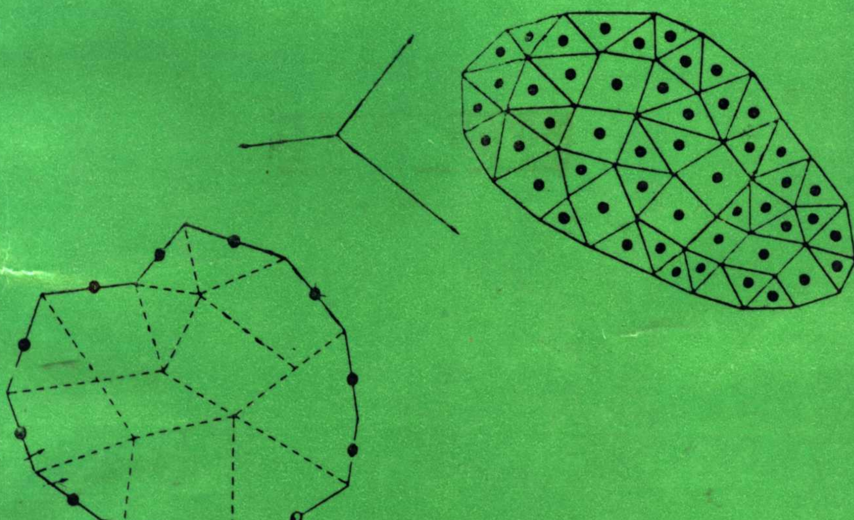
边界元法

申光宪 等编著



机械工业出版社

边界元法

申光宪　肖　宏　陈一鸣　编著

机械工业出版社

本书阐述边界元法的原理、工程应用和最新进展，共分五章。主要内容有各类定解问题微分方程（控制方程）的降维转换及离散近似原理、位势问题的边界元法、弹性及二维弹性问题的边界元法、复杂工程问题的边界元法进展，并附有5套计算机源程序和较多实例。

全书深入浅出，可供机电、材料、能源、交通工程和力学、生命科学领域的研究生、大学高年级学生、教师、工程技术及科学研究人员学习和参考。

图书在版编目（CIP）数据

边界元法/申光宪等编著．—北京：机械工业出版社，1998.4

ISBN 7-111-06076-8

Ⅰ．边…　Ⅱ．申…　Ⅲ．边界元法　Ⅳ．O242.21

中国版本图书馆CIP数据核字（98）第01336号

出 版 人　马九荣（北京市百万庄南街1号　邮政编码100037）
责任编辑：李宣春　[illegible]　责任校对：罗利华
封面设计：李　明　责任印制：侯新民
北京市昌平精工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
1998年4月第1版第1次印刷
850mm×1168mm 1/32·8¼印张·217千字
0 001—1 000册
定价16.00元

前　言

边界元法(Boundary Element Method,简称BEM)是新兴的离散解析工具,广泛应用于机械、土木建筑、化工、海洋、航天和电气等工程领域,成为当代计算机数值分析技术的核心部分。

适合于求解无穷域和应力集中问题并具有降维特色的工程边界元法,自本世纪70年代末兴起至今不到20年,然而在位势和弹性力学领域的应用臻于成熟和完整。

近10年,边界元法随着高性能大容量计算机的出现而深入于大型和非线性科学和工程领域的数值解析,成功地解决了如涡轮机叶片冷却孔群优化布设、内燃机曲轴强度分析、大型轧钢机机架强度及刚度分析、海洋石油钻井台柱防腐优化设计等复杂工程问题。与此同时,发展非协调元的应用、域积分项的边界积分转换和公式及其推导简洁等边界元法数值技术,同计算机功能模块和网格生成器相连结强化了自身特色。目前,边界元法数据准备和离散网格生成简单省力,在优化迭代过程中更新网格容易,计算时间少,从而大幅度缩短工程技术人员的工作时间,加快科学运算与工程进度,是现代科学和工程数值分析的有效工具,成为计算机辅助工程(CAE)的核心部分之一。

当前,边界元法在科学、工程及教育领域中的应用普及程度还不及有限元法,尤其是商业整套软件包急待研制和推广。建立在严密数学基础上的边界元法要重视数值分析技术的运用,最终编制高质量的计算机程序获得高精度解。否则,就没有工程实用价值,推广和普及受到限制。特别是对待三维非线性问题需要更高的数学基础和数值技术才能处理好收敛解和计算时间的矛盾。不重视数学理论而粗制滥编的计算机程序,往往会导致前功尽弃的恶果。因此,边界元法原理和数值分析技术二者对边界元法的发展和普及是同等至关重要的。

本书的读者对象主要是学习和从事计算力学、科学和工程数

值分析相关专业工作的研究生、大学高年级学生、大学教师及科研工程技术人员,可作为教科书和自学教材。

全书共分五章。第一章阐述边界元法离散近似解法和边界归化的原理,解明边界元法同有限差分法和有限元法等离散解法之间的联系和区别及其特色。第二章至第四章分别阐明位势问题、三维静态弹性问题和平面弹性问题的边界元法,包括基本解、非协调元、域积分项的边界积分转换、微机用源程序等内容。章内附上考题和算例。第五章介绍边界元法在复杂科学和工程问题中的进展,以及边界元法的新分支。

本书各章的撰写者是:第一、三章,陈一鸣;第二、四章,肖宏;前言、第五章,申光宪。全书由申光宪统稿。

本书总结了自 1983 年以来的教学和一系列已发表的以及未发表过的研究成果。申金红讲师、陈占福博士生为本书的撰写和图表制作付出了辛勤劳动,谨此深表谢忱。

作者

1997 年 9 月

目　录

第一章　原　　理

第一节　基 本 概 念

边界元法是对边界积分方程离散求解的现代数值分析方法，属近似解法之一。边界积分方程从定解问题的控制方程（即微分方程）转换而得，因而两个方程的解相等，亦即两个方程是等价的。通过加权余量法的分析对比阐明边界元法的原理和固有特性。

一、方程的转换（又称归化）

对于定解问题的微分方程，在无法直接积分求解的场合下，通常采用方程的转换求解法。转换方法是多种多样的。例如，能量原理、变分原理、Lagrange 乘数的误差（又称余量）分配法、余量的合理分配或加权法等。这是边界元法的基本原理之一。

以一维二阶微分方程（如图 1-1 静不定简支梁挠度方程）为例

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda^2u-b=0,\ x\in[0,1] \tag{1-1}$$

式中，u 是方程的基本函数，λ^2 是已知正定数，b 是有关 x 的已知函数，u 一般通过求解方程而得。

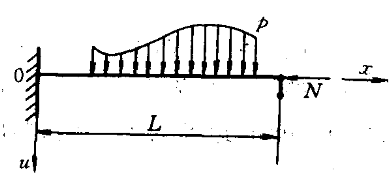


图 1-1　静不定简支梁

作为微分方程的一种转换方法可采用内积公式（即两矢正交的标量积）。选取在给定的区域[0,1]上连续可导的任一函数 w，w 与式(1-1)的内积为

$$\int_0^1\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda^2u-b\right)w\,dx=0 \tag{1-2}$$

对 u 的二阶导数积分项进行分部积分得

$$\int_0^1 \left\{ -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + (\lambda^2 u - b)w \right\} \mathrm{d}x + \left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} w \right]_0^1 = 0 \tag{1-3}$$

对 u 的一阶导数积分项再次分部积分得

$$\int_0^1 \left\{ u\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} + (\lambda^2 u - b)w \right\} \mathrm{d}x + \left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} w \right]_0^1 - \left[u\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \right]_0^1 = 0 \tag{1-4}$$

转换后的式(1-3)和式(1-4)，其域积分项的 u 和 w 在算子的位置不一样，还出现边值项，但它们之间是等价的，即表达式虽不同，但它们的解是相同的。方程必须满足的边界条件为在 $x=0$ 和 $x=1$ 处的 u 和 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 要已知。式(1-4)是函数 w 和 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ 在边界上具有非零值的通用表达式。若选取 w，除具有上述连续可导性外还必须满足边界条件，可简化转换表达式。例如，在虚位移原理中所选用的虚位移要满足齐次边界条件。亦即，位移(以 u 表示)虽不等于零，但位移所对应的任一点上的虚位移等于零。在 u 的边界上必有 $w\equiv 0$，这样可消除难以处理的功或能项$\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}w\right]$。

根据转换方程式(1-4)所推测的边界条件，给定式(1-1)的边界条件

$$u = \bar{u}(\text{在 } x = 0), q = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \bar{q}(x = 1) \tag{1-5}$$

式中，q 为 u 的一阶导数，上标一杠表示其函数及其导数值已知。通常式(1-5)的第一个条件称基本(essential)边界条件，第二个条件为自然(natural)边界条件。将这些值代入式(1-4)得

$$\int_0^1 \left\{ u\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} + (\lambda^2 u - b)w \right\} \mathrm{d}x + \{ [\bar{q}w]_{x=1} - [qw]_{x=0} \} - \left\{ \left[u\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \right]_{x=1} - \left[\bar{u}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \right]_{x=0} \right\} = 0 \tag{1-6}$$

按照式(1-2)的转换，对式(1-6)进行逆向转换。对 w 函数的二阶导数积分项经一次分部积分得

$$\int_0^1 \left\{ -\frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} + (\lambda^2 u - b)w \right\} dx + \left(u\frac{dw}{dx} \right)_{x=1} - \left(u\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} +$$

$$[\bar{q}w]_{x=1} - [qw]_{x=0} - \left(u\frac{dw}{dx} \right)_{x=1} + \left(\bar{u}\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = 0 \tag{1-7}$$

注意到$[u(dw/dx)]_{x=1}$项被消去，对上式中的 w 一阶导数积分项再次分部积分得

$$\int_0^1 \left[\frac{d^2u}{dx^2} + (\lambda^2 u - b) \right] w dx - \left(\frac{du}{dx}w \right)_{x=1} + \left(\frac{du}{dx}w \right)_{x=0} -$$

$$\left(u\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} + [\bar{q}w]_{x=1} - [qw]_{x=0} + \left(\bar{u}\frac{dw}{dx} \right)_{x=o} = 0 \tag{1-8}$$

其中，$[qw]_{x=0}$项被抵消。整理得

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2 u - b \right) w dx - [(q - \bar{q})w]_{x=1} +$$

$$\left((\bar{u} - u)\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = 0 \tag{1-9}$$

上式是等价于方程式(1-1)和边界条件式(1-5)的转换表达式，充分表明所求的方程解 u 不仅要满足给定的微分方程，还要满足给定的两个边界条件。选定的函数 w 及 dw/dx 称 Lagrange 乘数。因为在上述方程的转换过程中，对所求的解 u 未做任何规定，所以不论精确解还是近似解都同样有效。换而言之，上述转换是求解微分方程的通用方法。

再举二维的 Poisson 方程为例将其转换成积分方程。Poisson 方程是在工程中常用的重要方程。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = b \quad 在\ \Omega\ 内 \tag{1-10}$$

或

$$\nabla^2 u = b \qquad 在\ \Omega\ 内 \tag{1-11}$$

其中，$\nabla^2(\ \ ) = \frac{\partial^2(\ \ )}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\ \ )}{\partial x_2^2}$，称为 Laplace 算子，$x_1$ 和 x_2 表示坐标轴，b 为 x_1 和 x_2 的已知函数。如图 1-2 所示，Ω 是定义域，由边界 Γ 包围而成，n 为边界上的外法矢。

Poisson方程及其齐次型——Laplace方程是热传导、扭转、

扩散和带水层流动等许多工程问题的控制方程。选择具有二阶导数的任一连续函数 w 乘于方程式(1-11)得内积式

$$\int_\Omega (\nabla^2 u - b) w \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{1-12}$$

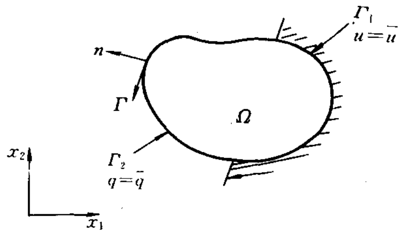


图 1-2　Poisson 方程问题的定义

上式对 x_1 和 x_2 进行分部积分

$$\int_\Omega \left(-\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial x_2} - bw \right) \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} w \mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{1-13}$$

u 对外法矢的偏导数 $\partial u/\partial n$，令 $q=\partial u/\partial n$，是由两项分部积分生成。对上式再次分部积分

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) u - bw \right] \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} w \mathrm{d}\Gamma - \int_\Gamma u \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{1-14}$$

亦即

$$\int_\Omega \{ (\nabla^2 w) u - bw \} \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} w \mathrm{d}\Gamma - \int_\Gamma u \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{1-15}$$

因为式(1-15)和式(1-12)是等价的，由此可换写为

$$\int_\Omega (\nabla^2 u) w \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega (\nabla^2 w) u \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} w \mathrm{d}\Gamma - \int_\Gamma u \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma \tag{1-16}$$

含 b 的积分项出现于等式的两边而被抵消。式(1-16)是众所周知的 Green 第二公式。即

$$\int_\Omega \{ (\nabla^2 u) w - (\nabla^2 w) u \} \mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n} w - u \frac{\partial w}{\partial n} \right) \mathrm{d}\Gamma \tag{1-17}$$

在许多书和文献中，将式(1-17)作为建立 BEM 边界积分方

程的出发点。该式强调所用函数必须具有必要阶数的连续性和精确满足边界条件的重要性。然而，用分布的概念建立边界积分方程更加明了和广泛。设定义域的边界 Γ 分为 Γ_1 和 $\Gamma_2(\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2)$，并有

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \qquad \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上} \\ q &= \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \qquad \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上} \end{aligned} \tag{1-18}$$

由此，式(1-15)可以写成

$$\int_\Omega \{(\nabla^2 w)u - bw\}\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_1} qw\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q}w\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{u}\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_2} u\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{1-19}$$

为了恢复 Laplace 算子项 $\nabla^2 u$，对上式进行逆向分部积分，查明边界条件的影响。即

$$\int_\Omega \left(-\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} - bw\right)\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial n}u\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1} qw\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q}w\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{u}\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_2} u\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{1-20}$$

第一个边界积分项分解为 Γ_1 和 Γ_2 的边界积分项。其中，Γ_2 的边界积分项被抵消得

$$\int_\Omega \left(-\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} - bw\right)\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial n}u\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1} qw\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q}w\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{u}\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{1-21}$$

再次分部积分，则

$$\int_\Omega \{(\nabla^2 u)w - bw\}\mathrm{d}\Omega - \int_\Gamma wq\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial n}u\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1} qw\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q}w\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{u}\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{1-22}$$

在上式中，Γ_1 的边界积分项被抵消后得

$$\int_{\Omega}\{(\nabla^2 u)w - bw\}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_2} wq\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1}\frac{\partial w}{\partial n}u\mathrm{d}\Gamma +$$

$$\int_{\Gamma_2}\bar{q}w\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_1}\bar{u}\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma = 0 \qquad (1\text{-}23)$$

经整理得

$$\int_{\Omega}\{(\nabla^2 u)w - bw\}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_2}(q-\bar{q})w\mathrm{d}\Gamma +$$

$$\int_{\Gamma_1}(u-\bar{u})\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma = 0 \qquad (1\text{-}24)$$

上式表明了基本函数 u 在定义域内要满足微分方程，同时还要满足基本及自然边界条件。式(1-24)除最后一项中的符号相反外，其余和式(1-9)完全相同。符号相反的原因来自基本函数求导自变量不同(法矢 n 和坐标 x)。

二、近似解与误差

对于工程中的定解问题，当无法得到精确解时就要得到近似解。边界元法数值解是近似解，近似误差来源于边界离散和边界元的规范函数。首先，从精选近似解试函数(简称近似解)入手，定义所求近似解 u 由未知待定系数 α_i 和线性独立的已知函数 ϕ_i 的列集组成

$$u = \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 + \cdots \qquad (1\text{-}25)$$

式中，α_i 是待定广义系数，在 BEM 及有限元中常选为单元节点值。即

$$u = u_1\phi_1 + u_2\phi_2 + \cdots = \sum_{j=1}^{n} u_j\phi_j \qquad (1\text{-}26)$$

将近似解 u 代入方程式(1-1)和边界条件式(1-5)，则不能恒等满足而产生误差。

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \lambda^2 u - b \neq 0, \qquad x \in [0,1] \qquad (1\text{-}27)$$

$$\begin{aligned} u - \bar{u} &\neq 0, \qquad x = 0 \\ q - \bar{q} &\neq 0, \qquad x = 1 \end{aligned} \qquad (1\text{-}28)$$

将误差分别定义为余量函数 R，R_1 及 R_2

$$R = \frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2 u - b \tag{1-29}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= u - \bar{u} \\ R_2 &= q - \bar{q} \end{aligned} \tag{1-30}$$

对于二维的 Poisson 方程式(1-11)及边界条件式(1-18)代入近似解同样产生余量函数

$$R = \nabla^2 u - b \qquad \text{在 } \Omega \text{ 内} \tag{1-31}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= u - \bar{u} \quad \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上} \\ R_2 &= q - \bar{q} \quad \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上} \end{aligned} \tag{1-32}$$

很明显，余量函数越小近似解越是逼近对应精确解。由此便寻找使余量在给定区域内或边界上最小的各种方法。通常，控制误差的分布靠加权函数，故称加权余量法。余量分布的控制不同将导致不同的数值解法。亦即，不同的数值解法都归结为加权余量法。

第二节 加权余量法

前节的一维公式(1-27)和式(1-28)以及二维公式(1-31)和式(1-32)或者同类公式组合的定解问题，都可选用近似解求解。根据近似解的不同选择可以有三种类型的解法。

1）纯域法

控制近似解试函数恒等满足全部边界条件，但近似满足域内控制方程。即 $R_1 = R_2 = 0, R \neq 0$。

2）边界法

控制近似解试函数恒等满足域内控制方程，但近似满足全部边界条件。即 $R = 0, R_1 \neq 0, R_2 \neq 0$。

3）混合法

控制近似解试函数近似满足域内控制方程和边界条件。即 $R \neq 0, R_1 \neq 0, R_2 \neq 0$。

假定构造的近似解 u 中 ϕ_j 仅恒等满足全部边界条件，由此只产生对应控制方程的余量 R。现在，要考察通过何种权函数 ψ_j 的选择使余量 R 在任一点最小。亦即

$$\int_{\Omega} R\psi_j \mathrm{d}\Omega = 0, \quad 在\ \Omega\ 内, j = 1,2,\cdots,N \tag{1-33}$$

选择权函数 w

$$w = \beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2 + \cdots + \beta_N\psi_N = \sum_{j=1}^{N} \beta_j\psi_j \tag{1-34}$$

式中，β_j 为任一系数，ψ_j 也是线性独立的已知函数。因此，将式(1-33)在全域内写成

$$\int_{\Omega} Rw \mathrm{d}\Omega = 0 \qquad 在\ \Omega\ 内 \tag{1-35}$$

由式(1-33)将得出矩阵方程(代数方程组)，并通过求解矩阵方程确定待定未知系数 α_i 和 u_i，解的精度可以控制项数 N 加以改善。在近似解 u 不变场合下选用不同的权函数可派生不同的近似解法。

1. **子域法**

将全域 Ω 分割成 M 个子域。令每个子域内的余量积分为零。选择最简单的权函数为

$$\psi_j = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_j \\ 0, & x \notin \Omega_j \end{cases} \tag{1-36}$$

其中，Ω_j 表示子域。由此，从式(1-33)得

$$\int_{\Omega_j} R \mathrm{d}x = 0, \qquad j = 1,2,\cdots,N \tag{1-37}$$

2. **Galerkin 法**

选择近似解试函数中的已知函数 ϕ_j 为权函数的已知函数 ψ_j。即

$$\psi_j = \phi_j \tag{1-38}$$

故，式(1-33)可写成

$$\int_{\Omega} R\phi_j \mathrm{d}\Omega = 0, \qquad j = 1,2,\cdots,N \tag{1-39}$$

若采用式(1-34)的定义表示，则

$$\int_{\Omega} Rw \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{1-40}$$

其中，

$$w = \beta_1\phi_1 + \beta_2\phi_2 + \cdots + \beta_N\phi_N \tag{1-41}$$

根据所取的 $\psi_j=\phi_j$ 的特点可得对称矩阵方程。

3. 选点法

在定义域内取点 $x_1,x_2,\cdots,x_N$，令选点上的余量为零。采用 Dirac—δ 函数作为权函数即可实现。

$$\psi_j=\delta(x-x_j),\qquad j=1,2,\cdots,N \tag{1-42}$$

$\delta(x-x_j)$ 又称点源函数。x 在 x_j 点上具有无穷大的值，其余点为零，然而其域积分值等于 1。即

$$\int_\Omega \delta(x-x_j)\mathrm{d}\Omega=1,\qquad j=1,2\cdots,N \tag{1-43}$$

且具有如下重要性质：

$$\int_\Omega f(x)\delta(x-x_j)\mathrm{d}\Omega=f(x_j) \tag{1-44}$$

取 $w=\beta_1\delta(x-x_1)+\beta_2\delta(x-x_2)+\cdots+\beta_N\delta(x-x_N)=$

$$\sum_{j=1}^{N}\beta_j\delta(x-x_j) \tag{1-45}$$

由式(1-35)，有

$$\int_\Omega Rw\mathrm{d}\Omega=\int_\Omega[\beta_1\delta(x-x_1)+\beta_2\delta(x-x_2)+\cdots+\beta_N\delta(x-x_N)]\mathrm{d}\Omega=0$$

由于 $\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_N$ 的任意性，上式变成

$$\int_\Omega R\delta(x-x_j)\mathrm{d}\Omega=0,\qquad j=1,2,\cdots,N \tag{1-46}$$

亦即，在选点上的余量函数为零。

$$R|_{x=x_j}=0,\qquad j=1,2,\cdots,N \tag{1-47}$$

选点的分布在原则上是任意的，通常选点数等于近似解试函数中的待定未知系数的个数。实际上，选点越是均布其解的精度越高。

【例题 1-1】

举一维场方程，重点说明加权余量法的应用。

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+x=0,\qquad x\in[0,1] \tag{a}$$

给定的边界条件有

$$u(0)=0,\ u(1)=0 \tag{b}$$

式(a)是式(1-1)的特殊场合($\lambda=0, b=-x$)。式(a)的精确解通过直接积分而得。即

$$u_{\text{exact}}=\frac{x}{6}-\frac{x^3}{6} \tag{c}$$

下面,用加权余量法的纯域法求解。先精选满足边界条件的近似解函数

$$u=\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2+\cdots \tag{d}$$

其中,ϕ_j 选用埃尔米特多项式。因为,只有两项满足齐次的边界条件,故取两项。即

$$u=\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2 \tag{e}$$

其中,$\phi_1(x)$、$\phi_2(x)$满足下列条件:

$$\begin{cases}\phi_1(0)=0, & \phi_1(1)=0\\ \phi'_1(0)=1, & \phi'_1(1)=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\phi_2(0)=0, & \phi_2(1)=0\\ \phi'_2(0)=0, & \phi'_2(1)=0\end{cases}$$

由此得到

$$\begin{cases}\phi_1=x-2x^2+x^3\\ \phi_2=x^3-x^2\end{cases} \tag{f}$$

将式(e)代入式(a)得余量函数

$$\begin{aligned}R(\alpha_1,\alpha_2,x)&=\frac{d^2u}{dx^2}+x=\\ &\alpha_1\frac{d^2\phi_1}{dx^2}+\alpha_2\frac{d^2\phi_2}{dx^2}+x=\\ &\alpha_1(6x-4)+\alpha_2(6x-2)+x\end{aligned} \tag{g}$$

下面,可用上述三种方法使余量最小。

1. 子域法

将定义域等分成 0~1/2,1/2~1 的两块,则

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2}R\,dx&=\int_0^{1/2}[\alpha_1(6x-4)+\alpha_2(6x-2)+x]dx=0\\ \int_{1/2}^{1}R\,dx&=\int_{1/2}^{1}[\alpha_1(6x-4)+\alpha_2(6x-2)+x]dx=0\end{aligned} \tag{h}$$