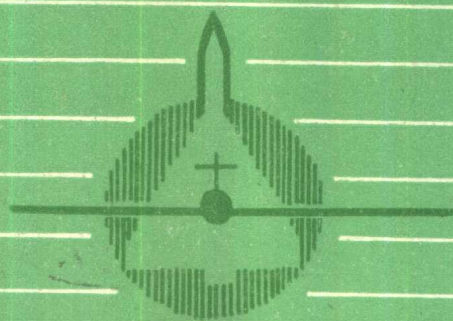


自动控制原理

(修订版)

下 册

南京航空学院、西北工业大学、北京航空学院 合编



国防工业出版社

自动控制原理

(修订版)

下 册

南京航空学院

西北工业大学 合编

北京航空学院

胡寿松 主编

国防工业出版社

内 容 简 介

本书系《自动控制原理》一书的修订版，比较全面地阐述了自动控制的基本理论。全书共分十一章。上册八章，介绍经典控制理论；下册三章，介绍现代控制理论。

本书精选了原版中各章的内容，保留了原书的基本特色，加强了对基本理论的阐述，增加了数字机辅助计算，全面地改写了现代控制理论部分，使其相对完整而又易为工程技术人员所接受。此外，本书还增加了例题和习题的数量，以帮助读者进一步深入理解与运用基本理论。

本书上册包括线性定常控制系统的基本理论、非线性系统理论和采样系统理论三部分。下册包括线性系统理论、最优控制理论、状态估计与参数辨识三部分。

本书主要作为高等工业院校自动控制类各专业的教科书，亦可供从事自动控制和工业自动化的各专业技术人员自学与参考。

自 动 控 制 原 理

(修 订 版)

下 册

南京航空学院、西北工业大学、北京航空学院 合编

胡寿松 主编

责任编辑 陈子玉

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092¹/₁₆ 印张 15¹/₂ 362千字

1984年6月第一版 1984年6月第一次印刷 印数：23,801—42,800册

统一书号：15034·2019 定价：2.10元

前 言

本书初版自1979年问世以来，曾受到广大有关读者的欢迎，被许多兄弟高等院校选作为《自动控制原理》课程的教科书或主要参考书。这对于我们来说，无疑是一种极大的鼓舞和鞭策。回想起来，当初编写本书的目的，是为了满足高等院校教学及广大科技人员学习和参考的迫切需要。但是，由于编写时间仓促，再加上经验不足，因此在选材和编写方面还存在一些不妥之处。许多热情的读者，在阅读本书的过程中给我们提出了中肯的评论和指正，使我们获得了很大的裨益。实际上，一本好的教科书，必须经过成型——使用——修改——再使用等过程才能真正成熟起来。经过数年的教学实践，我们进一步总结了经验，同时，又到一些使用本书的院校、工厂和研究所等单位进行了调查研究，通过认真地讨论和准备，根据航空工业部制订的《自动控制原理》教学大纲，对本书进行了修订。

在修订本书的过程中，我们的指导思想是继续保留原版的基本特色：叙述深入浅出；注重物理概念的阐述；理论联系实际；保持技术内容的系统性、完整性和先进性，并且便于读者自学。与原书相比，这一次修订版精选了各章内容，调整了某些章节的次序，舍弃了一些次要内容，加强了对基本内容的阐述，全面改写并充实了现代控制理论部分，使其相对完整而又易为工程技术人员所接受。考虑到今后数字计算机在自动化技术中的应用将越来越普及，此次修订版还增加了用数字机进行辅助计算和对控制系统进行分析的内容。对于学过计算方法和算法语言的读者，这一部分内容可不列入教学计划，直接供上机时使用，以丰富实验课内容。此外，为加强实践性环节，在修订版中我们还增加了不少习题，适当提高了若干习题的难度，补充了一些概念性和综合性的习题，供各院校开设习题课之用。

修订版的上册为经典控制理论，共八章，包括线性定常控制系统的基本理论、非线性系统理论和采样系统理论三部分。其中，第一章是概述；第二章为控制系统的数学模型；第三至六章介绍分析和设计线性定常控制系统的时域分析法、根轨迹法和频率响应法；第七章阐述非线性系统理论，说明相平面法和描述函数法在分析非线性系统中的应用；第八章讨论采样系统理论，并对采样系统和数字机控制系统的校正和设计方法作了比较全面的介绍。

修订版的下册为现代控制理论，共三章，包括线性系统理论、最优控制理论和状态估计与参数辨识三部分。其中，线性系统理论为第九章，主要介绍状态空间法、线性系统的可控性与可观测性、状态反馈与状态观测器以及稳定性理论；第十章为最优控制理论，主要讨论变分法、极小值原理以及动态规划法；第十一章为状态估计与参数辨识，主要阐述最优估计理论、最优滤波理论以及系统辨识概念。

这本书的修订工作实际上是由一个集体完成的，参加的人员比初版时有所增加，其中前言及第三、四、六章由胡寿松编写；第一、二章由田林编写；第五章由林代业编写；第三至五章中有关数字机分析的内容，由姜长生编写；第七章由程鹏编写；第八章

由胡干跃编写；第九、十章由徐缤昌、林其璈和周凤歧等编写；第十一章由陈新海编写。全书由南京航空学院胡寿松主编，并由北京工业学院徐和生审阅。在审稿过程中，徐和生同志提出了不少宝贵的修改意见，使得本书更臻完善。此外，在本书修订过程中，还得到了航空工业部和各主管院校有关同志的大力支持。马苏等同志为本书精心描绘了许多插图。对此，我们一并表示衷心的感谢。

由于我们水平所限，在修订版中仍然可能存在不少错误和不妥之处。希望读者不吝指正。

编 者

1983年7月

M11-2915

目 录

| | | | |
|------------------------|-----|--------------------------------------|-----|
| 第九章 线性系统理论 | 1 | 10-5 具有二次型性能指标的连续 系统的最优控制问题 | 151 |
| 9-1 状态空间分析法 | 1 | 10-6 动态规划法 | 171 |
| 9-2 线性系统的可控性和可观性 | 38 | 习题 | 185 |
| 9-3 状态反馈与状态观测器 | 79 | 第十一章 状态估计与参数辨识 | 189 |
| 9-4 稳定性理论 | 99 | 11-1 最优估计理论 | 189 |
| 习题 | 111 | 11-2 最优滤波理论 | 198 |
| 第十章 最优控制理论 | 116 | 11-3 系统辨识概念 | 219 |
| 10-1 引言 | 116 | 习题 | 243 |
| 10-2 函数极值的古典理论 | 119 | 参考文献 | 244 |
| 10-3 泛函极值问题 | 123 | | |
| 10-4 极小值原理及其应用 | 139 | | |

第九章 线性系统理论

从五十年代末开始发展起来的现代控制理论，以多变量控制、最优控制、估计理论以及自适应控制为其主要内容。控制理论研究的重点开始从频域移到从本质上说是时域的状态空间方法。1960年前后，贝尔曼的动态规划，庞特里雅金的极小值原理，卡尔曼提出的线性系统的可控性与可观测性以及卡尔曼滤波，都为现代控制理论的形成打下了基础。

9-1 状态空间分析法

在经典控制理论中，用传递函数来设计和分析单输入-单输出系统，这是一种行之有效的方法。但传递函数只能反映出系统输出变量与输入变量之间的外部关系，而了解不到系统内部的变化情况。此外，传递函数描述又是建立在零初始条件的前提下，故它不能包含系统的全部信息。在设计多变量和时变系统时，采用经典控制理论会遇到很大的困难。

在现代控制理论中，用状态变量法来描述系统。这时系统是用一阶矩阵-向量微分方程来描述的，采用矩阵表示法可以使系统的数学表达式简洁明了，并且易于用计算机求解，同时也为时变及多变量系统的分析研究提供了有力的工具。

在介绍现代控制理论之前，需要首先定义状态、状态变量、状态向量和状态空间。

状态 动力学系统的状态可以定义为信息的集合。在已知未来外部输入的情况下，这些信息对于确定系统未来的行为是必要且充分的。

因此，动力学系统在时间 t 的状态是由 t_0 时的状态和 $t \geq t_0$ 时的输入唯一确定，而它是与 t_0 前的状态和输入无关的。

状态变量 动力学系统的状态变量是确定动力学系统状态的最小一组变量。如果以最少的 n 个变量 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 \dots 、 $x_n(t)$ 就能完全描述动力学系统的行为（即当 $t \geq t_0$ 时输入和在 $t = t_0$ 时的初始状态给定后，系统的状态将完全可以被确定），那么这样的 n 个变量 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 \dots 、 $x_n(t)$ 就是系统的一组状态变量。但这不是唯一的一组状态变量。

状态向量 如果完全描述一个给定系统的动态行为需要 n 个状态变量，那么可将这些状态变量看作是向量 $\mathbf{x}(t)$ 的各个分量，即

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}(t)$ 就叫做状态向量。

状态空间 以各状态变量作为坐标轴所组成的 n 维空间叫做状态空间。状态向量则可用状态空间中的一个点来表示。

有了以上这几个概念，就可以来介绍控制系统的状态空间分析法。为了使读者对这种方法有一个概括的了解，下面举两个简单的例子来说明。

例9-1 设有图9-1所示之机械动力学系统，图中物体的质量为 M ，弹簧刚度为 K ，阻尼系数为 f ， $u(t)$ 为外作用力。系统在 $u(t)$ 的作用下开始运动。

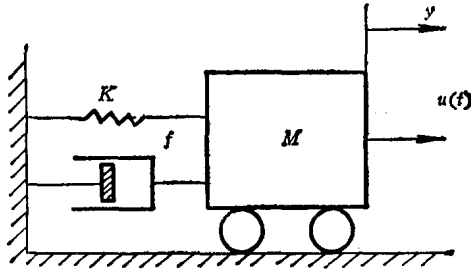


图9-1 弹簧质量阻尼器系统

根据图9-1可列写出系统的微分方程式为

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + Ky = u(t) \quad (9-1)$$

式中 y 表示位移， dy/dt 表示速度， d^2y/dt^2 表示加速度。

将式(9-1)中最高次导数项的系数化为1，可得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{f}{M} \frac{dy}{dt} + \frac{K}{M} y = \frac{1}{M} u(t) \quad (9-2)$$

如用一阶微分方程组来表达上式，当选择状态变量为 $x_1 = y$ 、 $x_2 = dy/dt$ 时，上式可写作

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{K}{M} x_1 - \frac{f}{M} x_2 + \frac{1}{M} u \end{aligned}$$

也可写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{f}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u \quad (9-3)$$

若令

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{f}{M} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

则式(9-3)可写成更为一般的形式

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + b u \quad (9-4)$$

上式的左边和右边各项均为列向量，故式(9-4)为一向量微分方程，常称作系统的状态方程。

例9-2 设有一RLC网络，如图9-2所示。在 $e(t)$ 的作用下，可列写出网络的回路方程为

$$e(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (9-5)$$

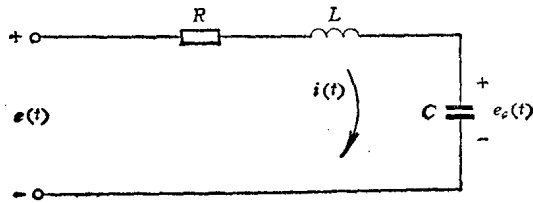


图9-2 RLC网络

如果选择 $x_1(t) = i(t)$ 、 $x_2(t) = \int i(t) dt$ 作为状态变量，式(9-5)可写作

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{1}{LC}x_2(t) + \frac{1}{L}e(t) \quad (9-6)$$

而在二个状态变量之间，又有如下关系成立

$$\dot{x}_2(t) = x_1 \quad (9-7)$$

故也可将式(9-6)与(9-7)改写成 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ 这种向量微分方程的形式，此时式中

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9-8)$$

下面我们再另选一组状态变量： $\bar{x}_1(t) = i(t)$ ， $\bar{x}_2(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$ ，此时式(9-5)又可写成如下形式

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= -\frac{R}{L}\bar{x}_1 - \frac{1}{L}\bar{x}_2 + \frac{1}{L}e(t) \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \frac{1}{C}\bar{x}_1 \end{aligned}$$

将上式也写成向量微分方程 $\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}u$ 的形式，式中

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9-9)$$

由此可见，因状态变量选择的不同，所得到的状态方程式亦不相同。但两组方程却描述着同一个物理现象，显然在这二组方程之间一定存在着某种坐标变换关系。

本例中共取了二组状态变量，第一组状态变量为 $x_1(t) = i(t)$ ， $x_2(t) = \int i(t) dt$ ；第二组状态变量为 $\bar{x}_1(t) = i(t)$ ， $\bar{x}_2(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$ 。显然，在第一组与第二组状态变量之间存在下述关系

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \quad (9-10)$$

或记作

$$\mathbf{x} = P\bar{\mathbf{x}} \quad (9-11)$$

式中 P 为坐标变换矩阵。下面讨论动态系统的状态变换关系问题。对下述状态方程表示的系统

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (9-12)$$

作坐标变换 $\mathbf{x} = P\bar{\mathbf{x}}$ ，考虑到坐标变换矩阵 P 为满秩的常系数矩阵，故有 P^{-1} 存在。

微分式 (9-11)，可得

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = P \dot{\mathbf{x}}$$

将上述关系代入式 (9-12)，有

$$P\dot{\bar{\mathbf{x}}} = AP\bar{\mathbf{x}} + B\mathbf{u}$$

以 P^{-1} 左乘等式两边，上式可写成

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = P^{-1}AP\bar{\mathbf{x}} + P^{-1}B\mathbf{u} \quad (9-13)$$

或记作

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{A}\bar{\mathbf{x}} + \bar{B}\mathbf{u} \quad (9-14)$$

式中

$$\bar{A} = P^{-1}AP, \quad \bar{B} = P^{-1}B \quad (9-15)$$

因此，如果知道两组状态变量之间的变换关系，则可通过式 (9-15) 直接求取 \bar{A} 、 \bar{B} 阵。

对于本例有

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix}$$

代入式 (9-15)，得

$$\begin{aligned} \bar{A} = P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{CL} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{b} = P^{-1}b &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这与前面在选取状态变量 \bar{x}_1 、 \bar{x}_2 后，直接从系统方程推出的 \bar{A} 、 \bar{b} 阵完全相符。由此可知，一个系统的状态方程表示式并不是唯一的。

系统的状态空间表达式 下面讨论根据元件或系统的微分方程来建立状态方程的问题。先研究单输入-单输出的线性定常系统，分两种情况来讨论。

系统的输入量中不含有导数项 这种系统可以用下列微分方程来描述

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_0y = u \quad (9-16)$$

若给出 $t = 0$ 时的初值 $y(0)$ 、 $\dot{y}(0)$ 、 \dots 、 $y^{(n-1)}(0)$ 和 $t \geq 0$ 时的输入 $u(t)$ ，就可确定 $t > 0$ 时系统的行为。如果选取 $x_1 = y$ ， $x_2 = \dot{y}$ ， \dots ， $x_n = y^{(n-1)}$ 作为状态变量，那么式 (9-16) 可改写为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + u \end{aligned} \quad (9-17)$$

或写成

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu} \quad (9-18)$$

的形式，式中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9-19)$$

系统的结构图如图9-3所示。

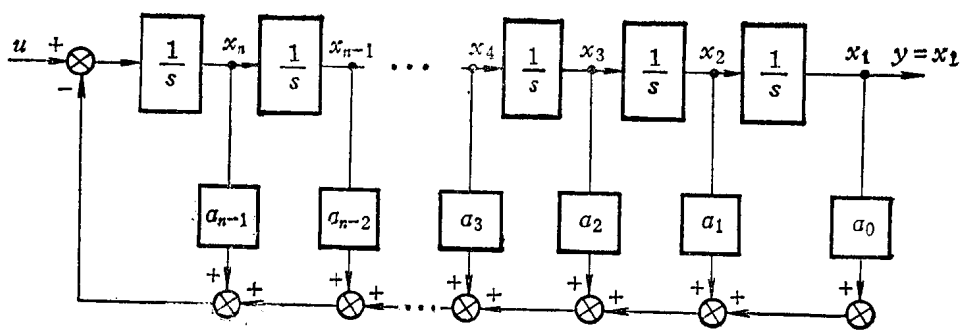


图9-3 系统的结构图

系统的输出为

$$y = x_1$$

把输出方程也写成如下矩阵形式

$$\mathbf{y} = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

记作

$$\mathbf{y} = \mathbf{cx} \quad (9-20)$$

式中

$$c = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

式(9-20)常称为系统的输出方程,在单输入-单输出情况下,这是一组代数方程。

例9-3 考虑用下列常微分方程描述的系统,其输入为 u ,输出为 y ,

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega\dot{y} + \omega^2 y = \omega^2 u$$

试求系统的状态方程和输出方程。

解 取状态变量为 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ 。系统的状态方程可写为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - 2\zeta\omega x_2 + \omega^2 u$$

或写作矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\zeta\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega^2 \end{bmatrix} u$$

输出方程为 $y = x_1$,也可写作矩阵形式

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

系统的结构图如图9-4所示。

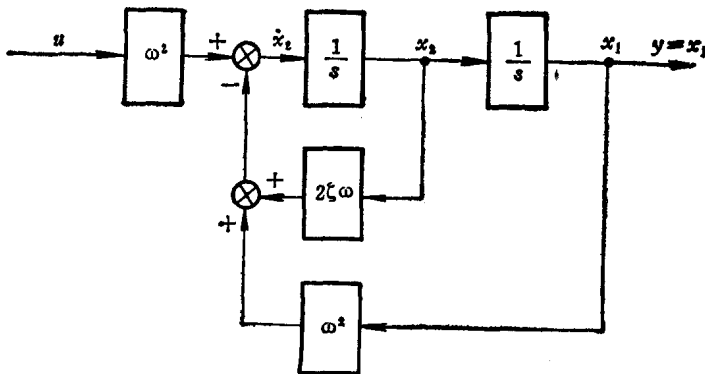


图9-4 例9-3的结构图

例9-4 设系统方程为

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y = 6u$$

式中 y 为输出量, u 为输入量,试求系统的状态方程和输出方程。

解 选取状态变量为 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}$,并将 x_1 、 x_2 、 x_3 代入原方程,得

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 6u$$

如用矩阵形式表示,则可写成

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

系统结构图如图 9-5 所示。

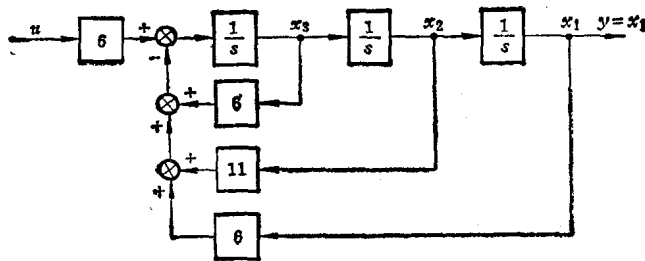


图9-5 例9-4的结构图

系统的输入量中含有导数项 设单输入-单输出系统的微分方程为

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_n u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u \quad (9-21)$$

一般输入量中导数项的次数小于或等于系统的次数 n ，在这里讨论次数等于 n 的情况。如果输入量导数项的次数小于 n ，仍可应用所得到的公式。

为避免在状态方程中出现 u 的导数项，可以选择如下的一组状态变量：

$$\begin{aligned} x_1 &= y - h_0 u \\ x_2 &= \dot{y} - h_0 \dot{u} - h_1 u \\ x_3 &= \ddot{y} - h_0 \ddot{u} - h_1 \dot{u} - h_2 u \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} - h_0 u^{(n-1)} - h_1 u^{(n-2)} - \dots - h_{n-1} u \end{aligned} \quad (9-22)$$

式中 h_0, h_1, \dots, h_{n-1} 是 n 个待定的常数。将式 (9-22) 微分，可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + h_1 u \\ \dot{x}_2 &= x_3 + h_2 u \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n + h_{n-1} u \\ \dot{x}_n &= y^{(n)} - h_0 u^{(n)} - h_1 u^{(n-1)} - \dots - h_{n-1} \dot{u} \end{aligned} \quad (9-23)$$

将式 (9-23) 中的 $y^{(n)}$ 项表示成状态变量的线性组合，由式 (9-21) 可得

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= -a_{n-1}y^{(n-1)} - a_{n-2}y^{(n-2)} - \dots - a_1\dot{y} - a_0y \\ &\quad + b_n u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u \end{aligned} \quad (9-24)$$

根据式 (9-22) 可求得 y 的各阶导数与状态变量之间的关系式，并将这些关系式代入式 (9-24)，经整理后可得

状态方程的结构图如图 9-6 所示。

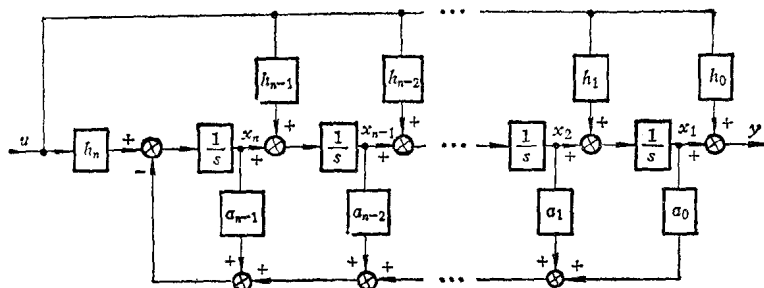


图9-6 输入中含导数项时的系统结构图

如果输入量中仅含有 m 次导数, 而 $m < n$, 则可以把 u 的高于 m 次的导数项的系数当作零来处理。

例9-5 设系统的微分方程为

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega\dot{y} + \omega^2 y = T\dot{u} + u$$

试求系统的状态方程和输出方程。

解 由式 (9-21) 可知系统的 $n = 2$, $a_1 = 2\zeta\omega$, $a_0 = \omega^2$, $b_2 = 0$, $b_1 = T$, $b_0 = 1$ 设状态变量为

$$\begin{aligned} x_1 &= y - h_0 u \\ x_2 &= \dot{y} - h_0 \dot{u} - h_1 u \end{aligned}$$

由式 (9-26) 可得

$$\begin{aligned} h_0 &= b_2 = 0 \\ h_1 &= b_1 - a_1 h_0 = T \end{aligned}$$

根据式 (9-27) 有

$$h_2 = b_0 - a_1 h_1 - a_0 h_0 = 1 - 2\zeta\omega T$$

参照式 (9-29) 及式 (9-30), 可列写出

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\zeta\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T \\ 1 - 2\zeta\omega T \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

系统的结构图如图 9-7 所示。

多输入-多输出系统 下面进一步讨论具有 p 个输入, q 个输出的 n 阶线性系统的状态方程和输出方程。

研究如图 9-8 所示的多输入-多输出系统。在此系统中, x_1, x_2, \dots, x_n 表示状态变量; u_1, u_2, \dots, u_p 表示输入量; y_1, y_2, \dots, y_q 表示输出变量。系统可用下列方程组来描述

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n \\ &\quad + b_{11}(t)u_1 + \dots + b_{1p}(t)u_p \end{aligned}$$

上式写成矩阵形式时, 可有

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \quad (9-34)$$

式中

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & \cdots & c_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{q1}(t) & c_{q2}(t) & \cdots & c_{qn}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) & \cdots & d_{1p}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) & \cdots & d_{2p}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{q1}(t) & d_{q2}(t) & \cdots & d_{qp}(t) \end{bmatrix}$$

式 (9-34) 是输出方程。矩阵 $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ 和 $\mathbf{D}(t)$ 完整地表征了系统的动态特性, 因此常把状态方程和输出方程称为系统的动态方程, 有时直接称为系统 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ 。

图 9-9 示出由方程 (9-31) 和 (9-33) 所确定的系统结构图。图中用双线表示向量。

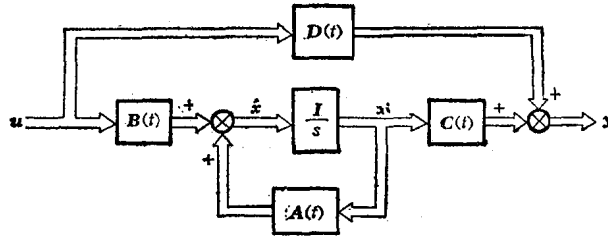


图9-9 向量微分方程式的结构图

如果系统是非线性的, 则状态方程可用 n 个一阶非线性微分方程来表示,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p) \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p) \end{aligned} \quad (9-35)$$

输出方程可表示为

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p) \\ y_2 &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p) \\ &\dots \dots \dots \\ y_q &= g_q(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p) \end{aligned} \quad (9-36)$$

式 (9-35) 和式 (9-36) 也可写成如下向量形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_q \end{bmatrix} \quad (9-37)$$

上式中 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 不是 t 的显函数, 这样的系统称为自治系统。自治系统的特性相对于时间轴 t 的平移是不变的。因此, 自治系统的解, 仅仅取决于相对时间, 而与起始时间无关, 故总可设 $t_0 = 0$ 。

如果 \mathbf{f} 是 t 的显函数, 系统可表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (9-38)$$