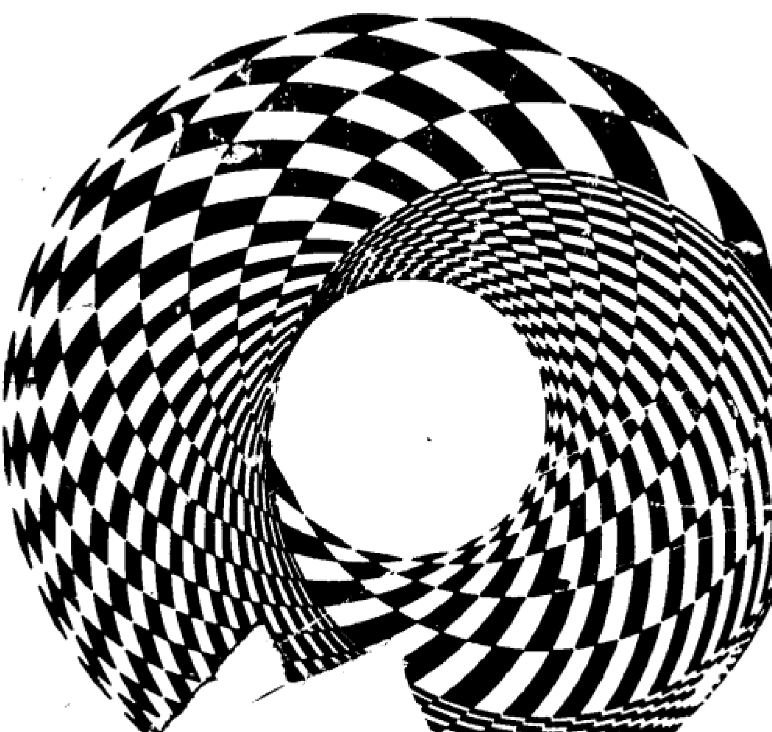
西安电子科技大学出版社

有限元法与边界元法

曾余庚 刘京生 张雪阳 编



有限元法与边界元法

曾余庚 刘京生 张雪阳 编

西安电子科技大学出版社

1 9 9 1

(陕)新登字 010 号

内容简介

本书内容分为两大部分：第一部分介绍有限元法，其中包括利用变分原理推导有限元方程、根据伽辽金法推导有限元方程、三类边界条件的处理、系数矩阵的形成方法、各种高次单元的形函数、等参数单元及高斯积分，并有数值例题，以说明有限元的应用方法；第二部分介绍边界元法，其中包括拉普拉斯方程、泊松方程、亥姆霍茨方程、热传导方程、波动方程、弹性力学问题的边界元解法，还介绍了有限元法与边界元法的联合使用、无边界场的求解等问题．各章均附有算例．

书中深入浅出地介绍了有限元法与边界元法的概念、原理与方法，力求通俗易懂，不涉及较深的理论性问题．

本书可作为高等院校有关专业本科生和研究生的教材，也可供工程技术人员参考．

有限元法与边界元法

曾余庚　刘京生　张雪阳　编
责任编辑　杨兵

西安电子科技大学出版社出版发行
西安电子科技大学印刷厂印刷
新华书店经销
开本 850×1168 1/32　印张 8 28/32　字数 215 千字
1991 年 12 月第 1 版　1991 年 12 月第 1 次印刷　印数 1—2 000

ISBN 7-5606-0150-2/O·0007(课)　定价：2.80 元

前　言

50年代以来，由于电子计算机的普遍使用，一些数值方法也得到了迅速发展。

有限元法由于其适用范围广，计算效果好，国内外学术界对它的有关理论、计算技术以及应用都做了大量的工作，许多问题有了现成的程序，用起来比较方便。因此有限元法已成为分析工程问题最受人注意的数值计算方法。

边界元法是在经典边界积分方程法的基础上，吸收了有限元离散化技术而建立起来的一种新的数值方法。由于它具有有限元法所没有的一些优点，因而引起了工程科技工作者的广泛兴趣，并为工程界普遍接受，在土木、水利、建筑、采矿、航空、海洋、机械、电机、电磁场等问题中得到应用。

对于从事"四化"建设的工程技术人员，特别是担负着开发和研究任务的科技工作者，以及高等院校有关专业的高年级学生和硕士研究生，学习和掌握有限元法、边界元法的原理和方法，并用它们去解决工程技术问题具有重要的现实意义。

本书正是为适应上述要求，为工科院校有关专业的学生和硕士研究生学习有限元法与边界元法而编写的一本教材，同时也可作为工程技术人员和教师进修的参考读物。

第一章绪言对有限元法和边界元法作了综合性的概述，以便对这两种数值方法有一个极初步的了解。

第二、三章阐述了有限元法的基本原理和方法，其中也简单介绍了变分法和加权残数法的基本知识。

第四章到第八章具体讨论了利用边界元法求解一些数理方程的问题。

第九、十章阐明了联合使用有限元法与边界元法去求解某些工程问题。

本书在编写时曾利用了编者的科研和教学工作的实践成果。

叶尚辉教授审阅了全部书稿，提出不少宝贵意见，西安电子科技大学出版社对本书的出版给予热情支持，责任编辑杨兵付出了巨大劳动，编者对此一并表示最深切的谢意。

由于编者水平有限，书中可能存在一些错误和不妥之处，望读者批评指正。

编者　1988.10

目　　录

前言
第一章　绪言
§1.1　什么是有限元法……………………………………（1）
§1.2　什么是边界元法……………………………………（3）
§1.3　有限元法与边界元法的一些对比…………………（5）
第二章　有限元法的基本原理
§2.1　泛函与变分…………………………………………（9）
§2.2　欧拉方程……………………………………………（12）
§2.3　里兹法………………………………………………（15）
§2.4　有限元法的分析过程………………………………（18）
§2.5　根据变分原理推导单元特征式……………………（20）
§2.6　系统的有限元方程…………………………………（29）
§2.7　加权残数法简介……………………………………（33）
§2.8　根据伽辽金法推导有限元方程……………………（38）
§2.9　第二、三类边界条件的处理………………………（49）
第三章　单元的形函数与等参数单元
§3.1　单元的类型…………………………………………（59）
§3.2　插值函数——多项式………………………………（62）
§3.3　划分单元的基本原则………………………………（66）
§3.4　自然坐标……………………………………………（68）
§3.5　拉格朗日插值多项式………………………………（75）
§3.6　形函数………………………………………………（80）
§3.7　等参数单元…………………………………………（92）
§3.8　高斯积分法及其在等参元中的应用………………（101）

第四章　拉普拉斯方程与泊松方程的边界元解法
§4.1　边界法…………………………………………………… (106)
§4.2　拉普拉斯方程的基本解…………………………………… (109)
§4.3　拉普拉斯方程的边界元分析……………………………… (112)
§4.4　算例…………………………………………………… (120)
§4.5　泊松方程的边界元解……………………………………… (122)
第五章　亥姆霍茨方程的边界元解法
§5.1　引言…………………………………………………… (126)
§5.2　基本解、汉克尔函数……………………………………… (126)
§5.3　亥姆霍茨方程的边界积分方程…………………………… (127)
§5.4　亥姆霍茨方程的边界元解………………………………… (129)
§5.5　亥姆霍茨方程的特征值问题……………………………… (138)
§5.6　亥姆霍茨方程的确定性问题……………………………… (141)
第六章　热传导方程的边界元解法
§6.1　引言…………………………………………………… (143)
§6.2　利用时间差分建立边界元方程…………………………… (144)
§6.3　利用时间相关基本解建立边界元方程…………………… (155)
§6.4　时间相关基本解边界元方程的求解……………………… (170)
第七章　波动方程的边界元解法
§7.1　引言…………………………………………………… (183)
§7.2　波动方程的基本解………………………………………… (183)
§7.3　波动方程的边界积分方程………………………………… (184)
§7.4　波动方程的边界元解……………………………………… (192)
§7.5　数值例子……………………………………………… (201)
第八章　弹性力学问题的边界元解法
§8.1　弹性静力学问题的基本方程……………………………… (204)
§8.2　空间问题的基本解………………………………………… (206)
§8.3　弹性力学问题的边界积分方程…………………………… (209)

第九章　有限元法与边界元法的联用
§9.1　引言…………………………………………………… (217)
§9.2　求解区域的划分……………………………………… (217)
§9.3　边界元——有限元联用方法　……………………… (221)
§9.4　算例…………………………………………………… (234)
第十章　无边界场问题
§10.1　引言　……………………………………………… (245)
§10.2　简单无限域问题　………………………………… (247)
§10.3　边界元——有限元组合方法解无限域题 …… (253)
§10.4　组合法在亥姆霍茨边值问题中的应用　……… (263)
附录　狄拉克 δ 函数 ………………………………………… (266)
参考文献 ……………………………………………………… (271)

第一章 绪　言

§1.1 什么是有限元法

有许多工程问题可以并不困难地写出它们的控制方程和相应的边界条件、初始条件，但是由于边界的几何形状或问题本身的一些特性很复杂，却很难用经典理论的解析法去求解。克服这种困难的补救办法是对问题作较多的简化假设，使问题能够求解，但是这样做的结果往往导致精度太差，有时甚至得出错误的解答。

现在由于电子计算机的应用和计算方法的新进展，可以在保留问题复杂性的前提下设法去寻找它的近似解。

有限单元法就是为了对某些工程问题求得近似解的一种数值分析方法。这种方法是将所要分析的连续场分割为很多较小的区域(称为单元或元素)，这些单元的集合体就代表原来的场，然后建立每个单元的有关特性的关系式，再组合起来就能求得相应场问题的解答。这是一种从部分到整体的方法，分析过程大为简化。从数学角度来说，有限单元法是从变分原理或加权残数法出发，通过区域剖分和分片插值，把数理方程的边值问题化为等价的一组多元线性代数方程的求解。

有限元法的思想最早出现在 Courant1943 年所发表的一篇著作中。当时由于受到一些客观条件的限制而未能得到很快的发展。到 50 年代，由于工程分析的需要，计算工具和计算方法都已具备了一定的条件，有限元法在分析复杂的航空结构中最先得到应用，而有限元法这一名称则是由 Clough 于 1960 年在他的著作中首先提出的。

有限元法是在变分原理或加权残数法的基础上建立起来的，因此理论基础牢靠。虽然这一方法起源于结构分析，但是由于它所依据的理论具有普遍性，目前不仅被广泛地应用于各种结构工程中，而且作为一种分析方法已被推广并成功地用来解决其它工程领域中的问题。

有限元法是将所考察的连续场分割为有限个单元，然后用比较简单的函数来表示每个单元的解，但是它并不要求每个单元的试探解都满足边界条件，因为边界条件不进入单个有限元的有关特性的关系式中，所以对于内部的和边界上的单元能够采用同样的函数。边界条件只需在集合体的方程中引入，其过程也比较简单，因为在变分法中自然边界条件隐含地得到满足，只需要考虑强迫边界条件。

有限单元法在处理复杂的几何形状时比有限差分法更为有利，在对连续场作离散处理、划分网格时的灵活性和适应性，有限元比差分要强。

在有限元法中，最终求解的是线性代数方程组，它的系数矩阵总是对称的，对于正定的变分问题，有限元离散化后保持了正定性，而且有限元法的系数矩阵是稀疏的。

有限元法不仅适应复杂的几何形状和边界条件，而且很容易通过对不同的单元规定不同的性质，成功地用于多种介质和非均匀连续介质的问题，这是其它数值方法最难于处理的问题。

这个方法便于在计算机上实现。如单元分析、总体合成、代数解算等都可以编成程序。而且可以编制通用程序，对不同的问题无需修改或稍加修改就能应用。

利用有限元法分析工程问题，如果处理得当，实践证明所求得的解精度较高。

任何维数的连续问题，其场变量具有无限多个值，因为它是解域内每一点的函数，所以这是一个具有无限个未知量的问题。

而有限元法将解域分割为有限个单元，并在每个单元内采用假设的函数来表示未知场变量，这种有限单元的离散工作就把问题简化成为有限个未知量的问题了。假定的函数称为场变量模型(试探函数)，场变量模型由结点(几个单元的汇交点)处的场变量值所确定。场变量的结点值和单元的场变量模型完全确定了单元内场变量的性质。用有限元描述一个问题，场变量的结点值就成为新的未知量，一旦这些未知量求出之后，场变量模型就确定了整个单元以至集合体的场变量。显然，解的正确性和近似程度不仅与单元的大小、单元的数目有关，而且与所选择的场变量模型有关。场变量模型的选择需要经验和判断。

利用有限元法分析问题，输入的数据特别多，因此需要作大量的准备工作。输出的数据也很多，整理和解释它们都很麻烦。目前正朝着自动化的过程发展。

§1.2 什么是边界元法

边界单元法是求解数学物理方程的一种新的数值计算方法。这种方法是把所研究的问题的微分方程变成边界积分方程，然后将区域的边界划分为有限个单元，也就是把边界积分方程离散化，得到只含有边界上的结点未知量的方程组，然后进行数值求解。

这种方法在处理问题时与目前广泛使用的有限单元法和有限差分法有某些类似之处，但其出发点却完全不同，所以形成了一种新的方法。

有限单元法和有限差分法属于所谓“区域法”。这些方法的出发点是把问题的连续“区域”划分成许多细小的单元或网格，然后把各单元或网格换成简单的等价模型，再把它们联系起来进行全部计算。这也就是说，把原来的分布参数系统问题化为集中参数

系统问题来求解。这些方法的基本思想是用完全(或局部)满足定义域上边界条件的函数去逼近问题的控制微分方程。边界单元法与它们正好相反，它是把定义域的边界划分成一系列的单元，用满足控制方程的函数去逼近边界条件。在单元上所考虑的函数可以按不同的形式变化，这一做法与有限单元法大致相同。

边界单元法可以分成两种基本类型，即间接法和直接法。间接法是从一个基本解入手，该解在定义域内满足控制方程，但却含有某些未知数，这些未知数则通过在许多点(或子域)上施行边界条件来确定。间接边界单元法是用物理意义不一定很明确的变量来表示化成的公式。这种方法曾用于求解由拉普拉斯方程或亥姆霍茨方程所控制的弹性力学问题或其它势问题[1]。直接边界单元法是最近才提出来的，它是以格林恒等式作为出发点，变量具有明确的物理意义，现在已优先应用于工程科学中，本书仅讨论这种方法。

实践证明，边界元法是计算精度较高的一种数值方法。

边界元法是将区域上的控制方程转化为沿区域边界的积分方程，因此它只需要定义边界上的单元，结合边界条件求解，这样就使处理问题的维数降低一维，即三维问题可变成二维问题来处理，二维问题可变成一维问题来处理。

由于这种方法只将边界离散求解，求解一个问题所建立的方程组阶数低，数据大为减少，因而对计算机的内存要求也降低。

但是，边界元法所建立的方程组的系数矩阵是稠密的，一般是非对称的，而且矩阵元素分量的计算量很大，这就抵消了降阶之后矩阵消元所能省出的一部分时间。

此外，边界元法在处理非均一、非同质的问题时相当困难。

边界单元法是在经典的边界积分法的基础上发展起来的。60年代初 Jaswon[2]和 Symm[3]在研究势问题的论文中首次提出边界积分方程法，之后 Jaswon 和 Symm 利用这种方法研究了弹性薄

板的弯曲问题[4]。作为直接边界单元法基础的开创性论著是由 Jaswon 和 Ponter 针对弹性杆件的圣维南扭转问题提出来的[5]，随后 Rizzo 成功地把这个方法用于解决弹性稳定的问题[6]，后来 Rizzo、Shippy、Shaw、Cruse、Lachat、Watson、Brebbia、Chaudouet、Banerjee 等人对边界单元法的现代发展都作出了贡献。

从 1972 年以来，在一些大型的国际性专业会议上已发表了大量的有价值的论文，而且多次召开了边界单元法的专业会议。

在各种学术刊物上，如《Computers & Structures》、《Applied Mathematical Modelling》、《Numerical Methods in Engineering》等都发表了许多有关边界单元法的论文。目前国外已出版了很多这方面的专门著作。在英国、日本等国家对边界单元法的应用程序的研制工作也早已进行。

这一方法在我国也引起许多学者的重视，如冯康[7]、杜庆华[8]、何广乾[9]、劳洁生[10]、曲圣年等，在边界单元法理论和应用的研究方面做了很多创造性和有益的工作。

在国内也召开了有关这一方法的专业会议。1985 年召开了第一届工程中的边界单元法会议，1986 年召开了工程中的边界单元法国际会议。

目前，边界单元法不仅在固体力学问题上得到广泛的应用，而且在热传导、流体力学、电磁学等领域也得到了应用。

§1.3　有限元法与边界元法的一些对比

有限元法和边界元法都是离散化数值解法，都是建立在坚实理论基础上的近似方法，它们有各自的优缺点和局限性。

有限元法和边界元法都要以一个试探解函数来实现对求解区域的离散，这两种方法在选择这些函数时采用了不同的准则。试

探函数的性质不同，则求解区域离散方法也不同。对于一个给定的偏微分方程边值问题，实际上难以找到一个同时精确满足控制微分方程和边界条件的解函数。有限元法采用的试探解函数满足边值问题的主要边界条件，而在域内和边界上不满足控制微分方程，然后在整个求解区域上采用变分原理来寻求控制微分方程的近似满足。边界元法需要试探解函数满足控制微分方程，而不必满足边界条件，然后通过伽辽金法、配置法或者最小二乘法把问题定义在求解区域的边界上，在某种平均的意义上来寻求边界条件的近似满足。

用边界元法求解边值问题需要找到控制微分方程的一个基本解或控制微分方程在求解区域上的格林函数，这对于某些问题是十分困难的。为了保证边界元法求解的控制方程为常系数偏微分方程，一般还要求求解区域是均匀媒质的。因此，边界元法比较难于求解控制微分方程为非线性的问题和含有非均匀媒质的问题；有限元法仍适用于某些复杂的非线性方程和含有非均匀媒质的问题。

有限元法的主要缺点之一是不大适合求解无限边界场域边值问题，而只能求解有界问题，因为用有限个单元离散无限域显然是不可能的。而边界元法采用的基本解自然满足在场域无限远处的条件，因此边界元法可用于求解具有有限边界和无限场域的边值问题。

用有限元法难于处理的另一类问题是域内具有应力奇异的问题。在固体力学问题中，这类应力奇异通常发生在不规则的凹角或孔洞附近。由于应力奇异可能引起断裂扩展，因此在奇异点附近能否得到一个较为精确的解答，有时就显得十分重要。但是在奇异点处，理论上应力为无限大，用有限元法可能产生毫无意义的分析结果。类似的情况也可能发生在有集中载荷处，如在势论问题中有点源存在处。在这些情况下，不论单元划分得多么细

小，用有限元法得到的结果通常不可能反映出它们在奇异点附近的迅速变化。而用边界元法就比较容易处理上述问题，边界元法在理论上能够计算任意点处的解答，不论这些点非常遥远或是在距离可能的奇异点为任意小的距离处，因为边界元法实际上摆脱了在有限元法中存在的这样一个约束，即必须在一个给定的网格各点上寻求问题的解答。

除了对于狭长形状的解域外，边界元法的求解精度一般高于有限元法。边界元法对两种不同类型的变量(即在一些场问题中的势和通量，或在应力分析中的位移和应力)一般都能获得较好的结果。而有限元法一般只是对于控制微分方程中所考虑的变量(即势或位移)的求解精度比较高，但对于这些变量的导数(通量或者是应力)所得结果就不很精确，而且通常使得它们在单元之间成为不连续。如果在媒质中存在高通量或应力集中区域，这个问题将更加突出。

由于边界元法的离散处理仅涉及边界，整个域内不再出现待求参数，因此，其待求参数的数目可以比有限元法(需同时将全域和边界离散)所用的少很多，使方程组规模缩小，故边界元法可以用较少数量的未知数分析同样的问题。边界元法的这个特性使得它在三维问题中特别具有吸引力，因为在三维问题中，求解区域的外表面对体积的比值是很小的。由于边界元法能使问题降一维，并且分析同样一个问题比有限元法简化了输入数据的准备工作，因此，边界元法一般能节省计算机内存、机时和人的数据准备工作量，使解题较为经济。

边界元法在得出边界近似解之后，虽得不到解析显式，但可以逐点计算域内点的近似解，而有限元法则必须同时对所有域内结点联立求解。因此，当只需对个别点求解时，边界元法较简便。

由于边界元法中的每个待求参数影响每个边界结点，因此一

个不可避免的后果是最终得到的系数矩阵是一个满阵，而且往往是不对称的，这一性质对方程组的求解不利。而有限元法由于采用分片多项式基函数，它所得到的系数矩阵是带状的、对称的，因此具有较好的数学性态。

现举一例[11]将边界元法(BEM)与有限元法(FEM)的一些情况作一比较.

有一立方体，侧面和上面的温度为 0 ℃，底面的温度为 100 ℃，求立方体的温度分布。

(1) 需要的卡片数

FEM：566 张卡片，　1 000 单元左右

BEM：　43 张卡片

(2) 计算时间

一个自由度所需的时间(s)

模型	FEM	BEM	BEM / FEM
三维问题	0.33	1.96	5.9
轴对称	0.03	0.24	8.0
无限区域二维问题	0.29	1.87	6.5

(3) 解的精度

BEM 精度高，与精确解结果相同，FEM 结果精度稍低。有限元法大约需 6 h 的数据准备时间，而边界元法需 1.5 h 的数据准备时间。

近来已有人将边界元法与有限元法结合起来，用于求解流体力学、电磁场、热传导、流体—结构互相作用等问题，这样可使不同的方法在不同的区域上发挥各自的长处。这种结合的求解方法，将会更多地用于其它领域里的一些问题，是解决工程问题很有前途的一种好方法。

第二章　有限元法的基本原理

§2.1　泛函与变分

许多工程和科学问题可以用相应的微分方程和施加于未知函数的边界条件来表示。有限元法已成为当前求这些具有初、边值的微分方程数值解的一个重要方法。

有限元法与里兹(Ritz)法的经典变分概念以及伽辽金(Галёркин)法的加权残数法之间，存在着紧密的联系。为此，在介绍有限元法之前，先对变分法中的几个问题作简要的讨论。

1. 泛函

设$\{y(x)\}$是已给的函数集，如果对于集中任一函数$y(x)$恒有某个确定的数与之对应，记为$J[y(x)]$或$J[y]$，则说$J[y]$是定义于集$\{y(x)\}$上的一个泛函。简言之，泛函是以函数集为定义域的实值函数。

以上定义可以推广到多个函数的泛函，也可以把单元变量推广到多元变量的情况。

因此，泛函是函数空间到数值空间的映射。取不同形式的函数，对应有不同的泛函值，泛函值反映了该函数在某指定区间上的变化情况。因此，泛函总是取某种含有该函数的定积分形式。

例如，联结所给两点的曲线弧长l是一个泛函，因为这个量是由函数$y=y(x)$的选取来确定的(图 2-1)。当曲线的方程式$y=y(x)$给定时，l这个量就可以求得: