易于阅读本书。对于机械工程方面的专业人员，仅需具有高等数学的基础知识即可读懂本书的几乎全部内容；对于数学工作者，只需学点机械识图，再参阅有关书籍的某些章节，甚至某个小孩，也可以搞清有关很落的工程含意；对研究生或本科生，本书将有助于增广他们的视野和知识面，储备分析和解决这类问题的一定能力。这样，本书既可作为有关专业科技人员的参考书，也可作为学生的选修课教学参考书。相信本书将给从事这方面研究的人们以借鉴，而且会促使几何模型理论本身得到不断的提高和充实，这些无疑都将对我国机械工业的发展产生有益影响。

应当指出的是：第一，本书列举的几何模型仅涉及解析几何和微分几何的部分基础知识，这并不意味着这两门课程及其它基础知识在机械工程中无用武之地，比如介绍曲率、挠率、法曲率和短程挠率应用情况的书籍已经很多，当然，几何学的应用并不只局限于机械工程，它还广泛应用于许多学科和领域，这已不属于本书讨论的范围；第二，机械工程中涉及到的数学模型也不仅仅是几何问题，种类很多。事实上如标准化问题一般要用到统计学，强度问题则要用有限元方法和微分方程理论，而很多问题又可归结为优化问题，本

目 录

第一章 常用几何基础知识简介

§ 1—1 矢量代数简述…………… (1)

1. 基本运算(2), 2. 重要结论(3), 3. 注意事项(4)。

§ 1—2 点、直线和平面相关的常用公式… (5)

1. 平面、直线方程(5), 2. 常用公式(7),

§ 1—3 矢量分析简述…………… (9)

1. 常用结论(10), 2. 注意事项(10), 3. 特殊矢函数(12)。

§ 1—4 曲线论基础知识…………… (15)

1. 基本三棱形(15), 2. 曲率与挠率(16), 3. 基本公式与自然方程(20)。

§ 1—5 曲面论的基础知识…………… (21)

1. 切面、法线(21), 2. 第一基本齐式(22), 3. 第二基本齐式(22), 4. 法曲率(24)。

§ 1—6 内在几何的一些常识…………… (25)

1. 短程曲率(25), 2. 短程线(26), 3. 短程挠率(27)。

§ 1—7 常用曲线简介…………… (27)

1. 圆的渐开线与泛渐开线(27), 2. 摆线与次摆线(29),
3. 螺旋线(31)。

§ 1—8 常用曲面简介…………… (32)

1. 直线面与可展曲面(32), 2. 回转面(32), 3. 螺旋面(33)。

第二章 几何模型相关常识…………… (35)

§ 2—1 建立几何模型的一般程序…………… (35)

1. 模型前提(35), 2. 模型准备(35), 3. 模型方案(36),
4. 模型假设(36), 5. 模型建立(36), 6. 模型求解(37),
7. 模型分析(37), 8. 模型应用(38)。

§ 2—2	确定模型方案的通常思路	(38)
1.	一般常识(38), 2. 分几步走(39), 3. 依据的确定(41)。	
§ 2—3	正确选择坐标系	(41)
§ 2—4	建立几何模型是 CAD、CAM、FMS 等问题的关键技术	(42)

第三章 几何模型依据与举例 (44)

§ 3—1	点、直线和平面相关的模型简例	(44)
1.	机床调整的几何表述(44), 2. 求硬质合金格利森铣刀盘切削刃(46)。	
§ 3—2	法向等距线模型简例	(49)
1.	求圆滚滚动凸轮的型线方程(50), 2. 剃前滚刀齿顶角圆半径的选择(51)。	
§ 3—3	垂足曲线与反垂足曲线	(56)
1.	平底移动从动件凸轮机构(58), 2. 平底摆动从动件凸轮机构(59)。	
§ 3—4	向心等距线及其应用举例	(60)
1.	叶片泵定子曲线磨用凸轮的型线模型(61), 2. 模具的精密修磨机构(62)。	
§ 3—5	等距曲面及其应用模型简例	(64)
1.	滚珠丝杠相关几何模型(64), 2. 油气混输泵(钻具)的定子内腔方程(68)。	
§ 3—6	等距变换与应用实例	(69)
1.	求直圆锥齿轮近似齿廓方程的等距变换法(70), 2. 木工螺旋刨刀设计与制造模型(72)。	
§ 3—7	包络理论及其应用	(75)
1.	齿轮、齿条传动模型(77), 2. 齿轮滚刀实际侧铲面方程(79)。	
§ 3—8	逆包络理论及其在螺旋面中的应用	(82)
1.	车削或轴向往导制螺旋面工件的模型(83), 2. 求塞克斯—90	

磨齿机上砂轮截形参考曲线的相关模型(84), 3. 一般盘状刀具截形设计(87), 4. 一般斜齿刀具截形设计(90), 5. 四板搓差制转沟模型(91)。

§ 3—9 短程线应用举例 (93)

1. 压力容器缠绕成形中的短程线(94), 2. 渐开线齿轮中的短程线(96)。

§ 3—10 法曲率与短程挠率应用简介 (97)

第四章 实际工程问题与相应综合模型 (99)

§ 4—1 制造高精度齿轮滚刀的数学模型... (99)

1. 问题概况及模型依据 (99)
2. 机床调整的数学表达式 (100)
3. 求砂轮截形的参考曲线 (101)
4. 实际侧铲面方程 (109)
5. 误差计算 (110)
6. 砂轮截形修正 (111)

§ 4—2 平面谐波传动设计的数学模型 ... (112)

1. 模型假设 (113)
2. 记号的工程意义 (113)
3. 变形后刚轮、柔轮齿廓方程 (114)
4. 初啮入齿号的确定 (116)
5. 消除干涉和侧隙的模型 (118)
6. 求与柔轮齿廓共轭的齿廓方程 (119)
7. 目标函数与设计变量 (122)
8. 实例与结论 (123)

§ 4—3 硬质合金格利森铣刀盘的设计与制造问题 (125)

1. 前言 (125)
2. 设计原理 (125)
3. 设计的几何模型 (125)

4. 制造原理	(127)
5. 制造中的几何模型	(127)
6. 两点注记及实例计算	(132)
§ 4—4 关于塞克斯—9C 磨齿机柔性加工的模型	(134)
1. 前言	(134)
2. 求砂轮截形的参考曲线	(135)
3. 求得工件廓面方程	(137)
4. 造型误差与砂轮截形修正	(141)
5. 计算难点与实例	(142)
§ 4—5 油气混输泵(钻具)的几何模型...	(143)
1. 单头螺杆设计原理	(143)
2. 单头螺杆泵转子廓面方程	(144)
3. 定子上橡胶内腔与定子内腔方程	(146)
4. 制造转子的相应模型	(148)
5. 多头螺杆泵的相应模型	(148)
§ 4—6 有关钻头问题的探讨	(151)
1. 钻沟截形的实现	(151)
2. 钻尖后刀面的实现	(153)
参考文献	(156)

第一章 常用几何基础知识简介

本章着重介绍机械工程中常用的、而又属于基础性质的几何知识。虽然本章属简介性质，但目的是想为未学过微分几何的读者能读懂本书全部内容和其它同类文献提供足够的准备。就是对已学过微分几何的读者，也会在使用上提供极大的方便。

正如本书前言所述，法曲率、短程挠率相关部分在众多啮合原理书中(3~6)已经介绍得很多，本章将从略。

§ 1—1 矢量代数简述

本书出现的数均为实数，常用具体的数和小写字母表示。对既有长度、又有方向的矢量则用粗体小写字母或两大写字母上加带箭头的横线表示。长度为零的矢量称为零矢，用粗体的“0”表示。长度为1的单位矢量我们简称为么矢。

本书除偶尔用到极坐标系外，绝大多数采用右手直角坐标系，如 $\sigma = [O; x, y, z]$ 。矢量 r_i 在坐标系 σ 下的下述表达式

$$r_i = \{x_i, y_i, z_i\} = x_i i + y_i j + z_i k \quad (1-1)$$

式中 x_i 、 y_i 、 z_i 依次代表矢量 r_i 对各坐标轴的射影，或称为矢量 r_i 在各坐标轴上的分量，而 i 、 j 、 k 依次为坐标系 σ 的坐标轴 x 、 y 、 z 上的正向么矢。

矢量的长度，又称为它的模，如式(1—1)矢量的

模用 $|r_i|$ 表示, 并且有

$$|r_i| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$$

1. 基本运算

对于式 (1-1) 矢量, 我们有下列基本运算:

(1) 加、减运算

$$r_1 \pm r_2 = \{x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2\}$$

当然亦可用三角形法则或平行四边形法则, 但用得较少。

(2) 数乘运算

$$\lambda r_i = \{\lambda x_i, \lambda y_i, \lambda z_i\}$$

(3) 点乘运算 (又称数量积运算)

$$r_1 \cdot r_2 = |r_1| |r_2| \cos \langle r_1, r_2 \rangle$$

式中 $\langle r_1, r_2 \rangle$ 表示 r_1, r_2 两矢量正向之间较小的夹角, 即满足

$$0 \leq \langle r_1, r_2 \rangle \leq \pi$$

不难推得对应的坐标表达式为

$$r_1 \cdot r_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

(4) 叉乘运算 (又称矢量积运算)

$$r_1 \times r_2 = |r_1| |r_2| \sin \langle r_1, r_2 \rangle e$$

式中 e 为垂直于 r_1, r_2 两矢量的么矢, 并且 (r_1, r_2, e) 构成右手系。若用分量表示, 则有

$$r_1 \times r_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

(5) 混合积运算

混合积是指三矢量先叉乘、后点乘的一种运算, 一般记

成 (r_1, r_2, r_3) ，其意义为

$$(r_1, r_2, r_3) = (r_1 \times r_2) \cdot r_3$$

若用分量表示，就有

$$(r_1, r_2, r_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

(6) 二重矢积运算

二重矢积实际上是连续叉乘的运算，可以推出相应计算公式为

$$(r_1 \times r_2) \times r_3 = r_2(r_1 \cdot r_3) - r_1(r_2 \cdot r_3)$$

与上式对应的分量表达形式则较为复杂，即

$$(r_1 \times r_2) \times r_3 = \begin{vmatrix} & i & j & k \\ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ z_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

2. 重要结论

对于矢量代数，下述结论是经常用到的：

(1) 若 $r_i \neq 0$ ，则 r_i 的方向么矢为 $r_i/|r_i|$ 。

(2) $r_1 = r_2 \stackrel{*}{\iff} x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$ 三式同时成立
 $\iff$ 两矢量 r_1 和 r_2 长度和方向均相同。

(3) $r_i \cdot r_i = r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = |r_i|^2$

* “ $\iff$ ”表示互逆，即等价，下同。

$$i \cdot i = i^2 = j^2 = k^2 = 1$$

$$(4) i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$$

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

$$i \times j = k \quad j \times k = i \quad k \times i = j$$

$$(5) r_1 \perp r_2 \iff r_1 \cdot r_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

$$(6) r_1 \parallel r_2 \iff r_1 \times r_2 = 0 \iff \lambda r_1 + \mu r_2 = 0$$

λ, μ 为不同时为0的实数。

(7) r_1, r_2, r_3 三 矢 量 共 面 $\iff (r_1, r_2, r_3) = 0 \iff \lambda r_1 + \mu r_2 + \nu r_3 = 0, \lambda, \mu, \nu$ 为不同时为0的实数。

3. 注意事项

本段主要指出矢量运算中容易发生谬误的地方，因此尤望读者注意。

对于矢量的加减运算，数乘运算可以像初等数学中的数的运算那样进行，并满足相应运算法则，只是需要注意矢量与数量的区别，这是很方便的。

至于数量积，即点乘运算，只要注意对于 $(r_1 \cdot r_2) \cdot r_3$ ，由于前两个矢量 r_1 和 r_2 的点乘积所得到的数再和矢量 r_3 点乘是没有意义的，也就可以知道点乘运算不会遇到结合律的问题，其它也可按初等数学中的数那样进行运算。

最值得注意的是含有叉乘的运算，这和初等数学不大相同，显见交换律就不成立

$$r_1 \times r_2 = -r_2 \times r_1$$

尤其不要用错下列结果：

$$(1) (r_1, r_2, r_3) = \underbrace{(r_1 \times r_2) \cdot r_3} = - \underbrace{(r_2 \times r_1) \cdot r_3} = \underbrace{(r_2 \times r_3) \cdot r_1} = - \underbrace{(r_3 \times r_2) \cdot r_1} = \underbrace{r_1 \cdot (r_2 \times r_3)} = r_3 \cdot (r_1 \times r_2)$$

$$(2) (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \times \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3) - \mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3)$$

$$\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = \mathbf{r}_2(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3) - \mathbf{r}_3(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)$$

上述两式右端中前一项完全相同，而后一项由于 $\mathbf{r}_1$ 与 $\mathbf{r}_3$ 两矢量的方向一般并不相同，故一般也就不相等。

由此可见：

1) 混合积只满足结合律，不满足交换律。当然这个结合律仍是先叉乘、后点乘意义下的结合律；

2) 二重矢积既不满足交换律，又不满足结合律；

3) 乘法对加法的分配律是成立的

$$(\mathbf{r}_1 \pm \mathbf{r}_2) \times \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3 \pm \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3$$

$$\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 \pm \mathbf{r}_3) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \pm \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3$$

对点乘则还可以交换

$$(\mathbf{r}_1 \pm \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 \pm \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_3 \cdot (\mathbf{r}_1 \pm \mathbf{r}_2)$$

§ 1—2 点、直线和平面相关的常用公式

1. 平面、直线方程

若已知平面 π 的法线矢量 $\mathbf{n}$ 和平面 π 上一点 P_0 的矢径 $\mathbf{r}_0$ ，则参阅图1，我们看到，对平面 π 上任一点 P ，连 $\overrightarrow{P_0P}$ ，则有 $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$ ，即

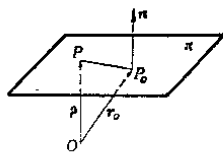


图 1

$$\mathbf{n} \cdot (\overrightarrow{P_0P}) = \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0) = 0 \quad (1-2)$$

* 矢径是指起点在坐标系原点的矢量。

式中 ρ 为 P 点的矢径。如果在给定直角坐标系 $\sigma = [O, x, y, z]$ 下有

$$n = \{A, B, C\} \quad r_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$$

又设 (x, y, z) 为平面 π 上任一点 P 在坐标系 σ 下的坐标, 则平面 π 的方程式 (1—2) 化为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1-3)$$

机械工程中, 与平面相关的问题不少可归结为求法线矢量 n 的分量, § 3—1 的 2 小节中将给出具体实例。

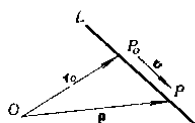


图 2

图 2 中, 若已知直线 L 上一点 P_0 的矢径为 r_0 , 且直线 L 与常矢 v 平行, 那么对直线 L 上的任一点 P , 就有 $\overrightarrow{P_0P} \parallel v$, 从而

$$\overrightarrow{P_0P} = \rho - r_0 = \lambda v$$

式中 ρ 为 P 点的矢径, 则直线 L 的方程为

$$\rho = r_0 + \lambda v \quad (1-4)$$

若用坐标分量表示上式中各矢量, 则

$$\rho = \{x, y, z\} \quad r_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$$

$$v = \{p, q, r\}$$

再利用它们的坐标表达式即可得到直线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \\ z = z_0 + \lambda r \end{cases} \quad (1-5)$$

实际工程中, 与直线相关的问题有许多可归结为求直线的方向矢量, 在 § 3—1 的 1 小节中将用具体工程问题来说明其求解的具体方法。

2. 常用公式

已知平面 π 的方程式(1-3)及一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 则 P_1 点到平面 π 的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (1-6)$$

它是利用矢量 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 在么矢 $\mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ 上的投影, 即 P_1 到平面上的距离而求得的。

已知直线 L 的方程式(1-5), 则点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 到直线 L 的距离可通过以 $\mathbf{v}$ 为底边 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 为邻边的平行四边形在底边上的高而求得, 即有

$$d = \frac{|\mathbf{v} \times \overrightarrow{P_0P_1}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p & q & r \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \quad (1-7)$$

式中“ $\begin{vmatrix} \end{vmatrix}$ ”表示先计算行列式, 再求模。

若将式(1-5)中下标0换成 i , p, q, r 均加上下标 i , 且 $i=1, 2$, 则式(1-5)代表两直线, 由于两直线为的夹角就是方向矢量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 的夹角, 故有

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos^{-1} \left(\frac{|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}_1| |\mathbf{v}_2|} \right) \\ &= \cos^{-1} \frac{|p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}} \quad (1-8) \end{aligned}$$