Re　　Im

复变函数与拉普拉斯变换

金忆丹　凌坚　陈育璋编

$\mathscr{L}$

浙江大学出版社

Re　　Im

高等学校教学用书

复变函数与拉普拉斯变换

金忆丹　凌坚　陈育樟编

浙江大学出版社

内 容 提 要

本书共分七章，前六章介绍了复变函数的基本概念与方法，其内容有复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、保角映射等内容；第七章介绍了拉普拉斯变换及其应用。

本书可作为高等理工科院校各专业必修课的教材，也可作为高等工业专科学校各专业的复变函数课及高等师范院校物理、力学专业的试用教材.本书还适用于业余工业大学、电视大学的学生与工程技术人员自学和进修.

复变函数与拉普拉斯变换

金忆丹　凌坚　陈育樟编

责任编辑　陈晓嘉

*　*　*

浙江大学出版社出版

浙江大学印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

·　·　·

787×1092　32开本　6.75　印张　180千字

1987年8月第1版　1987年8月第1次印刷

印数：1—7500

ISBN 7—308—00029—X

O·007　定价：1.33元

（统一书号：13337.008）

前　言

本书是根据大学工科《复变函数与积分变换》教学大纲，以浙江大学各工科专业多年来讲授该课程的讲义为基础而编写的。针对这门课程内容多、学时少的特点，编者力求做到取材精炼、推理运算明了、简洁，在叙述清楚基本概念的前提下，着重介绍了复变函数与拉普拉斯变换的基本理论和方法。并通过辅以适当的例题、习题，进一步阐明这些理论与方法的应用。书末附有习题答案及提示，以供参考。

本书适合作为高等工科院校每周2学时的复变函数课教材，内容可以根据不同的专业酌情取舍。

本书第一、二章由陈育樟编写；第三、四、六章由金忆丹编写；第五、七章由凌坚编写。全书由浙江大学郭竹瑞教授主审。此外，在编写过程中还得到了浙江大学应用数学系葛显良、杨明朝及中国计量学学院郑家绮等同志的帮助与指正。编者谨向他们表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中难免出现差错，诚恳希望采用本书的教师及学生批评指正。

编者

1987年3月

目　录

第一章　复数与复变函数

§1.1　复数及其几何表示 …………………………………… 1

§1.2　复数的运算 ………………………………………… 3

§1.3　共轭复数、复球面和无穷远点 ……………………… 7

§1.4　平面图形的复数表示 ……………………………… 9

§1.5　复变函数 ……………………………………………10

1.5.1　复变函数的概念……………………………………10

1.5.2　极限与连续…………………………………………12

习题 ……………………………………………………………15

第二章　解析函数

§2.1　复变函数的导数 ……………………………………17

§2.2　解析函数 ……………………………………………18

§2.3　解析函数与调和函数 ……………………………… 23

§2.4　初等函数 ……………………………………………24

2.4.1　指数函数……………………………………………24

2.4.2　对数函数……………………………………………25

2.4.3　幂函数………………………………………………26

2.4.4　三角函数与双曲函数………………………………26

习题 ……………………………………………………………28

第三章　复变函数的积分

§3.1　复变函数的积分及其性质 …………………………31

3.1.1　复积分的定义及其计算……………………………31

3.1.2　复积分的性质………………………………………34

§3.2　柯西积分定理 ………………………………………37

§3.3　柯西积分公式 ………………………………………44

§3.4 解析函数的高阶导数 ……48
习题 ……52
第四章 级数
§4.1 复数项级数与幂级数 ……55
4.1.1 复数序列与复数项级数……55
4.1.2 复函数项级数与幂级数……57
§4.2 台劳级数 ……61
4.2.1 台劳定理……61
4.2.2 解析函数的唯一性定理……65
§4.3 罗朗级数 ……66
习题 ……74
第五章 留数
§5.1 孤立奇点 ……77
5.1.1 孤立奇点的分类……77
5.1.2 孤立奇点的性质……79
§5.2 留数 ……83
5.2.1 留数的定义及留数定理……83
5.2.2 极点处留数的计算……84
§5.3 留数定理的应用 ……87
§5.4 无穷远点的留数 ……93
5.4.1 函数在无穷远点的性态……93
5.4.2 无穷远点处的留数……94
习题 ……97
第六章 保角映射
§6.1 保角映射的概念 ……103
6.1.1 导数的几何意义 ……103
6.1.2 保角映射的概念 ……106
§6.2 若干初等函数所确定的映射 ……106

6.2.1 整线性映射 ……………………………………………106
6.2.2 倒数映射 ………………………………………………108
6.2.3 幂函数映射 ……………………………………………112
6.2.4 指数函数与对数函数映射 ……………………………113
§6.3 关于保角映射的几个一般性定理 ………………116
§6.4 分式线性映射 ……………………………………119
6.4.1 分式线性映射 …………………………………………119
6.4.2 唯一决定分式线性映射的条件 ………………………121
6.4.3 两个重要的分式线性映射 ……………………………123
§6.5 举例 …………………………………………………126
习题 ……………………………………………………………129
第七章 拉普拉斯变换
§7.1 拉氏变换的基本概念……………………………134
7.1.1 拉氏变换的定义 ………………………………………134
7.1.2 拉氏变换存在定理 ……………………………………136
7.1.3 拉氏变换的反演公式 …………………………………138
§7.2 拉氏变换的基本性质……………………………139
§7.3 象原函数的计算…………………………………150
*§7.4 δ函数简介及其LT……………………………153
7.4.1 δ函数的概念 …………………………………………153
7.4.2 δ函数的LT……………………………………………159
§7.5 拉氏变换的应用…………………………………161
习题……………………………………………………………171
附录……………………………………………………………176
习题答案……………………………………………………189

第一章　复数与复变函数

§1.1　复数及其几何表示

数$z=x+iy$称为**复数**，其中x和y是任意实数，i是虚单位($i^2=-1$)。实数x和y分别称为复数z的**实部**和**虚部**，记为

$$x=\mathrm{Re}z, \quad y=\mathrm{Im}z.$$

当$x=0$时，$z=iy$称为**纯虚数**；当$y=0$时，复数$z=x$就是实数。可见复数包含了实数。

如果两个复数$z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$的实部和虚部分别相等，即

$$x_1=x_2, \quad y_1=y_2,$$

则认为这两个复数是相等的，可写为

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2.$$

从以上可知，复数$z=x+iy$被一有序数组(x,y)所确定。换句话说，复数z与有序数组(x,y)建立了一一对应的关系。在笛卡尔直角坐标系中，有序数组(x,y)与平面上的点$P(x,y)$存在一一对应的关系，因此，借助平面直角坐标系，可以用平面上的点$P(x,y)$表示复数$z=x+iy$(如图1-1)。

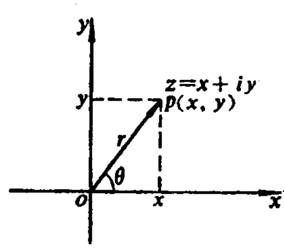


图1-1

这个平面称为**复平面**或**z平面**。ox，oy轴分别称为**实轴**和

虚轴；表示复数 z 的点，通常简称为"点 z"。

复数除了用复平面上的点来表示外，还可以用由原点引向点 z 的向量来表示(如图1-1)。向量的模称为复数 z 的**模**，记为$|z|$，因此

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (1.1.1)$$

当$z \neq 0$时，表示复数 z 的向量与实轴正方向所夹的角 θ 称为 z 的**辐角**，记作$\theta = \mathrm{Arg}z$。显然$\mathrm{Arg}z$是多值的.通常将满足条件$-\pi < \theta_0 \leq \pi$的辐角θ_0称为$\mathrm{Arg}z$的**的主值**，记为$\theta_0 = \arg z$,于是

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi \qquad (k \in J)^{[1]}. \qquad (1.1.2)$$

利用直角坐标与极坐标的关系：

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

可以将复数 z 化为下面的**三角形式**和**指数形式**：

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}. \qquad (1.1.3)$$

复数的上述三种形式，可以相互转换. 把复数$z = x + iy$化为三角形式，需计算$|z|$和$\mathrm{Arg}z$。我们在确定$\arg z$时必须考虑点 z 所在的象限：

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}, & \text{当 } x>0; \\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}+\pi, & \text{当 } x<0,\ y\geq 0; \\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}-\pi, & \text{当 } x<0,\ y<0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0,\ y>0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0,\ y<0. \end{cases} \qquad (1.1.4)$$

---

[1] J 为整数集合

例1　计算$z=e^{i\pi}$

解　因为$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi$，所以$e^{i\pi}=-1$。

例2　将$z=-1+i\sqrt{3}$化为三角形式和指数形式。

解　因为 $x=\mathrm{Re}z=-1$；$y=\mathrm{Im}z=\sqrt{3}$，所以 $|z|=r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$。

设$\theta=\arg z$，则$\mathrm{tg}\,\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$.由于点$z=-1+i\sqrt{3}$位于第二象限，故$\theta=\arg z=\dfrac{2}{3}\pi$。从而有

$$z=-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

§1.2　复数的运算

复数的四则运算以及乘幂运算，都是按照代数多项式的运算法则进行的，不同的只是在运算中用-1代替i^2；$-i$代替i^3；…，最后将实部和虚部分开。如对于复数$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，有

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2),\tag{1.2.1}$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1),\tag{1.2.2}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2\neq0)\tag{1.2.3}$$

$$z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i2xy. \tag{1.2.4}$$

用向量表示复数时，复数加减法同向量运算完全一样（如图1-2）。

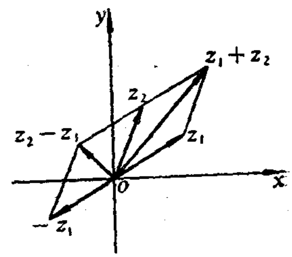


图1-2

显而易见，$|z_1-z_2|$就表示z_1与z_2两点的距离。$\operatorname{Arg}(z_2-z_1)$则表示由点$z_1$引向$z_2$的向量与实轴正方向所夹的角。且有

$$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|;$$

$$|z_2-z_1|\geqslant|z_2|-|z_1|.$$

若 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_1e^{i\theta_1}$;

$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_2e^{i\theta_2}$,

则

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2&=r_1r_2[(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)]\\ &=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\\ &\quad+i(\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\ &=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]\\ &=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

由此得到

$$|z_1\cdot z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|; \tag{1.2.5}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1\cdot z_2)=\theta_1+\theta_2=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2\text{[2]}. \tag{1.2.6}$$

---

[2]由于辐角的多值性，该等式应理解为对于左边的任一个值，右边必有一个$(\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2)$值相对应，反之亦然。

这说明**两个复数乘积的模等于它们模的乘积，乘积的辐角等于辐角之和。**

据此，设$z=re^{i\theta}$，得

$$z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$
$$=r^ne^{in\theta}. \tag{1.2.7}$$

从而有

$$|z^n|=r^n=|z|^n;\qquad \mathrm{Arg}z^n=n\theta=n\mathrm{Arg}z;$$

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

现在我们来讨论复数的除法。若$z_2\neq 0$，则z_1可表示为

$$z_1=\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2$$

于是由(1.2.5)和(1.2.6)就得到

$$|z_1|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right||z_2|;\ \ \mathrm{Arg}z_1=\mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2}+\mathrm{Arg}z_2$$

或
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|};\qquad \mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$$

由此可见，**两个复数之商的模等于它们模的商，商的辐角等于被除数与除数的辐角之差。**

下面介绍复数的方根。设$z=re^{i\theta}$是已知复数，n为正整数，则称满足方程

$$w^n=z$$

的所有w值为**z的n次方根**，并记为$w=\sqrt[n]{z}$。

设$w=\rho e^{i\varphi}$，则根据方根的定义和(1.2.7)得

$$w^n=\rho^n e^{in\varphi}=re^{i\theta}.$$

所以

$$\begin{cases}\rho=r^{\frac{1}{n}};\\ \varphi=\dfrac{\theta}{n}=\dfrac{\arg z+2k\pi}{n}\end{cases}\qquad(k\in J)$$

若记$\Delta=\dfrac{2\pi}{n}$；$\theta_0=\arg z$，则当$k=0,1,2\cdots,n$时便得到n个相异的方根：

$$w_k=r^{\frac{1}{n}}e^{i\left(\frac{\theta_0}{n}+k\Delta\right)}.\qquad(1.2.8)$$

可以验证，当k用其它整数代入时，得到的方根必定是上面这n个方根之一。例如将$k=n$代入，有

$$\begin{aligned}w_n&=r^{\frac{1}{n}}e^{i\left(\frac{\theta_0}{n}+2\pi\right)}\\&=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta_0}{n}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta_0}{n}+2\pi\right)\right]\\&=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta_0}{n}}=w_0.\end{aligned}$$

因此，**z的n次方根有且仅有n个不同的根，**这n个**根的模数都等于$r^{\frac{1}{n}}$，而辐角依次增加一个**$\Delta=\dfrac{2\pi}{n}$。在复平面上，这n个方根分布在以原点为中心，$r^{\frac{1}{n}}$为半径的圆内接正n边形的n个顶点上。

例3 求$\sqrt[4]{1+i}$的方根。

解 因为$z=1+i=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}$，这里 $n=4$；$\Delta=\frac{2\pi}{4}$，$\theta_0=\frac{\pi}{4}$，所以当 $k=0,1,2,3$ 时，分别得到下面四个不同的方根：

$$w_0=\sqrt[8]{2}\,e^{\frac{\pi}{16}i}; \qquad w_1=\sqrt[8]{2}\,e^{\frac{9}{16}\pi i};$$

$$w_2=\sqrt[8]{2}\,e^{\frac{17}{16}\pi i}; \qquad w_3=\sqrt[8]{2}\,e^{\frac{25}{16}\pi i}.$$

§1.3 共轭复数、复球面和无穷远点

实部相同，虚部只差一个符号的两个复数，互为**共轭复数**。如对于$z=x+iy$，其共轭复数可表示为$\bar{z}$，$\bar{z}$的共轭复数可表示为$\bar{\bar{z}}$，则

$$\bar{z}=x-iy, \qquad \overline{(\bar{z})}=x+iy=z.$$

显然在 z 平面上，点 z 与$\bar{z}$关于实轴对称，因此$|z|=|\bar{z}|$，且当$z\neq x(x\leq 0)$时，有$\arg\bar{z}=-\arg z$。

由此不难证明共轭复数有以下性质：

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$，

(2) $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$；　$\overline{z^n}=(\bar{z})^n$，

(3) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}z$；　$z-\bar{z}=2i\mathrm{Im}z$.

例4 设 $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$ 为实系数多项式，若复数z_0是方程$P(z)=0$的一个根，则$\bar{z}_0$也是方程的根。

试证之。

证明 由共轭复数的性质，我们有

$$\overline{P(z)}=\overline{a_0}+\overline{a_1 z}+\overline{a_2 z^2}+\cdots\cdots+\overline{a_n z^n}$$

$$=a_0+a_1\bar{z}+a_2\bar{z}^2+\cdots\cdots a_n\bar{z}^n=P(\bar{z})$$

既然$P(z_0)=0$，因此

$$P(\bar{z}_0)=\overline{P(z_0)}=0,$$

即$\bar{z}_0$也是方程的根。

复数除了用复平面上的点表示外，还可以用球面上的点来表示。

过复平面的原点作一个与复平面相切的球面，其切点S称为南极，再过S作复平面的垂线，交球面于点N，称为北极(如图1-3)。

用直线将复平面内的任一点z与北极N连接起来，则直线交球面于一点P。反之，球面上除了N外的任一点P与N连接成的直线一定交复平面于某一点z。因此，球面上异于N的点P就与复平面上的点z之间建立起一一对应的关系。

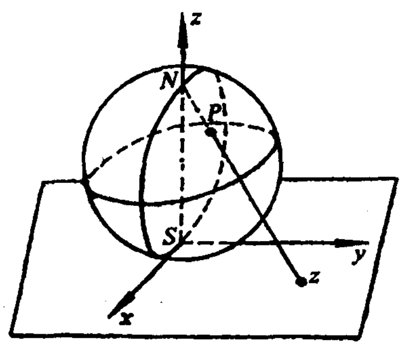


图1-3

由图1-3可见，当点z无限地远离复平面的原点，即当$|z|$无限地变大时，球面上所对应的点P将越来越接近于点N。由此，我们定义，模为无穷大的点z为**无穷远点**，记为∞。显然∞与球面上的北极N相对应。

引入无穷远点之后，球面上每一点就有唯一的一个复数（包括∞在内）同它对应。球面称为**复球面**，包含无穷远点在内的复平面称为**扩充的复平面**。

§1.4 平面图形的复数表示

由于平面上的点可用复数来表示，因而一些简单的平面图形（例如曲线、区域）就可用复数所满足的方程或不等式来表示.

例5 考察下列方程

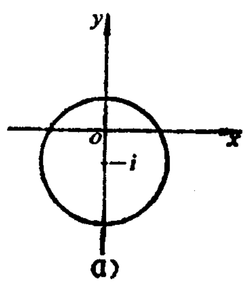
（1）$|z+i|=2$,

（2）$\arg(z-i)=\dfrac{\pi}{4}$

在平面上所描绘的几何图形。

解 （1）因为$|z+i|=|z-(-i)|$，所以满足方程$|z+i|=2$的点 z 的全体，是以$-i$为中心，2为半径的圆[见图1-4(1)]。

（2）由§1.2可知，等式$\arg(z-i)=\dfrac{\pi}{4}$表示由点 i 到点 z 的向量，与实轴正方向的夹角为$\dfrac{\pi}{4}$。因此，满足方程 $\arg(z-i)=\dfrac{\pi}{4}$的点 z 的全体，是过点 i 且倾角为$\dfrac{\pi}{4}$的一条射线[如图1-4(2)]。



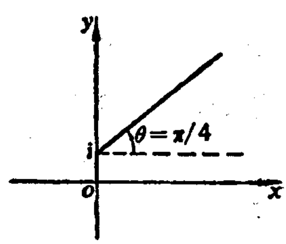


图1-4

例6 考察下列不等式：

(1) $|z-a|<R$ （a为复数）；

(2) $\alpha<\arg z<\beta$

在复平面上所确定的区域。

解 (1) 满足不等式$|z-a|<R$的点z的全体，是以a为中心，R为半径的圆的内部[如图1-5(1)]。

(2) 满足不等式$\alpha<\arg z<\beta$的点z的全体，是以O为顶点，张角从α到β的角域[如图1-5(2)]。

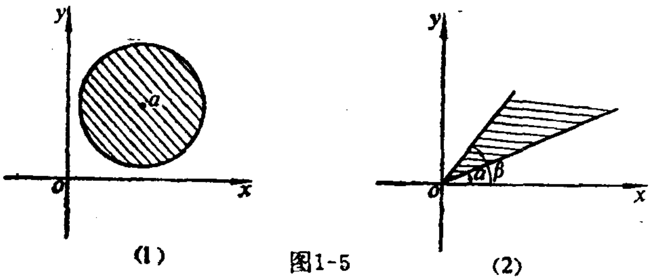


图1-5

§1.5 复变函数

仿照数学分析，用复变量取代实变量，就可以建立起复变函数及与之相应的极限、连续等概念，并得到对应的结果。

1.5.1 复变函数的概念

定义1.1 设D是复变数z的一个集合，对D中每一个z，按照一定的规律，有一个或多个复数w的值与之对应，则w称为定义在D上的复变函数，记作

$$w=f(z).$$

集合D称为函数的**定义集**，由函数值w的全体所组成的集