GJ

经济数学基础

·3·

概率论与数理统计

云南大学出版社

前　　言

在社会主义市场经济的条件下，现实经济活动工作对定量分析的需要有所加强和发展，数学在自然科学和社会科学的各个领域内有着广泛的应用，尤其在经济活动中，数学模型在《西方经济学》、《商业经济》、《会计学》、《银行货币学》、《统计学》等学科中有着广泛的应用，因此，在进行定量分析时对经济数学知识的需要也有所增大和发展、基于此种考虑，我们编写了这套《经济数学基础》的教材、

在编写教材时，不但要考虑到财经院校《经济数学基础》教学大纲对内容和学时的实际需要，又要考虑到数学学科本身的特点和系统性、科学性，以及在财经院校对数学教学的实际情况，因而在编写教材时我们着重考虑到以下几个问题:

1. 在符合教学大纲规定的内容和学时的前操下，希望尽可能多地介绍一些财经院校所必需的数学知识，又保持数学学科本身的系统性、逻辑的严密性和科学性。

2. 坚持理论联系实际的原则。鉴于财经院校学生学习的实际情况，尽可能能对繁琐的定理（法则）不给予证明，而对一些基本的定理（法则）采取直观地几何解释、严格证明等证明方法，一方面文科学生容易接受，另一方面对学生更好地掌握教材中介绍的基本原理和方法是大有帮助的.

3. 为了有利于培养学生的逻辑思维能力，使读者进一步地提高应用数学知识分析和处理经济问题的能力，比较熟练地掌握教材中的基本概念、基本理论和基本计算方法和法则，在教材中除了配置一定数量的习题、书后附有习题的参考答案之外，尤其

着重介绍了一定数量的经济方面的应用例题。

在编写教材时，我们参考了不少兄弟院校编写的有关教材。唐家祥教授对《线性代数》、熊锡金教授对《概率论和数理统计》的编写提出了宝贵的意见和建议，对此我们表示衷心地感谢。

《经济数学基础》全书共分三册：《微积分》、《线性代数》与《概率论和数理统计》。全部讲完约 232 学时，需要配置一定数量的习题课。《微积分》由刘祖佑、付平任主编，付主编唐永昆、马锐，参加编写的人员杜荣川（第一、六章），刘祖佑（第二章），赵萍（第三章）、唐永昆（第四、七章），马锐（第五章），付平（第八、九章）。

《线性代数》由杨直中，蒋在斌任主编、付主编晁阳，唐家祥教授主审，参加编写的人员王云秋（第一章），晁阳（第二章），蒋在斌（第三章），杨直中（第四章），张红星（第五章）。

《概率论和数理统计》由舒方，杨晓玲任主编，付主编马磊，陈贻娟，熊锡金教授主审，参加编写的人员王刚（第一章），陈贻娟（第二章），马磊（第三、四章），杨晓玲（第五、六章），罗兆富（第七、八章），舒 方（第九章和附录）。

由于水平有限，时间仓促，教材中一定存在这样和那样的缺点和问题，敬请读者不吝批评指正，以利于提高和改正，我们将万分感谢。

《经济数学基础》编写组

一九九五年七月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

§1.1　随机现象

在日常生活中，我们常常碰到两种不同的现象：确定性现象（必然现象）和随机现象（偶然现象）。

在一定条件下，必然会发生某一种结果的现象，称为确定性现象。例如，“同性电荷互相排斥”；“在标准大气压下，水加热到100℃沸腾”；“上抛一石子必然下落”等都是确定性现象，其特点是事先可预言它们是必然发生的。

在一定条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而且不能预先断言出现哪种结果的现象，称为随机现象。例如，“掷一颗骰子，可能出现1点，可能出现2点，…，可能出现6点”；“从一批产品中任取一件进行检验，可能是正品，可能是次品”；“明年3月份昆明地区的平均气温”等这些现象都是随机现象，随机现象的特点之一是在事前无法预知哪一个结果会发生。

虽然随机现象在一次试验中具有偶然性，但并不是说我们对于随机现象就无法掌握。若对随机现象进行大量重复试验和观察，其出现的结果又呈现一定规律性。如，掷一枚硬币国徽面向上（出现正面），分值面向上（出现反面）这两种结果在一次试验中无法预知，但若多次重复抛掷，将会呈现一定的规律性——正面和反面出现的次数大致各占一半。又如，一艘海轮在雾中触礁，这是一个偶然的不幸事故；但是经过多年长期的现象和统计，就这种现象的整体来看就能发现它有一种规律：每年总有那么多数量（一个比较稳定的数值）的船舶会触礁；掌握这种危险

发生的必然规律性，保险公司就有了开展船舶保险业务的基础。

总之，凡随机现象都有两重性：一次试验的不确定性和多次重复试验的规律性。

正因为随机现象是具有偶然性质的现象，所以对这种现象我们不能用一些简单的物理定律加以概括，也无法利用“因果关系”加以严格控制和准确预测。然而，又因为在多次重复的条件下，随机现象具有规律性，所以可从大量观测中进行综合分析，归纳出“大量现象”的规律性。这就是概率论和数理统计的方法。“概率论和数理统计”是一门研究随机现象规律性的科学。

§ *1.2* 随机事件和样本空间

一、随机事件

我们把对随机现象的观察和试验称为随机试验。例如，上抛一枚硬币，观察出现正、反面的情况；掷一颗骰子，记录其出现的点数；记录某地区某一天的最高气温；等等，都是随机试验。

一般地，随机试验具有以下三个特点：

(1) 可以在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验，可能的结果不止一个，但事先能明确所有可能的结果；

(3) 试验之前无法预先断言会出现哪种结果。

称随机试验的结果为随机事件，简称事件。例如，掷骰子观察出现的点数，是一个随机试验，它的一切可能结果都是随机事件，“出现 1 点”、“出现 2 点”、“出现 3 点”、“出现 4 点”、“出现 5 点”、“出现 6 点”就是六个事件。

每次试验中肯定发生的事件称为必然事件。例如，掷一枚骰子，“其点数不大于 6”就是必然事件。

每次试验中肯定不会发生的事件称为不可能事件。例如，掷

一颗骰子,“出现 7 点”是不可能事件。

应当注意的是，不可能事件和必然事件不是随机事件。因为作为随机试验的结果，它们都呈现着确定性（严格说不是随机试验）。不过为了研究上的方便，我们总是将它们当作特殊的随机事件来处理。

仍以掷骰子为例，试验的每一个可能出现的结果都是一个随机事件。在这些事件分成两类:

其一:“出现 1 点”、“出现 2 点”、……、“出现 6 点”，这六个事件是这个试验的最简单的随机事件，叫做基本事件。

其二:“出现偶数点”，也是一个随机事件，它是由“出现 2 点”、“出现 4 点”、“出现 6 点”这三个基本事件组成的，当且仅当这三个事件中有一个发生，则“出现偶数点”这一事件发生，这类事件称为复合事件。

总之，在一定范围内不能再分解的事件叫基本事件，由基本事件组成的事件叫做复合事件。以后约定，用大写字母 A、B、C、……表示随机事件，用 Ω 表示必然事件，用 φ 表示不可能事件。

二、样本空间

某一随机试验的所有基本事件组成的集合称为随机试验的样本空间。

例如，抛一枚硬币，它的基本事件有两个，H 表示出现正面，T 表示出现反面，所以它的样本空间即是{H,T}。

将样本空间看成一个由所有基本事件组成的复合事件，则它是一个必然事件。所以，我们仍用字母 Ω 表示样本空间，上述例子的样本空间为 $\Omega=\{H,T\}$。

以下再举几个样本空间的例子:

例 1、掷一枚骰子，如果“出现 1 点”记为 1,“出现 2 点”记为

2，如此类推，则它们的样本空间为

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

例 2、将一枚硬币连抛两次，它的样本空间由 4 个元素组成，表示为

$\Omega=\{HH,HT,TH,TT\}$

如果是抛两枚硬币，则它的样本空间将不同于上述，因为这两枚硬币无编号的区分，所以样本空间为

$\Omega=\{HH,HT,TT\}$

例 3、某人用步枪打靶射击，如果用 0 表示未击中，1 表示击中，到击中为止，则它的样本空间为

$\Omega=\{1,01,001,0001,\cdots\cdots\}$

例 4、测试一只灯泡的寿命，它可能的结果将是不小于零的某一个实数，所以它的样本空间为

$\Omega=\{t|t\geqslant 0\}$

例 5、测试昆明地区某天一昼夜的最低温度 x 和最高温度 y，其样本空间为

$\Omega=\{(x,y)|-10℃\leqslant x\leqslant y\leqslant 40℃\}$

上述例子中，例 1、例 2 的样本空间为有限集，而例 3、例 4、例 5 的样本空间则为无限集，其中例 3 为无限可数集。

三、随机事件的关系与运算

既然样本空间是所有基本事件所组成的集合，那么自然地，我们把样本空间 Ω 视为一个全集，则每一个随机事件都是 Ω 的一个子集（其中包括必然事件 Ω 和不可能事件 φ）。自然地，与集合之间的关系和运算相似，我们可以在样本空间 Ω 中定义事件之间的关系和运算。

1°、包含关系：如果事件 A 发生，必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B，或称事件 B 包含事件 A，记为

$A \subset B$。这一关系可用图 1-1 所示：用矩形表示样本空间 Ω，区域 B 表示事件 B，区域 A 表示事件 A，区域 A 在区域 B 内表示事件 B 包含事件 A。

例如，(1) 掷骰子试验中，A＝｛出现 1 点｝，B＝{出现奇数点}，则 $A \subset B$。

(2) 在检验圆柱形产品时，只有当直径和长度均合格时，产品才算合格。用 A＝｛直径不合格｝，B＝｛长度不合格，｝，C＝｛产品不合格｝，则 $A \subset C$，$B \subset C$。

如果 $A \subset C$，且 $B \subset C$，则 $A \subset C$。对任一事件 A，有 $\phi \subset A \subset \Omega$。

如果 $A \subset B$，且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A = B$。

2° 事件的和：事件 A 和事件 B 中至少有一个发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的和，记为 $A+B$，$A+B$ 可用图 1-2 阴影部分直观表示。

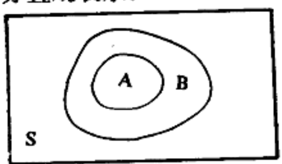

图 1-1

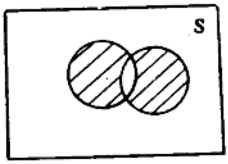

图 1-2

例如，在检验圆柱形产品时，如果 A＝{直径不合格}，B＝{长度不合格}，很显然 A+B＝{产品不合格}。

对任一事件 A，有 $A+A=A$，$A+\phi=A$，$A+\Omega=\Omega$。

事件的和还可推广到有限个的情形，即 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$ 表示这几个事件中至少有一个发生。

3°、事件的积：事件 A 和事件 B 同时发生，这一事件称为事

件 A 与事件 B 的积，记为 AB。AB 可用图 1–3 中阴影部分表示。

例，在检验圆柱形产品时，若 A = {直径合格}，B = {长度合格}，则 AB = {产品合格}。

对任一事件 A，有 AA = A，Aϕ = ϕ，AΩ = A。

同理用$A_1A_2\cdots A_n=\prod\limits_{k=1}^{n}A_k$表示这几个事件同时发生。

4°、事件的差：事件 A 发生而事件 B 不发生，这一事件称为 A 与 B 的差，记为 A–B，如图 1–4 中的阴影部分表示 A–B。

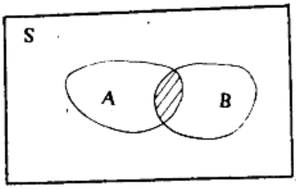

图 1–3

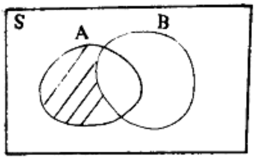

图 1–4

例如，{长度合格而直径不合格} = {长度合格}–{直径合格}；又如，在观察某电话交换台在某段时间内的呼叫次数时，若 A = {呼唤次数不小于 6 次}，B = {呼叫次数大于 6 次}，则 A–B = {呼叫次数为 6 次}。

5° 互不相容事件（互斥事件）：若事件 A 和事件 B 不可能同时发生，则称事件 A、B 为互不相容（互斥），换句话说，即 AB = ϕ。如图 1–5 所示，样本空间 Ω 中的所有基本事件是两两互不相容的。

6°、对立事件（互逆事件）：如果事件 A，B 中必有一个发生，而又不可能同时发生，即 A+B = Ω 且 AB = ϕ，则称事件 A 是事件 B 的对立事件（也可以说事件 B 是事件 A 的对立事件），记为$\overline{B}=A$。如图 1–6 所示，显然$\overline{A}=A$，$\overline{\Omega}=\phi$，$\overline{\Phi}=\Omega$。

很显然，A–B 可以看成 A 与$\overline{B}$同时发生，即$A-B=A\overline{B}$，以后，我们将很少使用事件的差这一运算。

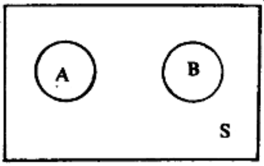

图 1-5

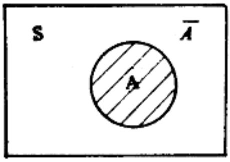

图 1-6

有了以上定义，容易验证事件的运算满足以下性质：

(1) 交换律：$A+B=B+A$，$AB=BA$；

(2) 结合律：$A+(B+C)=(A+B)+C$，

$A(BC)=(AB)C$；

(3) 分配律：$A(B+C)=(AB)+(AC)$，

$A+(BC)=(A+B)(A+C)$；

(4) 摩根律：$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$；

可以推出：$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdots\overline{A_n}$，

$\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\cdots+\overline{A_n}$。

下面来证明一下摩根律中的$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$。

证明：若$\overline{AB}$发生　AB 不发生　A，B 中至少有一个不发生　$\overline{A}$，$\overline{B}$中至少有一个发生　$\overline{A}+\overline{B}$ 发生，$\therefore \overline{AB}\subset\overline{A}+\overline{B}$；另一方面，$\overline{A}+\overline{B}$ 发生　$\overline{A}$，$\overline{B}$中至少有一个发生　$\overline{A}$ 发生或$\overline{B}$ 发生　A 不发生或 B 不发生　AB 不发生　$\overline{AB}$发生

$\therefore \overline{A}+\overline{B}\subset\overline{AB}$。

故$\overline{A}+\overline{B}=\overline{AB}$，证毕。

7°、完备事件组：若事件 A_1、A_2、…、A_n 满足

① $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$

② $A_iA_j=\phi(i\neq j)$

则称事件组 A_1、A_2、…、A_n 为一个完备事件组，特殊地，A 与$\overline{A}$为一个完备事件组。

例 1、某人同时看管甲、乙、丙三台机床，A、B、C 分别表示甲、乙、丙机床正常运转，D 表示三台机床中恰有一台发

生故障，F 表示三台机床中至少有一台发生故障，则

$$D=\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}$$

$$F=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=\overline{ABC}$$

例 2、某产品加工需经过三道工序完成，$A_i(i=1,2,3)$表示第 i 道工序加工的产品合格，若 B 表示产品合格，则有 $B=A_1A_2A_3$，$\overline{B}=\overline{A_1A_2A_3}=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$。

例 3、事件 A_k 表示某射手第 k 次（$k=1,2,3$）击中目标，文字叙述下列事件：

A_1+A_2：前二次射击中至少有一次击中目标；

$A_1+A_2+A_3$：前三次射击中至少有一次击中目标；

$A_1A_2A_3$：三次射击都击中目标；

$\overline{A_2}$：第二次射击未击中目标；

$A_3\overline{A_2}$：第三次击中目标而第二次未击中；

$\overline{A_1+A_2}$：由摩根律$\overline{A_1+A_2}=\overline{A_1}\ \overline{A_2}$，故它表示前二次射击都未击中目标；

$\overline{A_2}+\overline{A_3}$：后两次射击至少有一次未击中目标；

$A_1A_2A_3+A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$：三次射击中至少有两次击中目标，这一事件又可表为 $A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3$。

§ 1.3 随机事件的概率

随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生，表现出偶然性的一面。但是在大量的重复试验中，既呈现出明显的统计规律性，又表现出必然性的一面。概率论所研究的就是大量随机现象中隐含的规律性。

一、概率的统计定义

随机事件在一次试验中是否发生是不确定的，但在大量重复

试验中，它的发生具有统计规律性。

在相同条件下进行 n 次重复试验．设随机事件 A 在这 n 次试验中出了现 n_A 次，则比值 n_A/n 叫做 n 次试验中事件 A 出现的频率，记作 $f_n(A)$、即 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$。显然 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$，如果 A 是必然事件，则 $n_A=n$，即 $f_n(A)=1$；如果 A 是不可能事件，则 $n_A=0$，即 $f_n(A)=0$．故必然事件的频率为 1，不可能事件的频率是 0。

观察一下掷硬币的试验，把前人的一些试验记录列成下表：

表 1-1

试 验 者	抛掷次数(n)	正面出现次数	频率 $f_n(A)$
Demorgan	2048	1061	0.518
Buffor	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

由上表可以看出，出现正面的频率接近 0.5 并且抛掷次数越多，频率越接近 0.5．实践证明，当试验的次数很大时，频率 $f_n(A)$在某一数值 p 附近摆动，而且一般来说，随着试验次数的增多，这种摆动的幅度愈来愈小，这就是事件频率的稳定性，它是事件概率的基础。

定义 1.3.1 如果在试验次数 n 无限增大时，事件 A 出现的频率 $f_n(A)$在某个确定的常数 p 周围摆动，且摆动的幅度愈来愈小，则称常数 p 为事件 A 的概率，记为 p（A）＝p。

例如，事件 A 为抛硬币出现正面，则 P（A）＝0.5

在实际问题中，当 n 很大时，常用事件 A 的频率 f_n（A）

作为它的概率 p 的近似值，这称为概率的统计定义。

二、概率的古典定义

由统计定义来确定某一事件的概率是非常困难的，甚至是不可能的。现在考虑一类特别的随机试验，即所谓古典试验。称随机试验 E 为古典型的，如果它满足

(i) 有穷性：它只有有限个不同的结果，即它的样本空间只含有有限个基本事件；

(ii) 等可能性：在每次试验中它的各种结果（即各个基本事件）出现的可能性相同。

例如，一盒灯泡一百个，要抽取一个检查灯泡的质量（使用寿命），任取一个，则一百个灯泡被抽取的机会相同。

又如，抛掷一枚硬币，只可能出现正面与反面两种结果，显然这两种结果出现的可能性相同。

再如掷一枚骰子，只有六种可能的结果，且出现一点到六点的可能性是一样的。

对于古典概率型可以按下面的定义直接计算事件的概率：

定义 1.3.2 若古典随机试验的结果由 n 个基本事件组成，而事件 A 由 m 个基本事件组成（m⩽n），则事件 A 的概率是。

$$P(A)=\frac{A\text{中包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{m}{n} \tag{1.1}$$

从概率的定义中，可以得到

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) 必然事件的概率为 1，即 $P(\Omega)=1$；

不可能事件的概率为 0，即 $P(\phi)=0$；

(3) 若事件 $AB=\phi$（A，B 互不相容），则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

三、计算古典概率的例题

例1、将一枚硬币连抛三次，观察正反面出现的情况

(1.) 设事件 A_1 为“恰有一次出现正面”，求 P (A_1)；

(2.) 设事件 A_2 为“至少有一次出现正面”，求 P (A_2)。

解：这是一个等可能概型，用 H 表示出现正面；T 出现反面，则样本空间为{(HHH),(HHT),(HTH),(THH),(HTT),(TTH),(THT),(TTT)}，即基本事件总数 $2^3=8$ 种，而 A_1 所含的基本事件个数为 3；A_2 所含的基本事件个数为 7，所以 $P(A_1)=\frac{3}{8}$，$P(A_2)=\frac{7}{8}$。

例2、袋内装有五个白球，三个红球，从中任取两个球，求取出的两个球都是白球的概率。

解：从（5+3）个球中任取 2 个，取法共有 C_8^2 种，即试验的基本大事件总数 $n=C_8^2$，所求的事件 A（取到两个白球）的基本事件数 $m=C_5^2$，故 $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}=0.357$。

例3、求上例中如求取出的两个球为一白一红的概率。

解：此时 $n=C_8^2$，所求的事件 B（取到一白一红）的基本事件数 $m=C_5^1\cdot C_3^1$，故 P（B）$=\frac{m}{n}=\frac{C_5^1\cdot C_3^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}=0.536$。

例4、袋中装有 6 只乒乓球，其中 4 只黄球，2 只红球，从袋中取球两次，每次一只，求：

(1) 取到两只球都是黄球的概率；

(2) 取到两只球颜色相同的概率。

解：从袋中依次取球可分两种情况：一种是第一次取一球观察其颜色放回袋中，然后再取第二只，这种取法叫做放回抽样；另一种是第一次取一只球后并不放回，接着从余下球中取第二