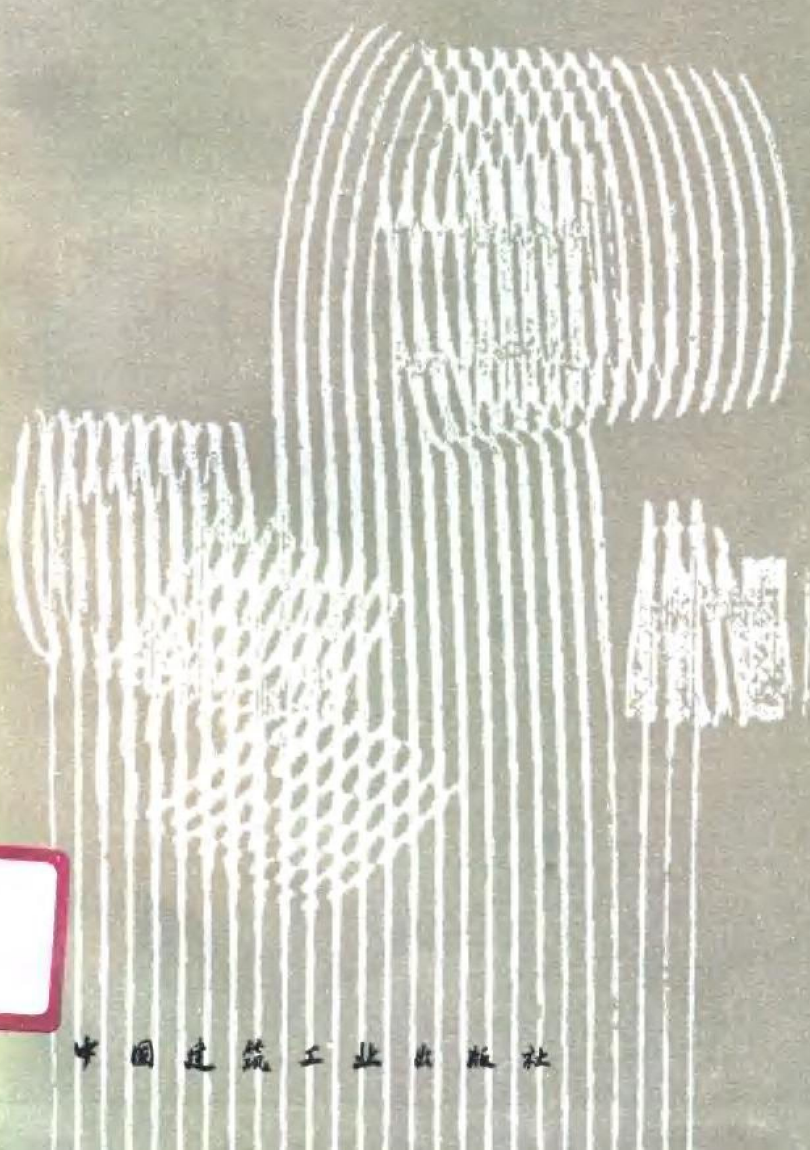


薄壁杆件结构力学

包世华 周坚 编著

An abstract graphic on the left side of the cover depicts several thin-walled structural members, such as I-beams and channels, rendered with a series of parallel white lines on a dark background. These members are arranged in a way that suggests they are part of a larger structural assembly, with some showing cross-sectional details.

中国建筑工业出版社

本书系统地介绍了符拉索夫开口截面薄壁杆件理论、乌曼斯基闭口截面薄壁杆件理论,以及考虑周边发生畸变的闭口截面杆件的广义坐标原理解法,并针对高层建筑结构等计算的需要介绍了采用横向联系加强的开口截面薄壁杆件的计算;同时还包括有用力法和位移法计算薄壁杆件结构、薄壁杆件的稳定计算、薄壁杆件结构的能量原理和有限元方法等内容。

书中各章均附有例题和习题,以帮助学习。

本书可供建筑结构、建筑机械、道路桥梁等专业的工程技术人员以及高等院校高年级学生和研究生自学参考。

薄壁杆件结构力学

包世华 周 坚 编著

*

中国建筑工业出版社出版、发行(北京西郊百万庄)

新华书店经销

中国建筑工业出版社印刷厂印刷(北京阜外南礼士路)

*

开本: 787×1092毫米 1/16 印张: 25 字数: 607千字

1991年3月第一版 1991年3月第一次印刷

印数: 1—3,080册 定价: 16.05元

ISBN7—112—01003—9/TU·729

(6094)

前言

随着我国高层建筑、桥梁建设和各种型钢结构的飞速发展，薄壁杆件的扭转计算日益引起工程界的重视。为了适应高等工科院校土建类专业教学内容更新与现有工程技术人员知识更新的需要，我们编写了本书。

本书系统地介绍了符拉索夫开口截面薄壁杆件理论、乌曼斯基闭口截面薄壁杆件理论和考虑周边发生畸变的闭口截面杆件的广义坐标原理解法，以及用横向联系加强的开口截面薄壁杆件的计算。此外，对薄壁杆件结构、薄壁杆件的稳定、薄壁杆件结构的能量原理和有限元方法等内容，尽可能地收集了近年来的一些研究成果，分章介绍。

在编写本书时，力图使各部分概念明确、深入浅出、便于自学，同时保留了符拉索夫理论与乌曼斯基理论自成体系的特点。为了帮助读者深入理解书中内容，我们列举了一定数量的例题，各章后附有习题，供初学者练习与巩固所学成果。本书可作为结构工程、道桥、建筑机械等专业高等院校高年级学生和研究生的教学用书，亦可用作上述专业的工程技术人员自学参考书。

全书共八章，周坚编一、二、三、四、六章，包世华编五、七、八章，全书由包世华负责总成。

由于我们水平有限，书中谬误在所难免，望广大读者不吝赐教。

目 录

第一章 薄壁杆件的弯曲和自由扭转

§ 1-1 概述	1
§ 1-2 薄壁杆件的弯曲	2
§ 1-3 闭口截面薄壁杆件的自由扭转	20
§ 1-4 开口截面薄壁杆件的自由扭转	28
习题	35

第二章 开口截面薄壁杆件的约束扭转

§ 2-1 概述	37
§ 2-2 基本假定, 约束扭转正应力	39
§ 2-3 主扇性极点、主扇性零点与主扇性几何特征	41
§ 2-4 约束扭转剪应力, 薄壁杆件的广义内力——双力矩与弯扭力矩	54
§ 2-5 扭转角的微分方程及其解, 薄壁杆件约束扭转时的广义位移与内力	57
§ 2-6 薄壁杆件约束扭转的初参数解法	60
§ 2-7 薄壁杆件约束扭转的边界条件	66
§ 2-8 集中扭矩与横向荷载作用下的杆件	67
§ 2-9 纵向荷载作用下的杆件	77
§ 2-10 简单梁的弯曲理论比拟	83
习题	85

第三章 闭口截面薄壁杆件的约束扭转

§ 3-1 概述	88
§ 3-2 乌曼斯基的闭口截面薄壁杆件约束扭转理论	90
§ 3-3 多室闭口截面杆件的约束扭转	109
§ 3-4 广义坐标法原理	128
§ 3-5 考虑截面外形轮廓线变形的箱形梁的约束扭转	135
§ 3-6 考虑截面外形轮廓线变形, 但忽略剪切变形影响的箱形梁的约束扭转	150
§ 3-7 乌曼斯基理论——广义坐标法的特例	153
习题	155

第四章 用横向联系加强的开口截面薄壁杆件的约束扭转

§ 4-1 概述	158
§ 4-2 多支座薄壁杆件的约束扭转	158
§ 4-3 用窄缀板加强的开口截面薄壁杆件约束扭转的结构力学解法	163
§ 4-4 用缀板或缀条加强的开口截面薄壁杆件约束扭转的连续化解法 I	169

§ 4-5 用缀板或缀条加强的开口截面薄壁杆件约束扭转的连续化解法 II	174
§ 4-6 用隔板加强的槽形截面薄壁杆件的约束扭转	184
§ 4-7 在弹性介质中薄壁杆的约束扭转	188
习题	195

第五章 薄壁杆件结构的计算

§ 5-1 概述	197
§ 5-2 力法原理及其在薄壁杆件结构中的应用	198
§ 5-3 薄壁杆件位移计算的一般公式及其简化	200
§ 5-4 力法计算示例	209
§ 5-5 位移法原理及其在薄壁杆件结构中的应用	215
§ 5-6 薄壁杆件的反力系数计算	216
§ 5-7 位移法计算示例	222
§ 5-8 矩阵位移法的基本原理和计算过程——薄壁连续梁的扭转计算	226
§ 5-9 矩阵位移法计算薄壁平面板架	236
§ 5-10 矩阵位移法计算薄壁空间刚架	253
习题	256

第六章 薄壁杆件的稳定

§ 6-1 概述	258
§ 6-2 杆端偏心压力作用下开口薄壁杆件的稳定	259
§ 6-3 杆端偏心压力作用下开口薄壁杆稳定问题的几个特例	268
§ 6-4 杆端偏心受拉时开口薄壁杆的稳定	276
§ 6-5 杆端偏心压力作用下开口截面薄壁杆空间形态的稳定	277
§ 6-6 开口截面薄壁杆件平面形态稳定的一般理论	278
§ 6-7 开口薄壁杆平面形态稳定问题的几个特例	286
§ 6-8 用虚位移原理求临界荷载的近似值	293
§ 6-9 闭口截面薄壁杆件的稳定	300
习题	302

第七章 薄壁杆件结构的能量原理

§ 7-1 概述	304
§ 7-2 薄壁杆件的弯扭势能	304
§ 7-3 势能原理和位移法	310
§ 7-4 里兹法	313
§ 7-5 势能驻值原理应用举例——箱形梁的剪力滞后效应	321
§ 7-6 余能原理和力法	327
§ 7-7 余能驻值原理应用举例一——矩形筒体结构的受力和变形分析	333
§ 7-8 余能驻值原理应用举例二——多边形筒体结构的受力和变形分析	340
习题	354

第八章 薄壁杆件分析的有限元法

§ 8-1 概述	356
----------------	-----

§ 8-2 形函数.....	356
§ 8-3 薄壁杆单元分析.....	360
§ 8-4 整体分析及计算示例.....	366
§ 8-5 按广义坐标法原理进行薄壁杆单元分析.....	370
§ 8-6 广义坐标法计算示例.....	375
§ 8-7 薄壁杆稳定问题的弯扭总势能.....	381
§ 8-8 薄壁杆稳定问题的单元分析.....	386
§ 8-9 稳定问题的整体分析及计算示例.....	389
习题	392
参考文献.....	393

第一章

薄壁杆件的弯曲和自由扭转

§ 1-1 概 述

薄壁杆件是指截面厚度较薄的等截面直杆，其三个尺度 δ 、 b 和 l （图1-1）通常满足下列关系：

$$\left. \begin{array}{l} \delta/b \leq 0.1 \\ b/l \leq 0.1 \sim 0.2 \end{array} \right\} \quad (1-1)$$

其中 $\delta(s)$ ——壁厚，只是截面轮廓曲线 s 的函数；
 b ——截面的最大宽度或高度；
 l ——杆长。

薄壁截面视其轮廓线是否封闭而分为开口薄壁截面与闭口截面两大类（图1-2a）、b)）。

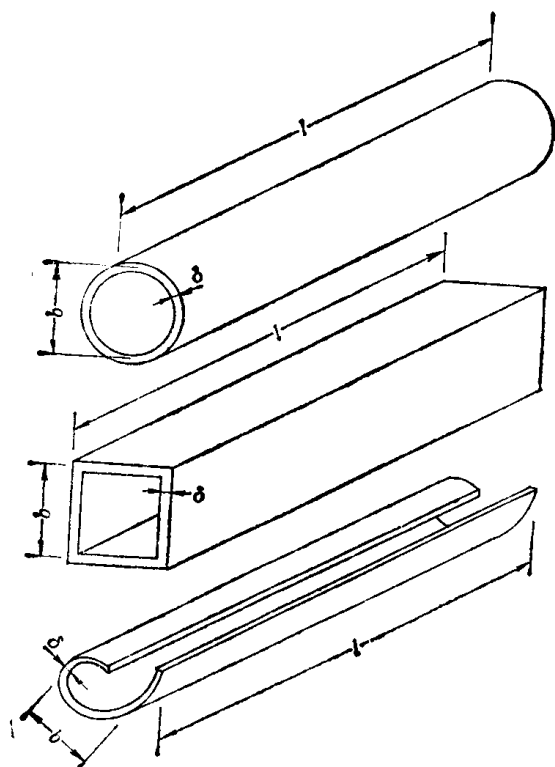
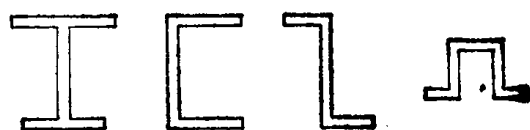


图 1-1



a) 开口薄壁截面



b) 闭口薄壁截面

图 1-2

薄壁杆件在实际工程中应用很广，如桥梁工程和海洋工程中的箱形、工字形和槽形梁（柱），土木工程中的各种型钢，高层建筑中的钢筋混凝土核心墙，以及航空工业中的机翼

构件和造船工业中的船体构件等。

薄壁杆件计算理论是在四十年代以后逐步发展起来的一个力学分支。

符拉索夫的薄壁杆件理论，已被世界各国普遍接受。它抓住了薄壁杆件受力变形的主要特点，采用了一些基本假定，从而合理地简化了计算，建立了满足工程需要的实用理论体系，并为更深入的研究奠定了基础。本书将系统地介绍这一理论，并尽可能地反映近年来的一些研究成果。

§ 1-2 薄壁杆件的弯曲

1. 弯曲正应力

薄壁杆件的弯曲一般是非对称弯曲问题，即没有对称平面的梁的弯曲问题。实体杆的弯曲计算是建立在平面假定的基础上的，对于薄壁杆件的弯曲问题仍采用这一假定来计算。

图1-3为一具有任意横截面的薄壁杆件， o 为形心， $o-xyz$ 为过形心的一组任意直角坐标。设沿 ox 、 oy 轴分别有弯矩 M_x 、 M_y 作用，以双箭矢量表示。弯矩以符合右手螺旋法则为正。设中性轴为 oo' ，截面上任意点 A 处微面积 dF 的坐标是 x 、 y ，它到中性轴的距离为 ξ ，则

$$\xi = y \cos \alpha - x \sin \alpha \quad (a)$$

根据平面假定， A 点处的正应变为

$$\epsilon_z = -\frac{1}{\rho} \xi \quad (b)$$

式中 ρ ——中性层的曲率半径；

α ——中性轴与 x 轴的夹角。

因而正应力为

$$\sigma_z = E \epsilon_z = -E \frac{\xi}{\rho} \quad (c)$$

因为沿 z 轴方向无外力作用，故

$$\int_V \sigma_z dF = 0$$

即

$$\int_V \xi dF = 0 \quad (d)$$

将 (a) 式代入 (c) 式，得

$$\sigma_z = -\frac{Ey}{\rho} \cos \alpha + \frac{Ex}{\rho} \sin \alpha \quad (e)$$

由绕 x 、 y 轴的力矩平衡方程得

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_V \sigma_z y dF = \int_V -\frac{Ey^2}{\rho} \cos \alpha dF + \int_V \frac{Exy}{\rho} \sin \alpha dF \\ &= -\frac{E \cos \alpha}{\rho} I_x + \frac{E \sin \alpha}{\rho} I_{xy} \\ M_y &= -\int_V \sigma_z x dF = -\frac{E \sin \alpha}{\rho} I_y + \frac{E \cos \alpha}{\rho} I_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

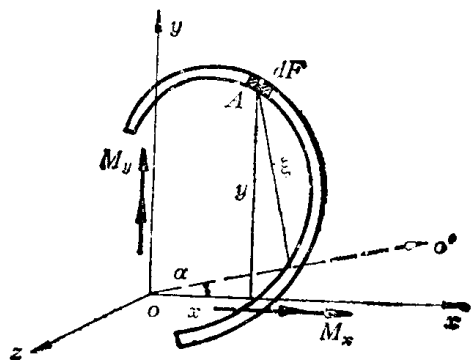


图 1-3

式中 I_x 、 I_y 为关于两个形心轴的惯性矩, I_{xy} 为惯性积。

由上两式解出 $\frac{E \sin \alpha}{\rho}$ 与 $\frac{E \cos \alpha}{\rho}$, 代入 (e) 式, 得

$$\sigma_z = \frac{\bar{M}_x}{I_x} y - \frac{\bar{M}_y}{I_y} x \quad (1-2)$$

式中 $\bar{M}_x$ 、 $\bar{M}_y$ 称为“有效弯矩”, 它们分别为

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_x &= \frac{M_x + M_y I_{xy} / I_y}{1 - I_{xy}^2 / (I_x I_y)} \\ \bar{M}_y &= \frac{M_y + M_x I_{xy} / I_x}{1 - I_{xy}^2 / (I_x I_y)} \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

(1-2) 和 (1-3) 式就是薄壁杆件的弯曲正应力公式。当已知 M_x 、 M_y 时, 由此可以求得杆中弯曲正应力。

当 x 、 y 轴为主轴时, $I_{xy} = 0$, 则

$$\begin{aligned} \bar{M}_x &= M_x \\ \bar{M}_y &= M_y \end{aligned}$$

此时, (1-2) 式可以写为通常的形式

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \quad (1-4)$$

应当指出, 在上述推导中, 只利用了几何条件 (b) 式、物理条件 (c) 式和平行条件 (f) 式, 而与杆件截面的几何形状和尺寸无关。

所以以上的结果适用于任意截面, 包括开口截面与闭口截面的薄壁杆件。

【例 1-1】求图 1-4 所示 Z 形截面薄壁杆件在弯矩 M_x 作用下的正应力分布。

【解】

(1) 截面几何特征

此截面为反对称的, 其形心在腹板中点 O。

$$I_x = 2 \times \frac{h\delta}{2} \times \left(-\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{\delta h^3}{12} = \frac{1}{3} \delta h^3$$

$$I_y = 2 \times \frac{\delta}{3} \times \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{1}{12} \delta h^3$$

$$I_{xy} = \frac{\delta h}{2} \times \left(-\frac{h}{4}\right) \times \left(\frac{h}{2}\right) + \frac{\delta h}{2} \times \frac{h}{4} \times \left(-\frac{h}{2}\right) = -\frac{1}{8} \delta h^3$$

(2) 应力计算

$$\sigma_z = \frac{\bar{M}_x}{I_x} y - \frac{\bar{M}_y}{I_y} x$$

其中

$$\bar{M}_x = \frac{M_x}{1 - I_{xy}^2 / (I_x I_y)} = 2.29 M_x$$

$$\bar{M}_y = \frac{M_y I_{xy} / I_x}{1 - I_{xy}^2 / (I_x I_y)} = -0.86 M_x$$

所以

$$\sigma_z = \frac{M_x}{\delta h^3} (6.87 y + 10.32 x)$$

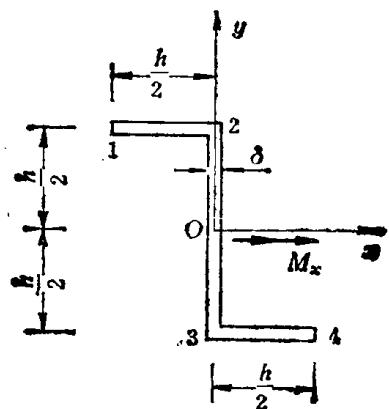


图 1-4

在上翼缘板上: $y = \frac{h}{2}$, $-\frac{h}{2} \leq x \leq 0$ 。

$$\sigma_x = \frac{M_x}{\delta h^3} \times (3.43h + 10.32x) \quad (\text{直线变化})$$

$$(\sigma_x)_1 = -\frac{1.73M_x}{\delta h^2} \quad (\sigma_x)_2 = \frac{3.43M_x}{\delta h^2}$$

在腹板上: $x = 0$, $-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}$

$$\sigma_x = \frac{M_x}{\delta h^3} \times 6.87y \quad (\text{直线变化})$$

$$(\sigma_x)_2 = \frac{3.43M_x}{\delta h^2}, \quad (\sigma_x)_3 = -\frac{3.43M_x}{\delta h^2}$$

在下翼缘板上: $y = -\frac{h}{2}$, $0 \leq x \leq \frac{h}{2}$

$$\sigma_x = \frac{M_x}{\delta h^3} \times (-3.43h + 10.32x) \quad (\text{直线变化})$$

$$(\sigma_x)_3 = -\frac{3.43M_x}{\delta h^2} \quad (\sigma_x)_4 = \frac{1.73M_x}{\delta h^2}$$

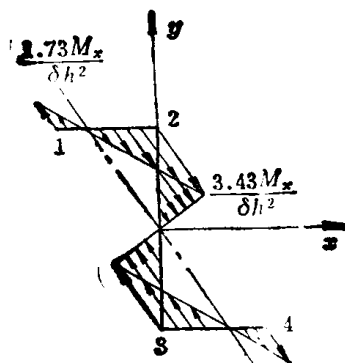


图 1-5

下翼缘板的正应力也可利用反对称性得到。正应力分布图如图1-5。

(3) 讨论

如略去斜弯曲的影响, 正应力为

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I_x} y$$

$$(\sigma_x)_2 = \frac{M_x}{\frac{1}{3} \delta h^3} \times \frac{h}{2} = \frac{1.5M_x}{\delta h^2}$$

仅为正确结果的42.7%。可见非对称截面的薄壁杆件不能忽略斜弯曲的影响。

2. 开口截面薄壁杆件中的剪应力

现在讨论在过截面剪切中心的横向力作用下薄壁杆件的弯曲问题。

通常, 横向荷载使薄壁杆件既发生弯曲, 又产生扭转, 只有当它们的合力通过杆件横截面上某一特定点 O_1 时, 杆件才没有扭转而只发生弯曲。这一特定点称为截面的剪切中心或弯曲中心。确定截面剪切中心的位置是大家所关心的, 也是薄壁杆件理论的重要内容。这将在第二章详细讨论。

在过剪切中心 O_1 的横向力作用下, 杆件任意截面处将产生弯矩 M 和剪力 Q 。截面上的正应力将由弯矩 M 来确定[见(1-2)和(1-3)式]。下面讨论剪应力的计算。

图1-6示一薄壁杆件(开口或闭口)微段 dz , s 为截面轮廓线的曲线坐标, 以逆时针方向为正, A 点为曲线坐标 s 的起始点。假定壁厚 $\delta(s)$ 与坐标 z 无关, 只是曲线坐标 s 的函数。

首先, 建立该微段的平衡方程, 求截面上的剪力与弯矩的关系。图1-6标出了 dz 段上所受的各种内力, 图中所示均为正方向。

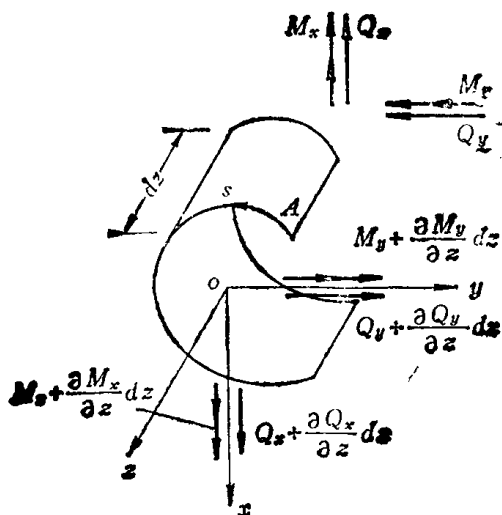


图 1-6

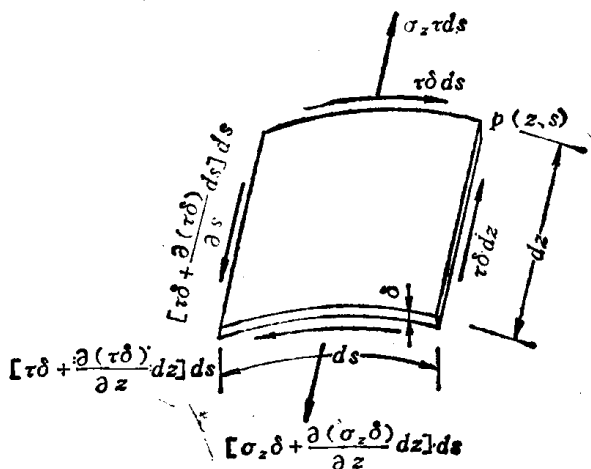


图 1-7

由
$$\left. \begin{aligned} \Sigma M_x = 0, \quad Q_y &= -\frac{\partial M_x}{\partial z} \\ \Sigma M_y = 0, \quad Q_x &= -\frac{\partial M_y}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

由 (1-3) 和 (1-5) 式可知, “有效剪力” 与 “有效弯矩” 和剪力的关系为

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_y &= -\frac{\partial \bar{M}_x}{\partial z} = \frac{Q_y - Q_x I_{xy}/I_y}{1 - I_{xy}^2/(I_x I_y)} \\ \bar{Q}_x &= -\frac{\partial \bar{M}_y}{\partial z} = \frac{Q_x - Q_y I_{xy}/I_x}{1 - I_{xy}^2/(I_x I_y)} \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

其次, 讨论杆件中的剪应力。在杆件上任一点 $P(z, s)$ 处取一单元 $ds \times dz$ (如图 1-7), 考虑它的平衡来建立平衡微分方程式。

$$\Sigma z = 0, \quad \frac{\partial(\sigma_z \delta)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau \delta)}{\partial s} = 0 \quad (g)$$

由于 $\delta = \delta(s)$, 与 z 无关, 故上式可写成

$$\delta \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial(\tau \delta)}{\partial s} = 0 \quad (1-7)$$

由此可解得

$$\tau \delta = - \int_0^s \delta \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} ds + C_1(z) \quad (h)$$

上式中的任意积分函数 $C_1(z)$ 为截面曲线坐标起始点 A 处的剪力流 $(\tau \delta)_A$ 。这里采用了一个假定, 即由于壁厚很小, 弯曲剪应力沿壁厚均匀分布并沿轮廓线的方向作用, 构成剪力流。下面为了简便, 直接计算剪力流, 记作 $q = \tau \delta$ 。

由 (1-2) 式, 有

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial z} \cdot \frac{y}{I_x} - \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial z} \cdot \frac{x}{I_y}$$

将上式代入 (h) 式, 并注意到 (1-6) 式的关系, 得

$$q = \tau \delta = -\frac{\bar{Q}_y}{I_x} \int_0^s \delta y ds - \frac{\bar{Q}_x}{I_y} \int_0^s \delta x ds + (\tau \delta)_A \quad (1-8)$$

由于

$$\delta ds = dF$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^s \delta y ds &= \int_0^s y dF = S_x \\ \int_0^s \delta x ds &= \int_0^s x dF = S_y \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

其中 S_x 、 S_y 分别为截面上 s 点关于 x 轴与 y 轴的静面矩。由 (1-8) 式可求得截面上的剪力流为

$$q = \tau \delta = -\left(\frac{\bar{Q}_y}{I_x} S_x + \frac{\bar{Q}_x}{I_y} S_y \right) + (\tau \delta)_A \quad (1-10)$$

当 x 、 y 轴为截面主轴时, $I_{xy} = 0$, (1-10) 简化为

$$q = \tau \delta = -\left(\frac{Q_y}{I_x} S_x + \frac{Q_x}{I_y} S_y \right) + (\tau \delta)_A \quad (1-11)$$

对于开口截面, 可把参考点 A 选在开口处, 由剪应力互等定理知 $\tau_A = 0$, 从而消除了 $(\tau \delta)_A$ 一项。

【例 1-2】图 1-4 所示的 Z 形截面薄壁杆件, 在腹板平面内受横向剪力 Q_y , 如图 1-8a 所示。求剪力流的分布图。

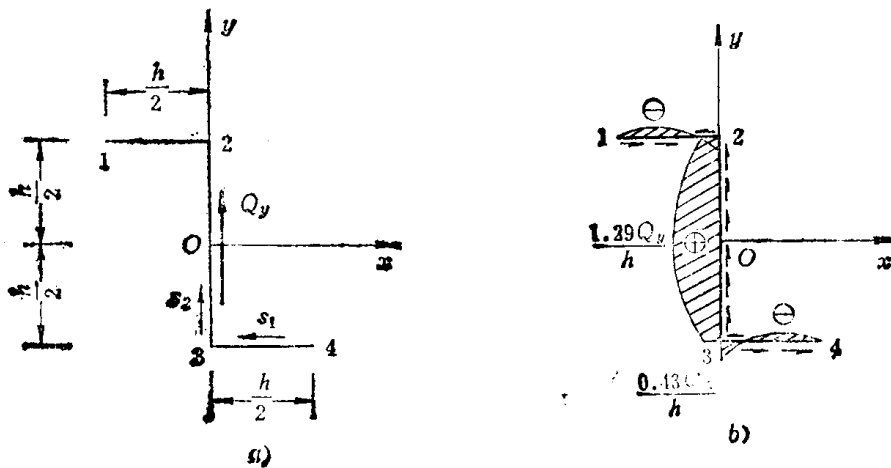


图 1-8

【解】

由于截面是反对称的, 坐标原点 O 即为剪切中心。 Q_y 通过剪切中心, 故截面不发生扭转。

有效剪力为

$$\bar{Q}_x = -\frac{Q_y I_{xy} / I_x}{1 - I_{xy}^2 / (I_x I_y)} = 0.86 Q_y$$

$$\bar{Q}_y = \frac{Q_y}{1 - I_{xy}^2 / (I_x I_y)} = 2.29 Q_y$$

由(1-8)式得

$$q(s) = -\frac{Q_y}{h^3} \int_0^s (6.87y + 10.32x) ds$$

在下翼缘板上: $y = -\frac{h}{2}$, $x = \frac{h}{2} - s_1$ 。因此

$$\begin{aligned} q(s_1) &= \frac{Q_y}{h^3} \int_0^{s_1} (10.32s_1 - 1.73h) ds_1 \\ &= \frac{Q_y}{h^3} \times (5.16s_1^2 - 1.73hs_1), \quad (\text{抛物线分布}) \end{aligned}$$

在点4, $s_1 = 0$, $(q)_4 = 0$;

在点3, $s_1 = \frac{h}{2}$, $(q)_3 = 0.43 \frac{Q_y}{h}$ 。

再看在点3、4之间剪力流有无零点。由 $q(s_1) = 0$, 可解得 $s_1 = 0.334h$, 说明在该点的剪力流为零, 剪力流经过此点时改变符号。既然 $(q)_3 = q(s_1 = \frac{h}{2})$ 为正, 则当 $s_1 < 0.334h$ 时 $q(s_1)$ 必为负, 这时 $q(s_1)$ 的方向与 s_1 的方向相反。

在腹板上: $x = 0$, $y = -\frac{h}{2} + s_2$,

$$\begin{aligned} q(s_2) &= -\frac{Q_y}{h^3} \int_0^{s_2} (6.87s_2 - 3.43h) ds_2 + (q)_3 \\ &= -\frac{Q_y}{h^3} \times (3.43s_2^2 - 3.43hs_2 - 0.43h^2) \end{aligned}$$

也是抛物线分布。

当 $s_2 = 0$ 时, $(q)_3 = 0.43Q_y/h$

当 $s_2 = \frac{h}{2}$ 时, $(q)_0 = 1.29Q_y/h$

另一半的剪力流, 可按反对称关系得到。整个剪力流分布如图1-8b)所示。

【例 1-3】求图1-9a) 示工字形截面在 Q_y 作用下截面中的剪力流分布。

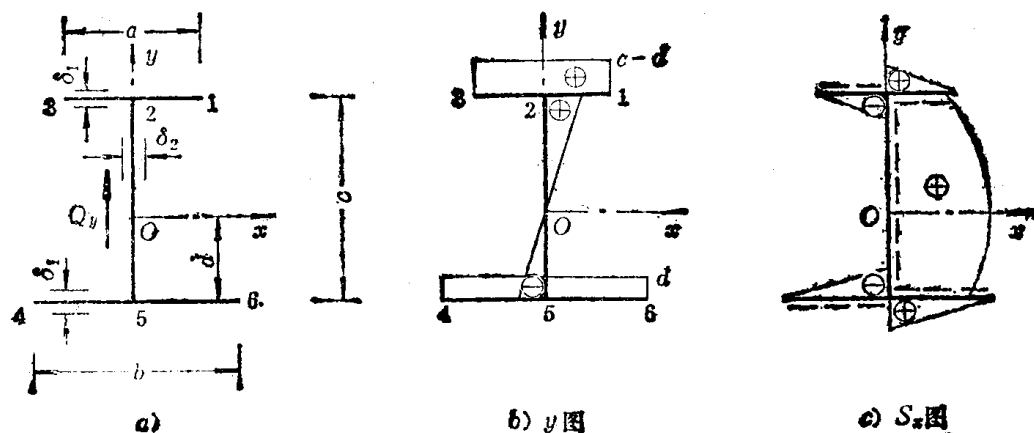


图 1-9

【解】

本题中由于 $Q_s = 0$ ，把 s 的起算点选在开口处，由(1-11)式得

$$q = -\frac{Q_y}{I_s} s_*(s)$$

可见，欲求 q 的分布，只要求得 $S_*(s)$ 图，然后再乘以 $(-Q_y/I_s)$ 即可。

对于壁厚分段相等、截面轮廓线由直线组成的杆件，在计算 $S_*(s)$ 时可不必进行复杂的积分运算。由于

$$S_*(s) = \int y dF = \int y \delta ds = \sum \delta_i \int y ds_i$$

$y ds$ 是 y 图在 ds 上的微面积，显然 $S_*(s)$ 即为从 s 的起算点 $s=0$ ，到指定点 s 段内 y 图的面积乘以各自壁厚的代数之和。

现用这一方法求解此例。

先求主轴位置。由于 y 轴为对称轴，所以为一主轴。设主轴 ox 到下翼缘的距离为 d 。

作出 y 图示于图1-9、b)。主轴要求 $\bar{S}_* = \int y dF = 0$ ，即 y 图上各段面积与相应壁厚乘积的代数和为零。

$$a(c-d)\delta_1 + \frac{1}{2}(c-d)^2\delta_2 - \frac{1}{2}d^2\delta_2 - bd\delta_1 = 0$$

由此解得

$$d = \frac{c}{2} \cdot \frac{2a\delta_1 + c\delta_2}{(a+b)\delta_1 + c\delta_2}$$

由于 s 的起算点取在开口处，虽然开口处1、3、4、6点的 y 值不为零，但因 $s=0$ ，故

$$S_*(1) = S_*(3) = S_*(4) = S_*(6) = 0$$

现在来看 $S_*(2_+)$ 。如前所述， $S_*(2_+)$ 应为从 S 的起算点到 2_+ 截面 y 图面积与壁厚乘积的代数和。这里从1点起算最简便。前面规定， s 以绕剪切中心逆时针方向为正。 s 由1点到达2点为逆时针运行，所以 $s(2_+) = \frac{a}{2}$ （为正），在此段内 y 是一常数，于是

$$S_*(2_+) = (c-d) \cdot \frac{a}{2} \delta_1$$

对于 $S_*(2_-)$ ，从3点起算最简便， s 由3点运动到2点，为顺时针方向，即为负， $s(2_-) = -\frac{a}{2}$ ，

$$S_*(2_-) = (c-d) \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) \delta_1 = -(c-d) \frac{a}{2} \delta_1$$

当然， $S_*(2_-)$ 也可由除23段以外的部分求得

$$\begin{aligned} S_*(2_-) &= (c-d) \frac{a}{2} \delta_1 + \frac{1}{2}(c-d)^2\delta_2 - \frac{1}{2}d^2\delta_2 - db\delta_1 \\ &= (c-d) \frac{a}{2} \delta_1 + \frac{1}{2}(c^2 - 2cd)\delta_2 - db\delta_1 \\ &= \frac{ac}{2} \delta_1 + \frac{c^2}{2} \delta_2 - \left(\frac{a}{2} \delta_1 + c\delta_2 + b\delta_1\right)d \end{aligned}$$

将 d 代入, 并整理后得

$$\begin{aligned} S_s(2_{\pm}) &= -\frac{ac\delta_1}{2} \cdot \frac{2b\delta_1 + c\delta_2}{2[(a+b)\delta_1 + c\delta_2]} \\ &= -(c-d) \cdot \frac{a}{2} \delta_1 \end{aligned}$$

s 由 $2_{\pm}$ 逆时针到达点3,

$$S_s(3) = S_s(2_{\pm}) + (c-d) \cdot \frac{a}{2} \delta_1 = 0$$

再看 $S_s(2_{\mp})$, $S_s(2_{\mp})$ 应为截面 $2_{\mp}$ 以上或以下所有 y 图面积与壁厚乘积的代数和, 以计算上部为简便, s 从1点开始到达3点, 逆时针, 为正, 即 $s(2_{\mp}) = a$, 则

$$S_s(2_{\mp}) = (c-d)a\delta_1$$

同理
$$\begin{aligned} S_s(0) &= S_s(2_{\mp}) + \frac{1}{2}(c-d)^2\delta_2 \\ &= (c-d)\delta_1 a + \frac{1}{2}(c-d)^2\delta_2 \quad (\text{最大值}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_s(5_{\pm}) &= S_s(7) + \frac{1}{2} \cdot (-d) \cdot d\delta_2 \\ &= (c-d)a\delta_1 + \frac{1}{2}(c-d)^2\delta_2 - \frac{1}{2}d^2\delta_2 \end{aligned}$$

$$S_s(5_{\mp}) = (-d) \cdot \left(-\frac{b}{2}\right)\delta_1 = \frac{1}{2}bd\delta_1$$

$$S_s(5_{\mp}) = (-d) \cdot \frac{b}{2}\delta_1 = -\frac{1}{2}bd\delta_1$$

当然, $S_s(5_{\pm})$ 也可由 $5_{\pm}$ 截面以下部分求得。此时 s 由 b 点出发, 顺时针方向到达4点, 为负, 即 $s(5_{\pm}) = -b$, 所以

$$S_s(5_{\pm}) = (-d) \cdot (-b)\delta_2 = bd\delta_2$$

这与前面求得的 $S_s(5_{\pm})$ 形式上不一样, 但若把 d 值代入后, 可以验证, 结果是一样的。

由于 $S'_s(s) = y(s)$, 即二者之间有简单的微分关系, 可由此作出 $S_s(s)$ 图来。在翼板上由于 y 图为水平直线(常数), 所以 S_s 图为斜直线(一次函数), 即只要在所求得的控制点之间连一直线即可。在腹板上 y 图为一斜直线, 故 $S_s(s)$ 图应为二次曲线; 由于 $y(0) = 0$, $S_s(s)$ 图在此点斜率为零, S_s 达到极值。 S_s 图示于图1-9c)。

由于剪力流 q 与 S_s 之间差一负倍数, 求得 S_s 图后不仅可以知道截面上各点剪力流的大小, 还可以知道它的方向; 即凡 S_s 为正的地方, 剪力流均为负(顺时针方向), 反之则为正(逆时针方向)。剪力流的方向标于图c。

在图1-9a中, 当 $a=b$ 时, $d = \frac{c}{2}$

$$S_s(5_{\pm}) = S_s(2_{\mp}) = \frac{1}{2}ac\delta_1$$

$$S_s(5_{\mp}) = S_s(2_{\pm}) = -S_s(2_{\mp}) = -S_s(5_{\pm}) = -\frac{1}{4}ac\delta_1$$

$$S_s(7) = \frac{1}{2}ac\delta_1 + \frac{1}{8}c^2\delta_2$$

解毕

【例 1-4】 求图1-10a)所示截面在 Q_y 作用下的剪力流分布。 δ 为常数。

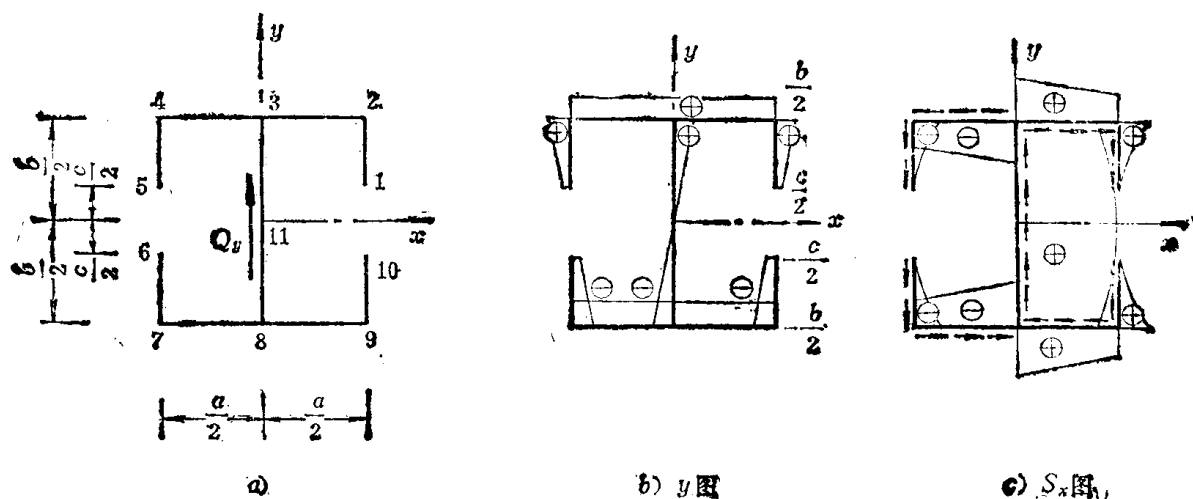


图 1-10

【解】

因截面为双轴对称， ox 、 oy 轴均为主轴。

由 $q = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(s)$ ，只作 S_x 图。

首先作 y 图示于图b)。

点1、5、6、10为开口处，有

$$S_x(1) = S_x(5) = S_x(6) = S_x(10) = 0$$

$$S_x(2) = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) \times (b-c)\delta = -\frac{1}{4}(b^2 - c^2)\delta$$

$$S_x(3_{\text{右}}) = S_x(2) + \frac{b}{2} \times \frac{a}{2} \delta = -\frac{1}{4}(b^2 - c^2 + ab)\delta$$

$$S_x(4) = -\frac{1}{4}(b^2 - c^2)\delta$$

$$S_x(3_{\text{左}}) = -\frac{1}{4}(b^2 - c^2 + ab)\delta$$

$$S_x(3_{\text{中}}) = -\frac{1}{2}(b^2 - c^2 + ab)\delta$$

$$\begin{aligned} S_x(11) &= S_x(3_{\text{中}}) + \frac{1}{2} \times \frac{b}{2} \times \frac{b}{2} \delta \\ &= -\frac{1}{2}(b^2 - c^2 + ab)\delta + \frac{1}{8}b^2\delta \end{aligned}$$

另一半对称。

$S_x(s)$ 图示于图c)，剪力流的方向标于图上。

解毕

【例 1-5】 求图1-11a)所示截面在 Q_y 作用下的剪力流分布。 δ 为常数。

【解】

由于 $q = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(s)$ ，只作 $S_x(s)$ 图。

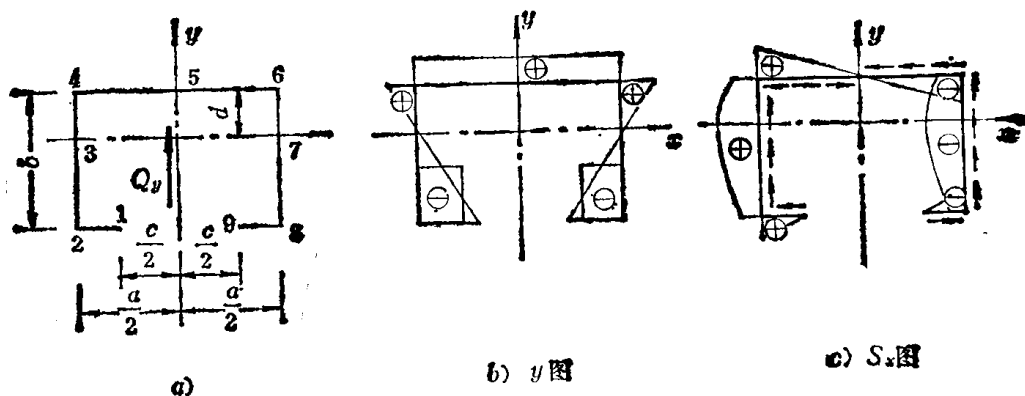


图 1-11

y 轴为对称轴，是一根主轴。首先确定另一主轴 ox 的位置。设 ox 轴到上翼缘的距离为 d 。作 y 图示于图 b)。由 $\bar{S}_x = 0$ 得

$$ad\delta + 2 \times \frac{1}{2}d^2\delta - (a-c)(b-d)\delta - \frac{1}{2}(b-d)^2\delta = 0$$

可解得

$$d = \frac{b(a+b-c)}{2a+2b-c}$$

1、9 点为开口处， $S_x(1) = S_x(9) = 0$

$$S_x(2) = -(b-d) \cdot \left[-\frac{(a-c)}{2} \right] \delta = \frac{1}{2}(b-d)(a-c)\delta = -S_x(8)$$

$$\begin{aligned} S_x(3) &= S_x(2) - \frac{1}{2}(b-d)[-(b-d)]\delta \\ &= \frac{1}{2}(b-d)(a-c+b-d)\delta = -S_x(7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_x(4) &= S_x(3) - \frac{1}{2}d^2\delta \\ &= \frac{\delta}{2}[(b-d)(a-c+b-d) - d^2] = -S_x(6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_x(5_k) &= S_x(4) + d \cdot \left(-\frac{a}{2} \right) \delta \\ &= \frac{\delta}{2}[(b-d)(a-c+b-d) - d^2 - ad] \\ &= 0 = S_x(5_k) \end{aligned}$$

$S_x(s)$ 图示于图 c)，剪力流的方向标于图上。

当 $c = 0$ 时， $d = \frac{b}{2}$

$$S_x(1) = S_x(9) = 0$$

$$S_x(2) = -\frac{1}{4}ab\delta = -S_x(8)$$

$$S_x(3) = -\frac{1}{8}b(2a+b)\delta = -S_x(7)$$