邹 海著

新数学方法论

管理现代化丛书

湖 南 人 民 出 版 社

管理现代化丛书

新数学方法论

邹海著

湖南人民出版社

一九八一年·长沙

新数学方法论
邹 海 著
责任编辑：胡 凡
*
湖南人民出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷
*
1981年7月第1版第1次印刷
字数：168,000 印张：7.5 印数：1——9,300
统一书号：13109·60 定价：0.76元

《管理现代化丛书》出版说明

长期以来，我国的管理工作没有很好地抓起来，管理科学水平还很落后。我国要在二十世纪末实现社会主义现代化，其中就包括要实现管理现代化。管理现代化是管理工作的最优化和信息化，是用现代化科学技术的理论、方法、手段来研究管理工作的规律，处理管理工作的问题的科学，因此它不仅是我国社会主义现代化的一项重要内容，而且是我国实现四个现代化的关键。

为了实现管理现代化，国家科委、中国科协等单位于一九七八年在联合召开的全国科技规划会上，制定了一九七八年至一九八五年国家科学发展纲要，把全国管理现代化的发展方向、重点科研项目和人材的培养等纳入了规划的内容。此后，中国管理现代化研究会组织力量，总结经验，开展研究，撰写专为培养管理现代化人材和提高管理现代化水平的《管理现代化丛书》。

《管理现代化丛书》的主要内容有：管理现代化导论、新数学方法论、最优化系统工程、管理现代化数据库、管理现代化信息处理程序系统、全国统一编码等等。它的主要读者对象是：各部委、各省市、各企事业单位从事管理工作和总体方案最优设计工作的工程师和科技工程人员以及领导干部；管理现代化培训班的学员；高等院校管理现代化专业师生；工程总体最优设计工作者。

《管理现代化丛书》由湖南人民出版社分数册出版，各册独立成书，于近两、三年内陆续与读者见面。欢迎专家们和广大读者批评指正！

目　　录

第一章　内插公式……………………………………………… 1

一　Newton向前插值公式 ……………………………… 1

二　Newton向后插值公式 ……………………………… 2

三　Newton差分的节点值和Tayler的展开式……………… 4

四　Stirling内插公式 ………………………………… 8

五　Stirling内插系数 ………………………………… 10

六　差分的函数值展开式…………………………………… 11

七　Bessel内插公式 ………………………………… 13

八　变形Bessel内插系数的展开式 ……………………… 16

九　变形Bessel内插公式误差近似公式 ………………… 17

十　复差法………………………………………………… 19

第二章　内插公式算子演算法 ……………………………… 22

一　各种算子及其应用…………………………………… 22

二　Newton向前内插公式 ……………………………… 26

三　Newton向后内插公式 ……………………………… 27

四　Stiriling内插公式 ………………………………… 27

五　Bessel内插公式 ………………………………… 32

六　Everett内插公式…………………………………… 33

第三章　菱形图的原理 ……………………………………… 35

一　原理及其应用………………………………………… 35

二　Cross线性插值法 ………………………………… 42

三　抛物型插值迭代公式……………………………………………… 44
四　不等距插值公式…………………………………………………… 46
五　精密插值公式……………………………………………………… 47
六　插值微商公式……………………………………………………… 54
七　拉格朗日插值法…………………………………………………… 63

第四章　二维函数插值法 ………………………………………… 67

一　二维插值算子……………………………………………………… 67
二　差分表……………………………………………………………… 69
三　各阶偏导数的计算………………………………………………… 77

第五章　样条函数……………………………………………………… 82

一　零次样条函数和一次样条函数…………………………………… 82
二　二次样条函数……………………………………………………… 87
三　三次样条函数……………………………………………………… 89
四　k次样条函数 ……………………………………………………… 89

第六章　二次样条函数插值法 …………………………………… 92

一　插值问题的提出…………………………………………………… 92
二　δ-基函数插值法 ………………………………………………… 93
三　基点样条函数插值法………………………………………………100
四　凸性分析与余项估计………………………………………………106

第七章　三次样条函数插值法 ……………………………………114

一　插值问题……………………………………………………………114
二　基函数插值法………………………………………………………117

三　基点样条函数插值法……………………………………127
四　三次样条函数的基本性质………………………………132
五　程序和算例………………………………………………135

第八章　插值新方法…………………………………………142

一　两点有理插值公式………………………………………143
二　三点有理插值公式………………………………………144
三　三角函数插值法…………………………………………145
四　m点有理插值微分法 ……………………………………145
五　二维有理插值公式………………………………………150
六　三维插值公式……………………………………………152
七　n维有理插值法一 ………………………………………155
八　n维有理插值法二 ………………………………………157
九　存在定理…………………………………………………159
十　四点插值及其微商公式…………………………………164

第九章　最小平方系数公式 …………………………………166

一　最小平方多项式系数公式………………………………166
二　函数的逼近展开式………………………………………177

第十章　逼近的新方法 ………………………………………180

一　函数$f(x)$在点x_0处的展开式…………………………180
二　一维函数有理逼近法一…………………………………182
三　一维函数有理逼近法二…………………………………184
四　函数$f(x)$的连分式展开法一……………………………185
五　函数$f(x)$的连分式展开法二……………………………187

六　一维离散数值逼近法……………………………………188
七　定理一(一维函数逼近存在定理)…………………………191
八　二维函数逼近法…………………………………………193
九　二维数值逼近法…………………………………………194
十　n维函数逼近法一 ……………………………………197
十一　n维函数逼近法二 …………………………………198
十二　定理二(有理逼近存在定理)…………………………200
十三　算例……………………………………………………203
十四　关于提高计算准确性的问题…………………………221

第一章

内 插 公 式

一 Newton向前插值公式

设函数$y=f(x)$的近似多项式为：

$$y=f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$
$$+c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \qquad (1)$$

在插值节点x_i取对应的函数值y_i($i=0$，1，$\cdots n$)

当等距节点时，设步长为h，当增加一个步长时，$f(x)$近似多项式的各个项可变化为：

1次项　$(x-x_0)$变成$(x-x_0)+h$

2次项　$(x-x_0)(x-x_1)$变成$(x-x_0+h)(x-x_0)$

……

n次项　$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$

变成　$(x-x_0+h)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})$

根据以上各式可求出各阶差分

$$\Delta f(x)=hc_1+2hc_2(x-x_0)+3hc_3(x-x_0)(x-x_1)$$

$$\Delta f^2(x)=2\cdot 1h^2c_2+3\cdot 2h^2c_3(x-x_0)+\cdots$$
$$+n(n-1)h^2c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-3})$$

同样求出最后的第n阶差分

$$\Delta^n f(x)=n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1h^nc_n$$

当$x=x_0$代入各阶差分时,则差分右边表达式的第二项以后的各项均为零。于是

$$f(x_0)=c_0,\ \Delta f(x_0)=hc_1,\ \Delta^2 f(x_0)=2!h^2c_2,$$

$$\Delta^3 f(x_0)=3!h^3c_3,\ \cdots\qquad \Delta^n f(x_0)=n!h^nc_n$$

所求的各个系数c_0，c_1，$\cdots$,c_n为：

$$c_0=y_0,\ c_1=\frac{1}{h}\Delta y_0,\quad c_2=\frac{1}{2!h^2}\Delta^2 y_0$$

$$c_3=\frac{1}{3!h^3}\Delta^3 y_0,\ \cdots,\quad c_n=\frac{1}{n!h^n}\Delta^n y_0$$

代入式(1)中，得

$$f(x)=y_0+\frac{x-x_0}{h}\Delta y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!h^2}\Delta^2 y_0$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!h^3}\Delta^3 y_0+\cdots$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{n!h^n}\Delta^n y_0 \quad (2)$$

为了计算方便，可引入

$u=\frac{x-x_0}{n}$并将它代入式(2)得

$$f(u)=y_0+\frac{u}{1!}\Delta y_0+\frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\cdots$$

$$+\frac{u(u-1)(u-2)\cdots(u-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad (3)$$

式(3)称为Newton向前插值公式。

二　Newton向后插值公式

设函数$f(x)$的近似n次多项式为：

$$f(x)=c_0+c_1(x-x_n)+c_2(x-x_n)(x-x_{n-1})+\cdots$$
$$+c_n(x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_1) \qquad (4)$$

计算方法同前，得

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)=hc_1+2hc_2(x-x_{n-1})+\cdots$$
$$+nhc_n(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})\cdots(x-x_1)$$
$$\Delta^2 f(x)=2!h^2c_2+3!h^2c_3(x-x_{n-2})+\cdots$$
$$+n(n-1)h^2c_n(x-x_{n-2})\cdots(x-x_1)$$
$$\Delta^n f(x)=n!h^n c_n$$

以上各式中将x分别取为 $x=x_n$， $x=x_{n-1}\cdots$时，其右边第二项以后的各项均为零，则所求的系数c_0，c_1，…，c_n为：

$$c_0=y_n,\quad c_1=\frac{1}{h}\Delta y_{n-1},\quad c_2=\frac{1}{2!h^2}\Delta^2 y_{n-2},\cdots,$$

$$c_n=\frac{1}{n!h^n}\Delta^n y_0$$

将系数代入式(4)中，得

$$y=f(x)=y_n+\frac{x-x_n}{h}\Delta y_{n-1}+\frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})}{2!h^2}\Delta^2 y_{n-2}$$

$$+\cdots+\frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_1)}{n!h^n}\Delta^n y_0 \qquad (5)$$

同样可变换

$u=\dfrac{x-x_n}{h}$ 代入式(5)中，得

$$y=f(x)=y_n+\frac{u}{1!}\Delta y_{n-1}+\frac{u(u+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\cdots$$

$$+\frac{u(u+1)(u+2)\cdots(u+(n+1))}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (6)$$

将式(6)称为Newton向后插值公式。

三　Newton差分的节点值和Tayler的展开式

为了便于程序设计，可把Newton插值公式的各阶差分按节点值展开，即

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(x_0+h) - f(x_0)$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + f(x_0)$$

$$\cdots$$

$$\Delta^n y_0 = y_n - \frac{n}{1!} y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} y_{n-2} + \cdots$$

$$+ (-1)^r \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} y_{n-r} + \cdots + (-1)^n y_0$$

上面的结果如表1所示

根据$f(x)$在点x_0的Tayler展开式

$$f(x_0+rh)$$

$$= \left(1 + rhD + \frac{r^2}{2} h^2 D^2 + \frac{r^3}{6} h^3 D^3 + \cdots\right) f_0$$

在点x_0的各阶差分的Tayler展开式

$$\Delta y_0 = \left(hD + \frac{h^2}{2} D^2 + \frac{h^3}{6} D^3 + \frac{h^4}{24} D^4 + \frac{h^5}{120} D^5 + \cdots\right) f_0$$

$$\Delta^2 y_0 = \left(h^2 D^2 + h^3 D^3 + \frac{7}{12} h^4 D^4 + \frac{1}{4} h^5 D^5 + \frac{31}{360} h^6 D^6 + \cdots\right) f_0$$

$$\Delta^3 y_0 = \left(h^3 D^3 + \frac{3}{2} h^4 D^4 + \frac{5}{4} h^5 D^5 + \frac{3}{4} h^6 D^6 + \frac{43}{120} h^7 D^7 + \cdots\right) f_0$$

$$\Delta^4 y = \left(h^4 D^4 + 2h^5 D^5 + \frac{13}{6} h^6 D^6 + \frac{5}{3} h^7 D^7\right.$$

$$+\frac{81}{80}h^8D^8+\frac{37}{72}h^9D^9\cdots\Big)f_0$$

$$\Delta^5y_0=\Big(h^5D^5+\frac{5}{2}h^6D^6+\frac{10}{3}h^7D^7+\frac{25}{8}h^8D^8$$

$$+\frac{331}{144}h^9D^9+\cdots\Big)f_0$$

$$\Delta^6y_0=\Big(h^6D^6+3h^7D^7+\frac{19}{4}h^8D^8+\frac{21}{4}h^9D^9+\cdots\Big)f_0$$

$$\Delta^7y_0=\Big(h^7D^7+\frac{7}{2}h^8D^8+\frac{77}{12}h^9D^9+\cdots\Big)f_0$$

$$\Delta^8y_0=(h^8D^8+4h^9D^9+\cdots)f_0$$

$$\Delta^9y_0=(h^9D^9+\cdots)f_0$$

其中 $\Big(D=\dfrac{d}{dx},\quad Df=\left[\dfrac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0}$

$$D^2f=\left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=x_0}\cdots\Big)$$

表1　　Newton阶差的节点值展式

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	…
Δy_0	−1	1				
$\Delta^2 y_0$	1	−2	1			
$\Delta^3 y_0$	−1	3	−3	1		
$\Delta^4 y_0$	1	−4	6	−4	1	
$\Delta^5 y_0$	−1	5	−10	10	−5	1
…	…	…	…	…	…	…

我们把公式(3)化成适合计算机的程序设计形式。利用$\Delta^i y_0$的

节点展开公式

$$\Delta^i y_0 = (-1)^i (C_i^0 y_0 - C_i^1 y_1 + C_i^2 y_2 - C_i^3 y_3 + \cdots + C_i^r y_r + \cdots + C_i^i y_i)$$

把上式代入公式(3)，得出(令$C_0^0 = 1$)

$$f(x) = y_0 + \frac{u}{1!}(-y_0 + y_1) + \frac{u(u-1)}{2!}(y_0 - 2y_1 + y_2) + \cdots$$

$$= \Big(1 - \frac{u}{1!} + \frac{u(u-1)}{2!} - \frac{u(u-1)(u-2)}{3!} + \cdots + \frac{u(u-1)\cdots(u-n+1)}{n!}\Big) y_0$$

$$+ \Big(\frac{u}{1!} - 2\frac{u(u-1)}{2!} + 3\frac{u(u-1)(u-2)}{3!} + \cdots + n\frac{u(u-1)\cdots(u-n+1)}{n!}\Big) y_0 + \cdots$$

$$+ \frac{u(u-1)\cdots(u-n+1)}{n!} y_n$$

$$= \Big(C_0^0 - C_1^0 \frac{u}{1!} + C_2^0 \frac{u(u-1)}{2!} - C_3^0 \frac{u(u-1)(u-2)}{3!} + \cdots + C_n^0 \frac{(u-1)\cdots(u-n+1)}{n!}\Big) y_0 + \cdots$$

$$+ C_n^n \frac{u(u-1)\cdots(u-n+1)}{n!} y_n$$

$$= (C_1^0 - C_1^0 C_n^1 + C_2^0 c_u^2 - C_3^0 C_u^3 + \cdots + C_n^0 C_u^n) y_0$$

$$+ (C_1^1 C_u^1 - C_2^1 c_u^2 + C_3^1 C_4^3 \cdots + C_n^1 C_u^n) y_1$$

$$+ \cdots + C_n^n C_u^n y_n$$

为了简便，令

$$a_r = C_r^r C_u^r - C_{r+1}^r C_u^{r+1} + \cdots C_{r+(u+r)}^r C_u^n$$

$$r = 0, 1, 2, \cdots, n$$

则上式化为：

$$f(x)=a_0y_0+a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ry_r+\cdots$$

同样可将化简向后插值公式(6)得

$$f(x)=y_n+\frac{u}{1!}\Delta y_{n-1}+\frac{u(u+1)}{2!}\Delta^2y_{n-2}+\cdots$$

$$+\frac{u(u+1)\cdots(u+(n-1))}{n!}\Delta^n y_0$$

上式可以写成

$$f(x)=y_n+\frac{u}{1!}\nabla y_n+\frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2y_n+\cdots$$

$$+\frac{u(u-1)\cdots(u+n-1)}{n!}\nabla^n y_n$$

利用∇^i_n的节点值展开公式，即

$$\nabla^i_n=C^0_iy_n-C^1_iy_{n-1}+C^2_iy_{n-2}+\cdots+C^i_iy_{n-i}$$

于是：

$$f(x)=\Big(C^0_0+C^0_1\frac{u}{1!}+C^0_2\frac{u(u+1)}{2!}+$$

$$\cdots+C^0_n\frac{u(u+1)\cdots(u+n-1)}{n!}\Big)y_n$$

$$-\Big(C^1_1\frac{u}{1!}+C^1_2\frac{u(u+1)}{2!}+$$

$$\cdots+C^2_n\frac{u(u+1)\cdots(u+n-1)}{n!}\Big)y_{n-1}+$$

$$\cdots+C^n_n\frac{u(u+1)\cdots(u+n-1)}{n!}y$$

$$=b_ny_n-b_{n-1}y_{n-1}+\cdots b_0y_0$$

其中 $$br=C^r_r\frac{u(u+1)\cdots(u+r-1)}{r!}+C^r_{r+1}\frac{u(u+1)\cdots(u+r)}{(r+1)!}$$

$$+\cdots+C_n^r\ \frac{u\cdots(u+n-1)}{n!}$$

$r=0,1,2,\cdots,n_0$

四　Stirling 内插公式

设已知奇数个插值节点的函数值为：$y_{-n},y_{-n+1},\cdots y_{-1},y_0,y_1,\cdots y_n$

求Newton内插式的各阶差分。

$$\Delta y_0=\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}+\frac{1}{2}\Delta^2 y_{-1}$$

$$\Delta^2 y_0=\Delta^2 y_{-1}+\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+\frac{1}{2}\Delta^4 y_{-2}$$

$$\Delta^3 y_0=\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+\frac{3}{2}\Delta^4 y_{-2}+\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2}$$

$$+\frac{1}{2}\Delta^6 y_{-3}$$

$$\Delta^4 y_0=\Delta^4 y_{-2}+2\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2}+\ 2\Delta^6 y_{-3}$$

$$+\frac{\Delta^7 y_{-4}+\Delta^7 y_{-3}}{2}+\frac{1}{2}\Delta^8 y_{-4},\ \cdots$$

将上式代入Newton向前插值公式中，得

$$f(x)=f(x_0+uh)=y_0+\frac{u}{1!}\ \frac{1}{2}(\Delta y_{-1}+\Delta y_0)$$

$$+\frac{u^2}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{u(u^2-1^2)}{3!}\ \frac{1}{2}(\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1})$$

$$+\frac{u^2(u^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2}\cdots$$

$$+\frac{u(u^2-1)(u^2-2^2)\cdots(u^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!}$$

$$\frac{1}{2}(\Delta^{2n-1}y_{-n}+\Delta^{2n-1}y_{-n+1})$$

$$+\frac{u^2(u^2-1^2)(u^2-2^2)\cdots(u^2-(n-1)^2)}{(2n)!}$$

$$\Delta^{2n}y_{-n} \tag{7a}$$

式(7)称为Stirling内插公式。此公式只适合于插值点x在中央点x_0附近时的插值。

为了求Stirling 差分的 Taylor 展式，可根据$f(x)$ 在 x_0 点的Taylor展式

$$f(x_0\pm rh)=\left[1\pm rhD+\frac{r^2h^2}{2}D^2\pm\frac{r^3h^3}{6}D^3\right.$$

$$+\frac{r^4h^4}{24}D^4\pm\frac{r^5h^5}{120}D^5+\frac{r^6h^6}{720}D^6$$

$$\left.\pm\frac{r^7h^7}{5040}D^7+\cdots\right]f$$

得出各阶差分

$$\Delta_1=\Delta y_0+\Delta y_{-1}=\left[2hD+\frac{1}{3}h^3D^3+\frac{1}{60}h^5D^5\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2520}h^7D^7+\frac{1}{181440}h^9D^9+\cdots\right]f$$

$$\Delta_2=\left[h^2D^2+\frac{1}{12}h^4D^4+\frac{1}{360}h^6D^6\right.$$

$$\left.+\frac{1}{20160}h^8D^8+\cdots\right]f$$