中国科学院研究生教学丛书

# 李群和Hermite对称空间

许以超 著

科学出版社

中国科学院研究生教学丛书

# 李群和Hermite对称空间

许以超 著

科学出版社

2001

# 内 容 简 介

本书为《中国科学院研究生教学丛书》之一.

本书是介绍李代数和李群的入门书. 全书比较详细地给出有限维复李代数和实李代数、复李群和实李群的基础知识，即复半单李代数和实半单李代数的构造理论和表示理论、李群的基本概念以及紧李群的构造理论和表示理论（但是不涉及到 Kac-Moody 李代数以及量子群). 作为应用，介绍了 Hermite 对称空间，以及它的 Harish-Chandra 嵌入和正规 Siegel 域实现.

本书可供高等院校数学系教师、研究生和数学研究工作者阅读，也可供从事理论物理、化学、生物方面的科研工作者参考.

**图书在版编目（CIP）数据**

李群和 Hermite 对称空间/许以超著. -北京：科学出版社，2001.3
(中国科学院研究生教学丛书/白春礼主编)
ISBN 7-03-008624-4

Ⅰ. 李… Ⅱ. 许… Ⅲ. ①李群-群论②对称空间，Hermite
Ⅳ. O152.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 64122 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717

科地亚印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 3 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
2001 年 3 月第一次印刷 印张：18 1/8
印数：1—3 500 字数：475 000

**定价：36.00 元**

（如有印装质量问题，我社负责调换〈北燕〉）

# 《中国科学院研究生教学丛书》序

在21世纪曙光初露，中国科技、教育面临重大改革和蓬勃发展之际，《中国科学院研究生教学丛书》——这套凝聚了中国科学院新老科学家、研究生导师们多年心血的研究生教材面世了．相信这套丛书的出版，会在一定程度上缓解研究生教材不足的困难，对提高研究生教育质量起着积极的推动作用．

21世纪将是科学技术日新月异，迅猛发展的新世纪，科学技术将成为经济发展的最重要的资源和不竭的动力，成为经济和社会发展的首要推动力量．世界各国之间综合国力的竞争，实质上是科技实力的竞争．而一个国家科技实力的决定因素是它所拥有的科技人才的数量和质量．我国要想在21世纪顺利地实施“科教兴国”和“可持续发展”战略，实现邓小平同志规划的第三步战略目标——把我国建设成中等发达国家，关键在于培养造就一支数量宏大、素质优良、结构合理、有能力参与国际竞争与合作的科技大军，这是摆在我国高等教育面前的一项十分繁重而光荣的战略任务．

中国科学院作为我国自然科学与高新技术的综合研究与发展中心，在建院之初就明确了出成果出人才并举的办院宗旨，长期坚持走科研与教育相结合的道路，发挥了高级科技专家多、科研条件好、科研水平高的优势，结合科研工作，积极培养研究生；在出成果的同时，为国家培养了数以万计的研究生．当前，中国科学院正在按照江泽民同志关于中国科学院要努力建设好“三个基地”的指

示，在建设具有国际先进水平的科学研究基地和促进高新技术产业发展基地的同时，加强研究生教育，努力建设好高级人才培养基地，在肩负起发展我国科学技术及促进高新技术产业发展重任的同时，为国家源源不断地培养输送大批高级科技人才.

质量是研究生教育的生命，全面提高研究生培养质量是当前我国研究生教育的首要任务.研究生教材建设是提高研究生培养质量的一项重要的基础性工作.由于各种原因，目前我国研究生教材的建设滞后于研究生教育的发展.为了改变这种情况，中国科学院组织了一批在科学前沿工作，同时又具有相当教学经验的科学家撰写研究生教材，并以专项资金资助优秀的研究生教材的出版.希望通过数年努力，出版一套面向21世纪科技发展、体现中国科学院特色的高水平的研究生教学丛书.本丛书内容力求具有科学性、系统性和基础性，同时也兼顾前沿性，使阅读者不仅能获得相关学科的比较系统的科学基础知识，也能被引导进入当代科学研究的前沿.这套研究生教学丛书，不仅适合于在校研究生学习使用，也可以作为高校教师和专业研究人员工作和学习的参考书.

“桃李不言，下自成蹊.”我相信，通过中国科学院一批科学家的辛勤耕耘，《中国科学院研究生教学丛书》将成为我国研究生教育园地的一丛鲜花，也将似润物春雨，滋养莘莘学子的心田，把他们引向科学的殿堂，不仅为科学院，也为全国研究生教育的发展作出重要贡献.

路甬祥

# 序

李群理论是 S.Lie 在研究微分方程的积分曲线族在什么变换作用下不变时发现，并且建立起来的．早期的李群理论，实际上是研究李群的局部性质，而且很快就化为纯代数的问题，即研究李代数的构造和表示论．从 20 世纪 40 年代起，流形概念已经很明确地形成后，才逐渐从局部性质的研究转向整体性质的研究．

从提出到形成李群和李代数的完整理论，已经有 100 年以上的历史．由于李群定义实际上是有机地联结流形和群这两个概念而形成的，因此很自然地，它是属于几何和代数的交叉学科．在长期发展后，已形成所谓李理论这个独立的学科，而且由于李群理论在各方面的广泛应用，在国际上李群课已经成为基础数学研究生的主要课程之一，但是在我国只有少数数学系开设这门课．编写这本书的目的是希望推动这方面的发展．

这里值得一提的是李群、李代数理论在理论物理中的应用．熟知的 Einstein 的相对论成功地运用了 (3.1) 型 Lorentz 群为运动群，来研究时空的物理理论．再如在基本粒子理论中的轻粒子理论是用李群、李代数理论来描述的，因此发现在自然界中存在一个新的轻粒子，且以后为实验所证实．近年来，由于量子场中的量子反散射理论和规范场的研究，从李代数的通用包络代数出发成功地引进了 $q$ 量子化和量子群的概念，使得李理论有了更广阔的发展前景．

本书是李代数和李群的入门书，而且着眼于李群入门，所以我们不涉及到 Kac-Moody 李代数以及量子群，而是只考虑复及实的有限维李代数和李群．实际上本书包含了两方面内容，主要部分比较详细地给出复李代数和实李代数、复李群和实李群的基

础知识；作为应用，本书介绍了 Hermite 对称空间.

Hermite 对称空间是由 É.Cartan 引进且给出分类的，它本身的几何性质和函数论一直受到人们的关注，至今尚在发展之中．另一方面， Hermite 对称空间又是一类特殊的复齐性有界域，对 Hermite 对称空间的了解提供了研究复齐性有界域的思想源泉.

Hermite 对称空间上的函数论，从历史上看，有两种做法．一种是以华罗庚和 Siegel 为主，对不可分解 Hermite 对称空间 (即典型域，除了两个例外典型域)，一类类地研究其函数论性质．另一种则是用 Harish-Chandra 嵌入或者用 Jordan 三数组，用 Jordan 代数分别统一地研究 Hermite 对称空间.

本书作为一本入门书，其目的也是帮助从事 Hermite 对称空间研究的科研工作者以及研究生较快地进入这一领域．由于是从李群角度研究 Hermite 对称空间，因此有必要论述复半单李代数、实半单李代数、李群的基本概念以及紧李群，这些构成了本书的前一部分，也是主要部分．第二部分是考虑 Hermite 对称空间，我们将实半单李群的一些性质也放在其中，但是不打算专门讨论，而是着重介绍 Harish-Chandra 实现.

本书共分六章．第一章完整地讲述复半单李代数的构造和表示，但略去具体的实现 (包括略去例外单李代数的构造和表示的实现)．第二章论述实半单李代数的构造所必须的基本理论，仍然略去具体的实现，读者可以参阅严志达和许以超合著的《李群及其李代数》(高等教育出版社 1985 年出版) 一书．前两章构成李代数的入门内容．第三章介绍李群的基本理论．第四章讲述紧李群的构造和表示的基本内容，特别包括了 Weyl 特征公式及 Peter-Weyl 定理，这两章构成李群的入门内容．第五章介绍 Hermite 对称空间的 Harish-Chandra 嵌入，为此先引进 Riemann 流形和 Hermite 流形，将 Hermite 对称空间的分类化为李代数问题，进一步给出 Hermite 对称空间的分类，介绍 Harish-Chandra 嵌入及利用这种实现所作的进一步展开．第六章利用 $\mathbb{C}^n$ 中的齐性有界域必全纯同构于齐性 Siegel 域 (Vinberg, Piatetski-Shapiro, Gindikin 的结果)

和齐性 Siegel 域必线性同构于正规 Siegel 域，给出了 Hermite 对称空间在 $\mathbb{C}^n$ 中的实现 (作者的结果), 其中包括 É.Cartan 在 1935 年没有能够在 $\mathbb{C}^n$ 中实现的两个例外典型域的实现. 进一步，我们还考虑了例外典型域的性质.

本书由 1996 年上半年在中国科学技术大学数学系研究生班讲课二个月的讲稿整理而成. 在写作过程中得到了史济怀教授和班上很多同学以及中国科学技术大学出版社李攀峰先生的帮助. 本书的出版得到中国科学院研究生教学丛书出版基金的资助. 在最后修改时，作者用这讲稿在河南大学数学系研究生班讲课二个月，得到班上很多同学的帮助. 另一方面，科学出版社毕颖女士的辛勤劳动，使本书得以早日问世，作者在此表示衷心的感谢. 最后，必须指出，书中难免出现各种错误，欢迎读者批评指正.

许以超

中国科学院数学研究所

2000 年 3 月 20 日

# 目　　录

# 第一章　李代数理论

在这一章中，我们引进李代数的基本概念和基本技巧，给出复半单李代数的分类理论以及表示论.

## § 1.1　李代数的基本概念

**定义 1.1.1**　设 $\mathfrak{L}$ 为域 $F$ 上的线性空间. 若在 $\mathfrak{L}$ 中引进运算 $[x,y]$（称为 **换位运算** ），使得它适合条件：

(1) **反交换性**

$$[y,x]=-[x,y],\quad \forall\, x,y\in\mathfrak{L};$$

(2) **双线性性**

$$[\lambda x+\mu y,z]=\lambda[x,z]+\mu[y,z],\quad \forall\, \lambda,\mu\in F,\ x,y,z\in\mathfrak{L};$$

(3) **Jacobi 恒等式**

$$[[x,y],\ z]+[[z,x],\ y]+[[y,z],\ x]=0,\quad \forall\, x,y,z\in\ \mathfrak{L}.$$

则 $\mathfrak{L}$ 称为域 $F$ 上的 **李代数**.

若线性空间 $\mathfrak{L}$ 的维数为 $n$, 则 $\mathfrak{L}$ 称为域 $F$ 上的 $n$ **维李代数**; 若 $\mathfrak{L}$ 的维数无限，则 $\mathfrak{L}$ 称为 **无限维李代数**. 另一方面，当域 $F$ 为复数域时，$\mathfrak{L}$ 称为 **复李代数**. 当 $F$ 为实数域时，$\mathfrak{L}$ 称为 **实李代数**.

本书只考虑有限维实李代数和复李代数.

**定义 1.1.2**　记 $e_1,\cdots,e_n$ 为域 $F$ 上的 $n$ 维李代数 $\mathfrak{L}$ 的一组

基，则有 **乘法表**

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k e_k, \quad 1 \le i, j \le n.$$

它决定了 $n^3$ 个元素 $C_{ij}^k$, $1 \le i,\ j,\ k \le n$, 称为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **构造常数**.

由李代数的定义，显然有

**引理 1.1.3** 设 $\mathfrak{L}$ 为域 $F$ 上的 $n$ 维李代数，$n^3$ 个元素 $C_{ij}^k \in F$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的构造常数，当且仅当 $C_{ij}^k, 1 \le i,j,k \le n$ 适合条件

$$C_{ij}^k + C_{ji}^k = 0;$$
$$\sum_{l=1}^{n} C_{ij}^l C_{lk}^t + \sum_{l=1}^{n} C_{ki}^l C_{lj}^t + \sum_{l=1}^{n} C_{jk}^l C_{li}^t = 0,\ 1 \le i,j,k,t \le n.$$

**定义 1.1.4** 记 $F$ 为域 $K$ 的子域，$\mathfrak{L}$ 为域 $F$ 上的 $n$ 维李代数. 在 $\mathfrak{L}$ 中任取一组基 $e_1, \cdots, e_n$, 则

$$\mathfrak{L}^K = \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \mid \forall\, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K \}$$

称为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 $K$ 化, 其中 $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ 为域 $K$ 上的形式线性组合，它有 $\sum \lambda_i e_i = \sum\ \mu_i\ e_i$, 当且仅当 $\lambda_i = \mu_i, 1 \le i \le n$.

由李代数的定义，可以证明

**引理 1.1.5** 记 $F$ 为域 $K$ 的子域，$\mathfrak{L}$ 为域 $F$ 上的 $n$ 维李代数，则李代数 $\mathfrak{L}$ 的 $K$ 化 $\mathfrak{L}^K$ 在换位运算

$$[\sum_i \lambda_i e_i, \sum_j \mu_j e_j] = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j [e_i, e_j] = \sum_{i,j,k} \lambda_i \mu_j C_{ij}^k e_k$$

下构成域 $K$ 上的 $n$ 维李代数，且李代数 $\mathfrak{L}^K$ 的定义与李代数 $\mathfrak{L}$ 的基底选取无关.

**证** 前一断言由李代数的定义可直接验证. 后一断言证明如下: 在域 $F$ 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 中另取一组基 $f_1,\cdots,f_n$, 则有

$$f_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\,e_j,\quad 1\le i\le n,$$

其中 $a_{ji}\in F$. 任取 $\rho_1,\cdots,\rho_n\in K$, 则由 $\sum\limits_{j=1}^{n}\rho_j a_{kj}\in K,1\le k\le n$, 有

$$\sum_{j=1}^{n}\rho_j f_j=\sum_{j,k=1}^{n}\rho_j a_{kj}e_k=\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\rho_j a_{kj}\Big)e_k\in\mathfrak{L}^K.$$

这就证明了断言, 证完.

特别重要的是取 $F=\mathbb{R}$, $K=\mathbb{C}$. 这时, 实李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **复化** $\mathfrak{L}^C$ 是复李代数, 而且有

$$\mathfrak{L}^C=\mathfrak{L}+\sqrt{-1}\mathfrak{L},\quad \dim_C(\mathfrak{L}^C)=\dim_R(\mathfrak{L}).$$

**引理 1.1.6** $n$ 维实李代数 $\mathfrak{L}$ 的复化 $\mathfrak{L}^C$ 也是 $2n$ 维实李代数, 记作 $(\mathfrak{L}^C)_R$. 且对于李代数 $\mathfrak{L}$ 中任意一组基 $e_1,\cdots,e_n$, 则 $e_1,\cdots,e_n,\sqrt{-1}e_1,\cdots,\ \sqrt{-1}e_n$ 为实李代数 $(\mathfrak{L}^C)_R$ 的一组基.

**定义 1.1.7** 设 $\mathfrak{L}$ 为 $n$ 维复李代数, $\mathfrak{L}_0$ 为 $n$ 维实李代数. $\mathfrak{L}_0$ 称为 $\mathfrak{L}$ 的 **实形式**, 如果 $\mathfrak{L}_0$ 的复化 $\mathfrak{L}_0^C=\mathfrak{L}$.

于是, 显然有

**引理 1.1.8** 设 $\mathfrak{L}$ 为 $n$ 维复李代数. 则 $\mathfrak{L}$ 有实形式当且仅当在李代数 $\mathfrak{L}$ 中存在一组基 $e_1,\cdots,e_n$, 使得这组基的构造常数全由实数构成.

由引理 1.1.8 可知, 并不是任一复李代数都有实形式.

下面给出两个重要的李代数的例子.

**例 1** 设 $F$ 为域, $V$ 为域 $F$ 上的 $m$ 维线性空间. 记 $\mathrm{gl}(V)$ 为 $V$ 上的所有线性变换构成的集合. 在线性变换的加法和纯量积下, 显然它构成一个线性空间. 在线性空间 $\mathrm{gl}(V)$ 中引进换位运

算 $[\mathcal{A},\mathcal{B}]=\mathcal{AB}-\mathcal{BA}$. 易证这时 $\mathrm{gl}(V)$ 为李代数，称为 **一般线性李代数**.

**例 2** 设 $F$ 为域. 记 $\mathrm{gl}(m,F)$ 为域 $F$ 上的所有 $m\times m$ 矩阵构成的集合. 在方阵的加法和纯量积下，显然它构成一个 $m^2$ 维线性空间. 在线性空间 $\mathrm{gl}(m,F)$ 中引进换位运算 $[A,B]=AB-BA$, 易证这时 $\mathrm{gl}(m,F)$ 为 $m^2$ 维李代数，称为 **一般矩阵李代数**.

显然有

**引理 1.1.9** 设 $F$ 为域， $V$ 为域 $F$ 上的 $m$ 维线性空间. 一般线性李代数 $\mathrm{gl}(V)$ 为 $m^2$ 维李代数. 在 $V$ 中取定基 $e_1,\cdots,e_m$, 则线性变换的矩阵表示构成 $m^2$ 维一般矩阵李代数.

为了进一步展开李代数理论，先约定一个符号. 设 $\mathfrak{L}$ 为域 $F$ 上的李代数， $\mathfrak{R}$ 和 $\mathfrak{S}$ 为 $\mathfrak{L}$ 的两个子集，则 $[\mathfrak{R},\mathfrak{S}]$ 记由元素集 $\{[m,n]\mid m\in\mathfrak{R},n\in\mathfrak{S}\}$ 线性生成的线性子空间.

我们有

**定义 1.1.10** 设 $\mathfrak{L}$ 为域 $F$ 上的李代数. $\mathfrak{L}$ 的线性子空间 $\mathfrak{L}_1$ 称为 **子代数**（或 **理想** ），如果 $[\mathfrak{L}_1,\mathfrak{L}_1]\subset\mathfrak{L}_1$(或 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}_1]\subset\mathfrak{L}_1$). 设 $\mathfrak{L}_1$ 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的理想， **商空间**$\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_1$ 称为李代数 $\mathfrak{L}$ 关于理想 $\mathfrak{L}_1$ 的 **商李代数**, 如果在商空间 $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_1$ 中引进换位运算

$$[x+\mathfrak{L}_1,y+\mathfrak{L}_1]=[x,y]+\mathfrak{L}_1,\quad \forall\, x,y\in\mathfrak{L}.$$

显然，商李代数中引进的换位运算的定义和等价类集 $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_1$ 中的等价类的代表元素选取无关，且商李代数是李代数.

**定义 1.1.11** 设 $\mathfrak{L}_1$ 和 $\mathfrak{L}_2$ 为域 $F$ 上的李代数. $\mathfrak{L}_1$ 到 $\mathfrak{L}_2$ 内的线性映射 $\sigma$ 称为李代数的 **同态映射**, 如果

$$\sigma([x,y])=[\sigma(x),\sigma(y)],\quad \forall\, x,y\in\mathfrak{L}_1.$$

这时称 $\mathfrak{L}_2$ 和 $\mathfrak{L}_1$ **同态**. 李代数 $\mathfrak{L}$ 到 $\mathfrak{L}$ 的同态映射 $\sigma$ 称为 **自同态映射**. 这时称 $\sigma$ 为李代数的 **自同态**. 当李代数的同态映射 $\sigma$ 为到上的一一映射时，称为李代数的 **同构映射**. 这时称 $\mathfrak{L}_2$ 和 $\mathfrak{L}_1$ **同构**. 李代数 $\mathfrak{L}$ 到 $\mathfrak{L}$ 的同构映射 $\sigma$ 称为 **自同构映射**. 这时称 $\sigma$ 为李代数的 **自同构**.

显然，李代数的同构是等价关系. 李代数的构造理论，即分类理论，就是找出同构下的全系不变量以及在每个同构等价类中找出一个代表元素.

从定义出发，容易证明关于李代数同态的重要定理.

**定理 1.1.12**(李代数的同态基本定理) 设 $\sigma$ 为域 $F$ 上的李代数 $\mathfrak{L}_1$ 到 $\mathfrak{L}_2$ 内的同态，则同态像 $\sigma(\mathfrak{L}_1)$ 为李代数 $\mathfrak{L}_2$ 的子代数，同态核 $\ker(\sigma)=\sigma^{-1}(0)$ 为李代数 $\mathfrak{L}_1$ 的理想. 另一方面，自然映射 $\mathfrak{L}_1\to\mathfrak{L}_1/\ker(\sigma)$ 为李代数 $\mathfrak{L}_1$ 到商李代数 $\mathfrak{L}_1/\ker(\sigma)$ 上的同态映射，且存在商李代数 $\mathfrak{L}_1/\ker(\sigma)$ 到李代数 $\sigma(\mathfrak{L}_1)$ 上的同构映射 $\rho$, 使得

$$\sigma=\rho\circ\pi.$$

现在引进伴随表示如下：设 $\mathfrak{L}$ 为域 $F$ 上的李代数，任取 $x\in\mathfrak{L}$, 则在李代数 $\mathfrak{L}$ 上有线性变换

$$\mathrm{ad}\,(x):\ \ y\to[x,y],\quad \forall\, y\in\mathfrak{L}.$$

于是有线性变换集

$$\mathrm{ad}\,(\mathfrak{L})=\{\mathrm{ad}\,(x)\mid\forall x\in\mathfrak{L}\}\subset\mathrm{gl}\,(\mathfrak{L}).$$

利用李代数的定义，容易证明.

**引理 1.1.13** 符号同上. 线性变换集 $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{L})$ 为一般线性李代数 $\mathrm{gl}\,(\mathfrak{L})$ 的子代数，且有

$$[\mathrm{ad}\,(x),\mathrm{ad}\,(y)]=\mathrm{ad}\,([x,y]),\quad \forall\, x,y\in\mathfrak{L}.$$

又映射 $\mathrm{ad}: x\to\mathrm{ad}\,(x),\forall x\in\mathfrak{L}$ 给出李代数 $\mathfrak{L}$ 到 $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{L})$ 上的同态映射. 我们称映射 ad 为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **伴随表示**. $\mathrm{ad}^{-1}(0)$ 称为 **伴随表示的核**.

**定义 1.1.14** (1) 域 $F$ 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 的子代数 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ 称为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **换位子代数**. (2) 李代数 $\mathfrak{L}$ 称为 **交换李代数**, 如果 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]=0$. (3) 域 $F$ 上的李代数 $\mathfrak{L}$ 的子集

$$\mathrm{C}(\mathfrak{L})=\{x\in\mathfrak{L}\mid[x,\mathfrak{L}]=0\}$$

称为李代数 $\mathfrak{L}$ 的 **中心**.

显然有

**引理 1.1.15** 李代数 $\mathfrak{L}$ 的中心 $C(\mathfrak{L})$ 是李代数 $\mathfrak{L}$ 的交换理想，且是李代数 $\mathfrak{L}$ 的伴随表示的核.

下面引进四类重要的李代数.

**定义 1.1.16** 设 $\mathfrak{L}$ 为域 $F$ 上的李代数. 它有理想序列

$$\mathfrak{L}^1=\mathfrak{L},\ \mathfrak{L}^k=[\mathfrak{L}^{k-1},\mathfrak{L}],\ k=2,3,\cdots,$$
$$\mathfrak{L}^{(1)}=\mathfrak{L},\ \mathfrak{L}^{(k)}=[\mathfrak{L}^{(k-1)},\mathfrak{L}^{(k-1)}],\ k=2,3,\cdots.$$

李代数 $\mathfrak{L}$ 称为 **幂零的**（或 **可解的** ），如果存在自然数 $N$ 使得 $\mathfrak{L}^N=0$ （或 $\mathfrak{L}^{(N)}=0$）.

**引理 1.1.17** 交换李代数必幂零，幂零李代数必可解. 又交换、幂零、可解李代数的子代数仍然分别为交换、幂零、可解的.

**证** 后一断言由定义立即可知. 下面证明前一断言. 显然，交换必幂零. 为了证明幂零必可解，只要证明 $\mathfrak{L}^{(k)}\subset\mathfrak{L}^k, k=1,2,\cdots$ 就够了，这由归纳法立即可知. 证完.

**引理 1.1.18** 设 $\mathfrak{L}$ 为域 $F$ 上的李代数，则李代数 $\mathfrak{L}$ 的换位子代数 $\mathfrak{L}^{(2)}=\mathfrak{L}^2=[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ 幂零蕴含李代数 $\mathfrak{L}$ 可解.

**证** 由于

$$(\mathfrak{L}^{(2)})^k\supset(\mathfrak{L}^{(2)})^{(k)}=\mathfrak{L}^{(k+1)},\quad k=1,2,\cdots,$$

所以由 $\mathfrak{L}^{(2)}$ 幂零可知 $\mathfrak{L}$ 可解. 证完.

显然有

**引理 1.1.19** 设 $\mathfrak{L}$ 为域 $F$ 上的李代数，则 $\mathfrak{L}$ 的任意两个幂零（或可解）理想的和仍为幂零（或可解）理想.

由引理 1.1.19 可知，在有限维李代数 $\mathfrak{L}$ 中存在最大可解理想 $\mathfrak{R}$ 及最大幂零理想 $\mathfrak{R}_0$.

**定义 1.1.20** 设 $\mathfrak{L}$ 为域 $F$ 上的 $n$ 维李代数. $\mathfrak{L}$ 的 **最大幂零理想** 称为 $\mathfrak{L}$ 的 **幂零根基**, **最大可解理想** 称为 $\mathfrak{L}$ 的 **根基**. 根基等